بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم پایه

عنوان

اصل تغییراتی اکلند و کاربردهای آن درمسائل تعادل و قضایای نقطه ثابت

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

استاد راهنما :

دکتر محسن علیمحمدی

استاد مشاور :

دکترماشاا... متین فر

نگارش :

امین رضایی

بهار ۸۷

تقدیم به

همسر عزیزم

آرزو

چکیده :

این پایان نامه مبتی بر کتاب و مقالات زیر می باشد

1 - **Andreas H.Hamel** *"Equivalents to Ekeland's variational principle* $F - Type$ *Topological Spaces "*

2 - **J. M. Borwein and Q. J. Zhu** *"Techniques of Variational Analysis An Introduction"*

3 - **S. Al-Homidan , Q.H. Ansari , J.-C. Yao** *"Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory"*

که در آن به ارائه مفهوم اصل تغییراتی اکلند و کاربردهای آن می پردازیم . ریاضیدانان بزرگی بعد از اکلند مفهوم این اصل را تعمیم دادند و توانستند نتایج مفیدی را برای فضاهایی غیر از فضاهای متریک بدست آورند .

معادل بودن اصل تغییراتی اکلند با چند قضیه مهم در فضاهای شبه متریک همراه با یک Q- تابع بخش عمده کار محسوب می شود که در فصل سوم به ارائه و اثبات آن می پردازیم .

در فصل چهارم با معرفی فضاهای $F - Type$ ، اصل تغییراتی اکلند را در این فضاها مورد بررسی قرار داده و معادل بودن آن را با چند قضیه دیگر اثبات می کنیم .

فهرست مطالب

فصل اول : تعاریف و مقدمات

- مروری بر آنالیز تغییراتی و آنالیز تابعی............ ۲

فصل دوم : اصول تغییراتی

- تعاریف و قراردادها............ ۱۶
- اصل تغییراتی اکلند............ ۲۰
- حالتهای هندسی از اصل تغییراتی اکلند............ ۲۸
- کاربردها در قضایای نقطه ثابت............ ۳۷

فصل سوم : تعمیم اصل تغییراتی اکلند و معادلهای آن

- تعاریف و قراردادها............ ۴۴
- تعمیم اصل تغییراتی اکلند............ ۵۲
- معادلهایی از اصل تغییراتی اکلند............ ۶۲
- مسائل تعادل و هم ارزی با اصل تغییراتی اکلند............ ۶۸
- قضیه نقطه ثابت نَدلر و معادل آن............ ۷۳

فصل چهارم : اصول تغییراتی در فضاهای $F-Type$

- اصل تغییراتی در فضاهای $F-Type$............ ۸۰
- قضایای معادل با اصل تغییراتی اکلند............ ۸۵
- اثبات معادل بودن قضایا............ ۸۹

ضمیمه

- کتابنامه............ ۱۰۱
- لغات و اصطلاحات............ ۱۰۳

فصل اول

تعاریف و مقدمات

فصل اول

مروری بر آنالیز تغییراتی و آنالیز تابعی

مقدمه : در این فصل به تعاریف و اصطلاحات مقدماتی از جمله فضاهای توپولوژیک ، پایه یک توپولوژی ، فضاهای هاسدورف ، فضاهای متریک ، نیم متریک و شبه متریک ، فضای دوگان ، فضای باناخ ، فشردگی ، توابع پیوسته ، فضاهای محدب ، دنباله ها و تورها ، فضاهای مرتب ، نرم و فضاهای نرمدار اشاره کرده و قضایای مهم مربوط به هر یک را بیان می نماییم . [12] و [23] و[24] و [25]

۱. فضاهای توپولوژی

۱–۱–۱) تعریف : یک توپولوژی در مجموعه X گردایه ای مانند τ از زیرمجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کند :

۱) X و ϕ به τ تعلق دارند .

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ متعلق است به τ .

۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی τ متعلق است به τ .

مجموعه X به همراه توپولوژی τ موجود در X یک فضای توپولوژیک نامیده می شود که با نماد (X,τ) نمایش داده می شود .

۱–۱–۲) تعریف : فرض کنیم X مجموعه ای باشد ، یک پایه توپولوژی در X ، گردایه ای است از زیرمجموعه های X بطوریکه :

۱) به ازای هر $x \in X$ دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است .

۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد بطوریکه $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

اگر X یک مجموعه غیرتهی باشد ، $P(X)$ و $\{X, \phi\}$ توپولوژی روی X هستند که اولی توپولوژی گسسته و دومی را توپولوژی بدیهی می گوییم .

۱–۱–۳) تعریف : اگر τ_1 و τ_2 توپولوژیهای روی X باشند بطوریکه $\tau_2 \subset \tau_1$ ، گوییم τ_2 ضعیف تر از τ_1 است . به طور مثال توپولوژی بدیهی ضعیف ترین توپولوژی روی X است و توپولوژی گسسته قوی ترین توپولوژی روی X است .

۱–۱–۴) تعریف : $(X.\tau)$ یک فضای برداری توپولوژیکی (TVS) است اگر τ یک توپولوژی روی X باشد به طوریکه

یک) $(x, y) \to x + y$ از $X \times X \to X$ پیوسته باشد .

دو) $(t, x) \to tx$ از $F \times X \to X$ پیوسته باشد .

۱-۱-۵) گزاره : فرض کنید (X,τ) یک (TVS) است .

یک) اگر $t_o \in F$, $x_o \in X$ آنگاه نگاشت $x \to t_o x + x_o$ از X به X پیوسته است .

اگر $t_o \neq 0$ نگاشت مذکور از X به روی X یک همانریختی است .

دو) اگر ϑ یک پایه همسایگی (باز) از 0 در X باشد آنگاه $x_o + \vartheta = \{x_o + u : u \in \vartheta\}$ یک پایه همسایگی (باز) از x_o است .

سه) اگر U باز باشد tU نیز برای هر $t \in F$ $(t \neq 0)$ باز است .

چهار) اگر ϑ یک پایه همسایگی در 0 و $u \in \vartheta$ باشند آنگاه $\exists V \in \vartheta$ بطوریکه $V + V \subseteq U$.

۱-۱-۶) تعریف : یک زیر مجموعه B از یک TVS چون X کراندار است اگر $t_k \to o$ و $\{x_k\} \subseteq B$ (از اسکالر ها) نتیجه دهد $t_k x_k \to o$.

۲- فضاهای متریک و شبه متریک

۱-۲-۱) تعریف : X را یک مجموعه غیرتهی در نظر بگیرید ، تابع حقیقی مقدار $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ را یک متر روی X گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

۱) $d(x,y) \geq 0$ برای هر $x, y \in X$

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

۳) به ازای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) = d(y,x)$

۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ برای هر $x, y, z \in X$.

۱–۲–۲) تعریـــف : X را یـک مجموعـه غیرتهـی در نظـر بگیریـد ، تـابع حقیقـی مقـدار $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ را یک شبه متریک روی X گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

۱) $d(x,y) \geq 0$ برای هر $x, y \in X$

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$

۳) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ برای هر $x, y, z \in X$.

۳– فضاهای هاسدورف :

۱–۳–۱) تعریف : فضای توپولوژیک X را فضای هاسدورف خوانیم هرگاه به ازای هـر دونقطـه متمایز x_1 و x_2 از X همسایگی های U_1 و U_2 بترتیب از x_1 و x_2 یافت می شوند که از هم جدا باشند یعنی $U_1 \cap U_2 = \phi$.

۱–۳–۲) قضیه : هر زیرفضای هاسدورف ، فضای هاسدورف است .

۱–۳–۳) قضیه : حاصلضرب فضاهای هاسدورف نیز هاسدورف است .

۱–۳–۴) قضیه : در فضای هاسدورف X ، هر زیرمجموعه متناهی ، بسته است .

۴– فضاهای فشرده

۱–۴–۱) تعریف : گوییم گردایه U از زیرمجموعه های فضای X ، یـک پوشـش X اسـت یـا X را پوشش می دهد هرگاه اجتماع اعضای U شامل X باشد.

۱–۴–۲) تعریف : فضای X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز آن مانند U حاوی یک زیرگردایه متناهی باشد که آن نیز X را بپوشاند .

۱–۴–۳) قضیه : حاصلضرب هر تعداد متناهی از فضاهای فشرده ، فضایی فشرده است .

۱–۴–۴) تعریف : گوییم گردایه C از زیرمجموعه های X در شرط اشتراک متناهی صادق است اگر برای هر زیرگردایه متناهی $\{C_1,...,C_n\}$ از C داشته باشیم $C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n \neq \phi$.

۱–۴–۵) قضیه : فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد ، در این صورت ، X فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر زیرگردایه از مجموعه های بسته X مانند C که در شرط اشتراک متناهی صدق کند ، اشتراک همه اعضای C ، یعنی $\underset{c\in C}{\cap} c$ ناتهی باشد .

۱–۴–۶) تعریف : منظور از یک فشرده شده فضایی مانند X ، فضای هاسدورف فشرده ای حاوی X است مانند Y که X در آن چگال است ($\bar{X} = Y$) .

۱–۴–۷) تعریف : فضای X همبند است اگر و فقط اگر تنها زیر مجموعه های X که در X هم باز است و هم بسته اند ، مجموعه تهی و مجموعه X باشنند .

۵- توابع پیوسته :

۱-۵-۱) تعریف : فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند ، تابع $f:X\to Y$ را پیوسته خوانیم هرگاه به ازای هر زیرمجموعه باز Y مانند V ، مجموعه $f^{-1}(V)$ یک زیرمجموعه باز X باشد .

۱-۵-۲) تعریف : (همانریختی) فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و تابع $f:X\to Y$ تناظری دوسویی باشد . اگر f و تابع معکوس آن $f^{-1}:Y\to X$ هر دو پیوسته باشند آنگاه f را همانریختی می خوانیم .

۱-۵-۳) قضیه : فرض کنیم $f:X\to Y$ تابعی پیوسته و دوسویی باشد اگر X فشرده و Y هاسدورف باشد آنگاه f همانریختی است .

۱-۵-۴) تعریف : فضای X را نرمال گوییم اگر به ازای هر دو مجموعه بسته جدا از هم از آن مانند A و B ، مجموعه های باز جدا از هم بترتیب ، حاوی A و B موجود باشند .

۶- فضاهای محدب :

۱-۶-۱) تعریف : فرض کنید X زیرمجموعه ای از $\mathbb{R}^n$ باشد ، X را محدب گوییم هرگاه به ازای هر زوج از نقاط X مانند x و y قطعه خط واصل بین آنها نیز در X قرار گیرد .

۱–۶–۲) تعریف : فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد . پایه موضعی B را محدب نامیم اگر هر عضو B محدب باشد . فضای X را موضعا محدب نامیم هرگاه دارای یک پایه موضعی محدب باشد .

۱–۶–۳) قضیه : هر فضای برداری توپولوژی موضعا محدب ، محدب است .

۱–۶–۴) تعریف : غلاف محدب $A \subset X$ که با $CO(A)$ نشان داده می شود عبارت از اشتراک تمام مجموعه های محدب شامل A می باشد .

۷– نرم :

۱–۷–۱) تعریف : فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد ، تابع $\| \, \| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را یک شبه نرم روی X نامیم هرگاه :

۱) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ به ازای هر $x, y \in X$

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $x \in X$

اگر یک شبه نرم شرط " $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ " داشته باشد ، گوییم یک نرم است . همچنین اگر روی فضای X یک نرم وجود داشته باشد گوییم X یک فضای نرمدار است .

۱–۷–۲) تعریف : یک نیم نرم روی X یک تابع $\| \, \| : X \to \mathbb{R}$ صادق در شرایط ذیل می باشد :

یک) برای هر $x \in X$ $\|x\| \ge o$

دو) برای هر $x \in X$ ، $\|tx\| = |t|.\|x\|$

سه) نا مساوی مثلثی $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ برای هر $x, y, z \in X$

یک نیم نرم ، نرم نامیده می شود . اگر در شرط ذیل نیز صدق کند .

چهار) $\|x\| = o$ اگر و تنها اگر $x = o$.

۱–۷–۳) گزاره : فرض کنید $(X, \|\ \|)$ یک فضای نیم نرمدار باشد آنگاه روابط زیر برقرارند :

یک) نگاشت $(t, x) \to tx$ از $F \times X \to X$ پیوسته است .

دو) نگاشت $(x, y) \to x + y$ از $X \times X \to X$ پیوسته است .

سه) نگاشت $x \to \|x\|$ از X به $\mathbb{R}$ پیوسته است .

تذکر : اگر X یک فضای نرمدار باشد و برای هر $x, y \in X$ قرار دهیم $d(x, y) = \|x - y\|$ آنگاه d یک متریک روی X است ، لذا هر فضای نرمدار یک فضای متری است . d متر تولید شده توسط نرم نامیده می شود .

۱–۷–۴) تعریف : اگر X فضای نرمدار باشد ، متریک تولید شده توسط نرم روی X ، متریکی است با ضابطه $d(x, y) = \|x - y\|$. توپولوژی نرم از X ، توپولوژی است که از این متریک بدست آمده است .

۱–۷–۵) تعریف : اگر X فضای نرمدار باشد ، گوی بسته یکه از X به صورت $\{x : x \in X . \|x\| \le 1\}$ و گوی یکه باز از X به صورت $\{x : x \in X . \|x\| < 1\}$ می باشد .

۱–۷–۶) تعریف : نرم باناخ یا نرم کامل ، نرمی است که فضای متریک کاملی را ارائه می دهد . فضای نرمدار را فضای باناخ گوییم هرگاه نرم آن یک نرم باناخ باشد .

۱–۷–۷) گزاره : اگر X یک فضای نرمدار باشد ، آنگاه برای هر $x , y \in X$ داریم $\left| \|x\| - \|y\| \right| \le \|x - y\|$. همچنین تابع $x \mapsto \|x\|$ پیوسته از X به $\mathbb{R}$ است .

۱–۷–۸) قضیه : برای یک فضای نرمدار X ،

a) اگر S یک زیرفضای X باشد آنگاه $\bar{S}$ نیز زیرفضایی از X است .

b) اگر C زیرمجموعه محدبی از X باشد آنگاه $\bar{C}$ و C^0 نیز محدب هستند .

۱–۷–۹) تعریف : اگر X و Y فضای نرمدار باشند ، عملگر خطی $T : X \to Y$ کراندار است اگر $T(B)$ زیر مجموعه کرانداری از Y باشد هرگاه B زیرمجموعه کرانداری از X باشد .

گردایه تمام عملگرهای خطی از X به Y با $B(X,Y)$ نشان داده می شود .

۱–۷–۱۰) تعریف : اگر X و Y فضای نرمدار باشند برای هر T متعلق به $B(X,Y)$ ، نرم یا نرم عملگر از T ، مقدار سوپریمم مجموعه $\{\|T(x)\| : x \in B_X\}$ است که مقداری مثبت می باشد .

نرم عملگر روی $B(X,Y)$ نگاشت $T \mapsto \|T\|$ است .

۸– فضاهای باناخ :

۱–۸–۱) تعریف : فضای نرمدار X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X نسبت به متریک تولید شده بوسیله نرم ، فضایی کامل باشد .

۱–۸–۲) قضیه (هان باناخ) : فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی ، f یک تابع زیرخطی روی X بوده و Y یک زیرفضای X باشد .همچنین فرض کنیم تابع f' در شرط $f'(x) \le f(x)$ برای هر $x \in Y$ صدق نماید ، آنگاه یک تابع خطی مانند F روی X با شرط $F(x) \le f(x)$ برای هر $x \in X$ و $F|_Y = f$ موجود است .

۱–۸–۳) قضیه : اگر X یک فضای نرمدار و $x \in X - \{0\}$ ، آنگاه وجود دارد $y^* \in X^*$ بطوریکه داریم : $\|y^*\| = 1$ و $y^*(x) = \|x\|$

لذا برای هر $x \in X$ داریم : $\|x\| = \sup\{|y^* x| : y^* \in X, \|y^*\| = 1\}$

۱–۸–۴) قضیه : اگر $x \in X$ و به ازای هر $y^* \in X^*$ داشته باشیم $y^*(x) = 0$ ، آنگاه $x = 0$ بعبارت دیگر X^* نقاط X را جدا می کند .

۹– تورها و دنباله ها:

۱–۹–۱) تعریف : مجموعه جهتدار A را مرتب جزیی با رابطه $\leq$ نامیم هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in A$ وجود داشته باشد $\gamma \in A$ بطوریکه $\beta \leq \gamma, \alpha \leq \gamma$.

۱–۹–۲) تعریف : یک تور در مجموعه X ، نگاشت $\alpha \to x_\alpha$ از یک مجموعه جهتدار A به X است . معمولا تورها را به صورت $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ نشان می دهیم .

۱–۹–۳) تعریف : اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری از مجموعه جهتدار A به فضای توپولوژی X بوده و Kزیرمجموعه ای از A باشد ، نگاشت $\alpha_k \to x_{\alpha_k}$ که است را زیرتور $\langle x_\alpha \rangle$ نامیم و با $\langle x_{\alpha_k} \rangle$ نشان می دهیم .

۱–۹–۴) تعریف : اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری در فضای توپولوژی X بوده و $x \in X$ باشد ، گوییم $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ همگرا به x است اگر و فقط اگر برای هر همسایگی U از x ، اعضای تور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ از جایی به بعد در U باشند .

۱–۹–۵) قضیه : اگر X یک فضای توپولوژی ، $E \subset X$ و $x \in X$ ، آنگاه x یک نقطه حدی از E است اگر و فقط اگر یک تور در $E \setminus \{x\}$ وجود داشته باشد که همگرا به x باشد . و $x \in \bar{E}$ اگر و فقط اگر یک تور در E وجود داشته باشد که همگرا به x باشد.

۱–۹–۶) قضیه : اگر X و Y فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ آنگاه f در $x \in X$ پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر تور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ همگرا به x ، $\langle f(x_\alpha) \rangle$ همگرا به $f(x)$ باشد .

۱–۹–۷) قضیه : فضای X فشرده است اگر و فقط اگر هر تور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ در X ، زیرتوری همگرا به نقطه ای از X داشته باشد .

فصل دوم

اصول تغییراتی

مقدمه : از دیرباز بشر ریاضیات را علمی ذهنی و انتزاعی تلقی می کرد و لی با گسترش علوم ، ریاضیات توانست جایگاه خود را به عنوان علمی کارا و با ارزش بدست آورد . بهینه سازی را می توان یکی از مباحث اصلی در ریاضیات کاربردی به شمار آورد . تکنیکهای تغییراتی روشهایی هستند که می توانند مقدار مینیمم را برای توابع بدست آورند . مسائل بهینه سازی که ریشه در مسائل فیزیکی دارند با ارائه تکنیکهای تغییراتی و تحلیلهای ریاضی گسترش یافت .

بحث را با شرایط وجود مقدار مینیمم برای تابع f آغاز کرده و نتایج را مورد بررسی قرار می دهیم . تابع نیم پیوسته پایینی (lsc) روی یک مجموعه غیر فشرده ممکن است به مقدار مینیمم خود نرسد . تکنیکهای تغییراتی روشهایی را در اختیار ما قرار می دهد که بتوانیم مقدار مینیمم برای توابع نیم پیوسته پایینی از پایین کراندار را بدست آوریم . دو شرط برای وجود مینیمم در یک تابع الزامی است ، اولی فشردگی تابع که وجود مینیمم را تضمین می کند و دومی دیفرانسیل پذیری تابع است که روش رسیدن به مقدار مینیمم را ارائه می کند .

در این فصل بعد از تعاریف و قراردادهای اولیه ، نمایی هندسی از اصل تغییراتی اکلند[1] [6] و [7] را ارائه کرده ، سپس قضیه معروف اکلند را مطرح و اثبات می کنیم . در ادامه حالتهای خاصی از اصل تغییراتی اکلند مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت همچنین کاربردهایی را از اصل تغییراتی اکلند

---
1 - Ekeland

در قضایای نقطه ثابت را مورد بررسی قرار خواهیم داد . بوروین[1] [11] نیز در این راستا قضیه معروف خود را که تعمیمی برای اصل تغییراتی اکلند بود ارائه کرد .

۱. تعاریف و قراردادها

۲–۱–۱) تعریف : اگر X یک فضای برداری باشد ، $A \subset X$ را یک مخروط گوییم هرگاه به ازای هر $k \in \mathbb{R}_+$ داشته باشیم $k.A \subset A$.

۲–۱–۲) تعریف : اگر $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد تابع با مقدار توسعه یافته f را به این صورت در نظر می گیریم $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. دامنه تابع f مجموعه ای متناهی است که به صورت $Domf = \{x ; f(x) < +\infty\}$. برد f مجموعه تمام مقادیر f است و به این صورت نشان داده می شود $Rangf = \{f(x); x \in Domf\}$. تابع f را سره گوییم هرگاه دامنه مخالف تهی داشته و بردش مخالف بی نهایت باشد . یعنی بردش هم ارز بی نهایت نباشد .

۲–۱–۳) تعریف: تابع f را در نقطه x نیم پیوسته پایینی (lsc) گوییم هرگاه داشته باشیم $\liminf_{y \to x} f(y) \ge f(x)$. تابع f را نیم پیوسته پایینی گوییم هرگاه در سراسر دامنه اش نیم پیوسته پایینی باشد .

---
[1] Borwein