بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی مجموعه‌های احاطه‌گر همبند در گراف‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

زهرا کرمی

استاد راهنما: **دکتر علی طاهرخانی**

بهمن ۱۳۹۳

تقدیم به
خانواده‌ی عزیزم به ویژه
پدر و مادر
مهربانم.

تشکر و قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی طاهرخانی صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از تمامی اساتید گرانقدر دانشکده‌ی ریاضی بویژه جناب آقای دکتر منوچهر ذاکر کمال امتنان را دارم. در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدسشان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

چکیده

یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند برای گراف $G(V,E)$ زیر مجموعه‌ای مانند D از V است به‌طوری‌که هر رأس در $V-D$ با حداقل یکی از اعضای D مجاور است و زیرگراف القایی روی مجموعه‌ی D همبند است. به اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند، عدد احاطه‌گری همبندی می‌گویند و با $\gamma_c(G)$ نمایش می‌دهند. مفهوم احاطه‌گری همبندی در انواع شبکه‌ها از جمله شبکه‌های بیسیم ادهاک برای یافتن یک پشتیبان مجازی با اندازه‌ی مینیمم کاربرد دارد. در این پایان‌نامه به بیان چند الگوریتم ارائه شده برای پیدا کردن مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند در گراف‌های ساده و گراف‌های دیسک واحد می‌پردازیم. همچنین کران‌های بالا و پایین به‌دست آمده برای عدد احاطه‌گری همبندی گراف‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: *مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند، عدد احاطه‌گری همبندی، گراف دیسک واحد.*

فهرست

چکیده . . . . . پنج

پیش‌گفتار ۱

۱ تعریف‌های اولیه و نمادها **۴**

۱.۱ مقدمه ۴

۲.۱ گراف ۹

۳.۱ مسیرها و دورها ۱۱

۴.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر ۱۳

۵.۱ پیچیدگی محاسباتی ۱۴

۶.۱ معرفی چند رابطه ۱۶

۲ عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری همبندی در گراف‌ها **۱۸**

۱.۲ مقدمه ۱۸

۲.۲ گراف‌های شامل یک دور و گراف‌های ۳− منتظم ۲۰

۳.۲ گراف‌های بلوکی و گراف‌های کاکتوس ۲۹

۴.۲ کران‌های پایین برای عدد احاطه‌گری همبندی ۴۱

۵.۲ کران‌های بالا برای عدد احاطه‌گری همبندی ۵۰
۶.۲ کران بالا برای عدد احاطه‌گری همبندی به شیوه‌ی احتمالاتی ۵۷

۳ الگوریتم‌هایی برای محاسبه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر **۶۴**

۱.۳ مقدمه ۶۴
۲.۳ مدل‌بندی یک شبکه‌ی بیسیم ۶۶
۱.۲.۳ مدل‌بندی شبکه ۶۶
۳.۳ ساختار CDS متمرکز شده ۷۰
۱.۳.۳ الگوریتم گوها و خولر ۷۰
۲.۳.۳ الگوریتم روآن ۸۰
۳.۳.۳ الگوریتم حریصانه‌ی چنگ ۸۷
۴.۳.۳ الگوریتم بیوتین کو ۸۹
۵.۳.۳ الگوریتم مین ۹۲
۴.۳ ساختار CDS توزیع یافته ۹۳
۱.۴.۳ ساختار CDS حریصانه ۹۳
۲.۴.۳ ساختار CDS بر پایه‌ی MIS ۹۴
۳.۴.۳ الگوریتم توزیع یافته‌ی بیوتین کو ۱۰۵
۵.۳ بررسی تکنیک‌های مختلف ساختار CDS ۱۰۷
۶.۳ الگوریتم CDS برای گراف‌هایی با محدوده‌ی ارتباطی متفاوت ۱۰۹

۴ کران‌های روی عدد $k-$احاطه‌گری همبند **۱۱۲**

۱.۴ مقدمه ۱۱۲

۲.۴ مجموعه‌ی $k-$احاطه‌گر ۱۱۴
مراجع ۱۲۷
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۳۶
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۴۱

فهرست تصاویر

۱.۱ مثال‌هایی از گراف دوبخشی، گراف کامل و گراف تهی ۱۳

۱.۲ جواب‌هایی برای مسئله‌ی پنج وزیر ۱۹

۲.۲ گراف‌هایی با دور واحد ۲۳

۳.۲ گراف‌های $G_۲, G_۱$ ۲۷

۴.۲ مثال‌هایی از خانواده‌های $\mathcal{F}_۶$ و $\mathcal{F}_۸$ ۴۲

۵.۲ مثال‌هایی برای عدد مرتبه‌ی جمع همبندی ۴۷

۶.۲ مشتقی از گراف $K_{۳,۳}$ در گراف $\bar{G}$ ۵۳

۱.۳ یک گراف دیسک واحد ۶۷

۲.۳ یک نمونه از WCDS در یک گراف همبند ۶۸

۳.۳ گراف G ۷۳

۴.۳ مثالی از الگوریتم دوم گوها و خولر ۸۱

۵.۳ تراکم دایره‌هایی با $r = ۰/۵$ در یک دایره با $R = ۳/۵$ ۹۹

۶.۳ محدوده‌ی مجموعه‌ی U_i ۱۰۱

۷.۳ مثالی از الگوریتم تک پیشرو الزوبی و وان ۱۰۴

۸.۳ یک گراف دیسک با یال‌های دو جهته ۱۱۰

۱.۴ گراف H ۱۱۷

فهرست جداول

۱.۳ الگوریتم‌هایی برای ساختار CDS ۱۰۹

پیش‌گفتار

در دنیای اطراف ما وضعیت‌های فراوانی وجود دارد که می‌توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه‌ی نقاط، به علاوه‌ی خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می‌کنند به توصیف آن‌ها پرداخت. در این گونه نمودارها، آنچه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه‌ی داده شده به وسیله‌ی یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه و طریقه‌ی اتصال آن‌ها اهمیتی ندارد. تجرید ریاضی این وضعیت‌ها به مفهوم گراف منتهی می‌شود. **نظریه‌ی گراف**، شاخه‌ای از ریاضیات است که درباره‌ی گراف‌ها بحث می‌کند و بر خلاف شاخه‌های دیگر ریاضیات نقطه‌ی آغازی مشخص دارد و آن انتشار مقاله‌ای از لئونارد اویلر، برای حل مسئله‌ی پل‌های کونیگسبرگ [۱] در سال ۱۷۳۶ است. اما سیلوستر [۲] نخستین کسی بود که در سال ۱۸۷۸ از واژه‌ی گراف برای نامیدن این مدل‌های ریاضی استفاده کرد.

پیشرفت‌های اخیر در ریاضیات، به ویژه در کاربردهای آن، موجب گسترش چشمگیر نظریه‌ی گراف شده است. به گونه‌ای که هم اکنون ابزار بسیار مناسبی برای تحقیق در زمینه‌های گوناگون مانند نظریه‌ی کدگزاری، علوم کامپیوتر، شبکه‌های اجتماعی و سایر زمینه‌ها گردیده است. با رشد علوم کامپیوتر و شبکه‌های ارتباطی و اجتماعی در دهه‌های اخیر، مفهوم جدیدی وارد نظریه‌ی گراف با عنوان مجموعه‌های احاطه‌گر شده است و به دلیل اهمیت مجموعه‌های احاطه‌گر در بسیاری از مسائل روز، ریاضیدانان بر آن شدند انواع مختلف احاطه‌گری مانند احاطه‌گری همبند، احاطه‌گری تام، احاطه‌گری علامت‌دار و ... مورد بررسی قرار دهند.

---

[۱] Konigsberg Bridge

[۲] J. Sylvester

در شبکه‌های مختلف به ویژه شبکه‌های بیسیم ادهاک [1]، سازمان ثابت یا مدیریت مرکزی که کنترل شبکه را بر عهده بگیرد وجود ندارد، لذا برای کنترل شبکه یک پشتیبان مجازی می‌تواند توسط گره‌ها در یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند متناظر با گراف‌های دیسک واحد ایجاد شود [۲۴، ۲۵، ۵۶] . در این شبکه‌ها گره‌ها روشن و یا خاموش می‌شوند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند، بنابراین توپولوژی شبکه پویا است و این مسئله سبب شده الگوریتم یافتن یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند مینیمم به یک مسئله‌ی چالش برانگیز تبدیل شود. الگوریتم‌هایی که در این زمینه طراحی می‌شوند باید سرعت و کارایی لازم را برای تطبیق با تغییرات چنین شبکه‌هایی داشته باشند. از شبکه‌های بیسیم در عملیات نظامی، عملیات جست‌وجو و نجات، حفاظت از محیط زیست، شبکه‌های کامپیوتری، مخابرات و ... استفاده می‌شود. مسئله‌ی پیدا کردن یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند مینیمم در گراف یک مسئله‌ی $\mathcal{NP}-$ سخت است [۳۴]. در این پایان نامه علاوه‌بر اینکه به اهمیت CDS در این شبکه‌ها می‌پردازیم، گراف‌هایی را که برای آن‌ها عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری همبندی برابر است، مشخص می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم اگر G یک گراف همبند و $g(G)$ اندازه کمر گراف باشد که شامل حداقل یک دور است، آنگاه $\gamma_c(G) \geq g(G) - ۲$. سپس گراف‌هایی را که برای آن‌ها این کران به تساوی تبدیل می‌شود، مشخص می‌کنیم. در پایان فصل دوم کران‌های مختلف به‌دست آمده برای $\gamma_c(G)$ را معرفی می‌کنیم. مطالب این فصل از مقاله‌های [۸، ۱۵، ۱۹، ۲۸] اقتباس شده است.

در فصل سوم به بیان جزئیات چند الگوریتم ارائه شده برای مسئله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند [2] (CDS) می‌پردازیم و در جدولی جداگانه الگوریتم‌های مختلف ارائه شده در این زمینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم از مقاله‌های [۱۰، ۱۲، ۳۷، ۴۸، ۵۵، ۵۸] استفاده شده است.

در فصل چهارم مفهوم مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند تعمیم یافته است و با عنوان مجموعه‌ی $k-$ احاطه‌گر

---

[1] Ad hoc wireless networks

[2] Connected dominating set

معرفی و سپس کران‌های به‌دست آمده برای عدد $k-$ احاطه‌گری همبندی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مطالب فصل چهارم از مقاله‌ی [۴۳] برگرفته شده است.

فصل اول

تعریف‌های اولیه و نمادها

۱.۱ مقدمه

مطالعه‌ی مفهوم احاطه‌گری به‌ویژه احاطه‌گری همبند در گراف‌ها کاربرد زیادی در شبکه‌های کامپیوتری دارد. در این فصل با چند نمونه از این کاربردها آشنا می‌شویم و در ادامه نیز به تعریف‌های اولیه‌ی مورد نیاز در این پایان نامه خواهیم پرداخت.

یک شبکه‌ی کامپیوتری شامل دو یا چند کامپیوتر و ابزارهای جانبی مانند چاپگرها، اسکنرها و ... هستند. دلایل ایجاد شبکه شامل استفاده‌ی مشترک از منابع، کاهش هزینه، قابلیت اطمینان، صرفه جویی در زمان، قابلیت توسعه و برقراری ارتباط است که کاربران می‌توانند از طریق نوآوری‌های موجود مانند پست الکترونیکی، سیستم‌های اطلاع رسانی و... پیغام‌هایشان را مبادله کنند. امروزه با پیشرفت تکنولوژی‌های ارتباطی، برقراری ارتباط مورد نیاز برای راه اندازی شبکه‌ها به کمک تکنیک‌های متفاوتی امکان‌پذیر است. زمانی ارتباط بین ایستگاه‌های کاری در یک شبکه فقط توسط کابل‌های هم محور

انجام می‌شد. پس از آن با پیشرفت تکنولوژی، اتصالات موجود بهبود یافتند و کابل‌های فیبر نوری پا به عرصه‌ی وجود گذاشتند. مزیت اصلی این پیشرفت‌ها سرعت انتقال داده‌ها و بهبود امنیت ارسال و دریافت داده‌ها است.

در مراحل بعد وجود برخی مشکلات مانند عدم کابل‌کشی جهت برقراری اتصالات مورد نیاز، وجود هزینه‌ی بالا یا سختی عملیات کابل‌کشی و غیرممکن بودن یا هزینه‌بر بودن انجام تغییرات در زیر ساخت‌های فعلی شبکه سبب شد تا محققان به فکر ایجاد روشی برای برقراری ارتباط بین ایستگاه‌های کاری باشند که نیاز به کابل نداشته باشند. در نتیجه تکنولوژی‌های بیسیم [۱] پا به عرصه‌ی وجود گذاشتند. در این تکنولوژی، انتقال اطلاعات از طریق امواج الکترومغناطیس انجام می‌شود.

در ادامه به معرفی شبکه‌های بیسیم و اهمیت فوق‌العاده‌ی آن‌ها در زندگی امروزی می‌پردازیم و نشان خواهیم داد پیدا کردن یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند در این شبکه‌ها چقدر در توسعه و افزایش سرعت عملکرد آن‌ها نقش دارد.

شبکه‌های بیسیم دو نوع هستند، شبکه‌های بیسیم ادهاک و شبکه‌های دارای زیر ساخت (دارای سازمان مرکزی). در نوع دوم، برای پیاده‌سازی شبکه بیسیم موردنظر از یک یا چند دستگاه متمرکز کننده‌ی مرکزی یا نقطه‌ی دسترسی [۲] که به اختصار AP نامیده می‌شود، استفاده می‌شود. وظیفه‌ی یک AP، برقراری ارتباط در شبکه است.

شبکه‌های بیسیم ادهاک شامل مجموعه‌ای از گره‌های توزیع شده است که با یکدیگر به صورت بیسیم ارتباط برقرار می‌کنند و سازمان مرکزی ثابتی ندارند. بنابراین در یک توپولوژی دلخواه شکل گرفته‌اند. لازم به ذکر است که به هر دستگاه در شبکه گره گفته می‌شود. هر گره مجهز به یک فرستنده و گیرنده

---

۱ Wireless

۲ Acces point

است. مهمترین ویژگی این شبکه‌ها، به دلیل تحرک گره‌ها، وجود یک توپولوژی پویا و متغییر است. گره‌ها در این شبکه‌ها به طور پیوسته موقعیت خود را تغییر می‌دهند که این ویژگی نیاز به یک پروتکل مسیریابی که توانایی سازگاری با این تغییرات را داشته باشد، نمایان می‌کند. مسیریابی و امنیت در این شبکه‌ها، از چالش‌های امروز در علم ارتباطات است. اولین شبکه‌ی ادهاک در سال ۱۹۷۰ توسط DARPA [۱] و با دلایل نظامی بوجود آمدند. شبکه‌های بیسیم ادهاک خود دو نوع هستند، شبکه‌های حسگر و شبکه‌های موبایل ادهاک. از جمله مزایای یک شبکه‌ی ادهاک که باعث توجه هرچه بیشتر محققان به این نوع از شبکه‌ها شده است، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود. این شبکه

- مقیاس پذیر است یعنی خود را با اضافه شدن گره‌های بیشتر تطبیق می‌دهد و سرعت توسعه‌ی آن زیاد است.
- به سادگی و با صرف هزینه‌ی پایین قابل پیاده سازی است.
- مانند سایر شبکه‌های بیسیم به زیر ساخت نیاز ندارد.
- دارای پیکربندی خودکار است.
- هر یک از دستگاه‌ها به عنوان یک روتر (مسیریاب) نیز ایفای نقش می‌کنند.
- انعطاف پذیر است، به عنوان مثال دسترسی به اینترنت از نقاط مختلف موجود در محدوده‌ی تحت پوشش شبکه امکان پذیر است.

برخی از کاربردهای شبکه‌های ادهاک در ادامه بیان می‌شود.

۱. استفاده در عملیات اورژانسی، مانند عملیات جست‌وجو و نجات، اطفاء حریق یا عملیات پلیسی.

---

[۱] Defense advanced research projects agency

۲. استفاده در محیط‌های غیر نظامی، مثلا در شبکه‌ی داخلی تاکسیرانی، استادیوم ورزشی و غیره.

۳. کاربرد در حفاظت از محیط زیست.

۴. استفاده در مصارف نظامی، شبکه‌های حسگر بیسیم می‌توانند به عنوان بخش مهمی از سیستم‌های ارتباطی، نظارتی، ناوبری هوشمند و پردازش نظامی مورد استفاده قرار بگیرند.

در شبکه‌های ادهاک، گره‌های شبکه هیچ اطلاعاتی از توپولوژی شبکه‌ای که در آن قرار دارند، ندارند به همین دلیل مجبورند برای ارتباط با سایر گره‌ها محل مقصد را در شبکه کشف کنند. این کار مستلزم پیدا کردن مسیری مناسب از گره مبدأ به سمت گره مقصد است و مسیر شامل دنباله‌ای از گره‌های پشت سر هم است که با یکدیگر ارتباط دارند. پروتکل‌های مسیریابی بین هر دو گره این شبکه، به‌دلیل اینکه هر گره‌ای می‌تواند به طور تصادفی حرکت کند و حتی می‌تواند در هر زمان از شبکه خارج شده باشد، مشکل است. به این معنی که مسیری که در یک زمان بهینه است ممکن است چند ثانیه بعد اصلا وجود نداشته باشد. چندین پروتکل مسیریابی به دلیل کاربرد فراوان این نوع شبکه‌ها طراحی و اجرا شده‌اند که هر یک مشکلات و نقص‌های خود را دارد و در اینجا از پرداختن به چگونگی عملکرد آن‌ها صرف‌نظر می‌کنیم. بیشتر این پروتکل‌ها ابتدا شبکه را از طریق ایجاد یک مجموعه‌ی احاطه‌گر همبند سازماندهی می‌کنند. افرمیدیس [۱] از اولین کسانی بود که به اهمیت CDS در ایجاد یک شبکه‌ی پشتیبان [۲] مجازی برای مسیریابی و کنترل بسته‌ها پی برد [۳۱]. در ادامه به اهمیت به‌کارگیری مفهوم احاطه‌گری همبندی در این شبکه‌ها و بخصوص در پروتکل‌های مسیریابی اشاره خواهیم کرد.

پشتیبان بخشی از شبکه است که قسمت عمده از ترافیک را کنترل می‌کند و سایر شبکه‌های کوچکتر به آن متصل می‌شوند.

---

[۱] Ephremedis

[۲] Backbone

پیام‌ها می توانند از گره مبدأ به سمت همسایه‌هایش در مجموعه‌ی احاطه‌گر و از آنجا در طول مسیری از اعضای مجموعه‌های احاطه‌گر همبند به سوی گره‌ای که به گره مقصد متصل است، منتقل و سپس از طریق این گره به گره مقصد برسد. این روش در اصطلاح مسیریابی بر اساس اسپین [۱] نامیده می‌شود. محدود کردن مسیریابی به CDS، کاهش قابل توجه در تعداد پردازش پیام‌های منتقل شده‌ی مازاد دارد [۱۷]. به‌علاوه مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌تواند به صورت سلسله مراتبی سازماندهی شود و کاهش بیشتری در کنترل پیام‌های بالاسری داشته باشد [۵۱].

یک CDS در مسیریابی بر پایه‌ی موقعیت جغرافیایی گره‌ها نیز مفید است. در مسیریابی بر پایه‌ی موقعیت، پیام‌ها بر اساس مختصات جغرافیایی گره‌های سردسته فرستاده می‌شوند. به گره‌هایی که در مسیر گره مبدأ تا گره مقصد قرار دارند، گره‌های میانی گفته می‌شود. گره‌های میانی براساس نزدیکی آن‌ها به مقصد پیام‌ها انتخاب می‌شوند. به وسیله‌ی این روش ممکن است پیام‌ها به محلی از گره‌های میانی با تعداد زیاد برسند که همسایه‌های این گره‌ها دورتر از گره مقصد است. در این حالت، مسیریابی وارد فاز جبران می‌شود یعنی مسیر ممکن است به عقب برگردد تا مسیر دیگری پیدا کند. در هر حال اگر پیام‌ها فقط به گره‌هایی که در مجموعه‌ی احاطه‌گر قرار دارند ارسال شده باشد، ناکارآمدی وابسته به این فاز جبران می‌تواند بسیار کاهش یابد [۲۶].

کارایی مسیریابی به شیوه‌ی داده پراکنی [۲] می‌تواند از طریق بکارگیری CDS بهبود پیدا کند. مشکل بزرگ در مسیریابی به شیوه‌ی داده پراکنی این است که بیشتر گره‌های میانی نیاز به ارسال بسته ندارند و اغلب گره‌ها یک پیام را چندین مرتبه دریافت می‌کنند. به چنین حالتی در اصطلاح مسئله‌ی طوفان انتشار [۳] می‌گویند [۵۴]. اگر پیام‌ها در طول CDS منتقل شوند، بیشتر این پراکندگی زاید پیام‌ها می‌تواند حذف

---

[۱] Spine

[۲] broadcast/multicast

[۳] broadcast storm problem

شود.

گره‌ها اغلب در شبکه‌های بیسیم دارای منبع انرژی محدود هستند و یک CDS نقش مهمی در مدیریت توان این گره‌ها بازی می‌کند. از CDS به منظور افزایش تعداد گره‌هایی که می‌توانند در حالت خواب باشند استفاده می‌شود. تا زمانیکه این گره‌ها ساکن هستند توانایی شبکه را برای ارسال پیام‌ها حفظ می‌کنند [۲۱]. از مفهوم احاطه‌گری همچنین برای مدیریت شبکه استفاده می‌شود تا انرژی را در بین گره‌ها حفظ کنند.

در مقیاس انبوه شبکه‌های حسگر، خلاصه کردن اطلاعات توپولوژی حسگرها می‌تواند با ساختار CDS سروکار داشته باشد [۲۷] . به غیر از مسیریابی، شبکه‌ی مجازی تشکیل شده توسط مجموعه‌ی احاطه‌گر می‌تواند در انتشار اطلاعات کیفیت لینک‌ها، برای انتخاب مسیر برای جلوگیری از ترافیک چند رسانه‌ای به‌کار می‌رود [۵۷]. مجموعه‌های احاطه‌گر به عنوان سرویس دهنده‌های پایگاه داده‌ای نیز استفاده می‌شوند [۴۷].

در ادامه‌ی این فصل با برخی از مفاهیم نظریه‌ی گراف آشنا می‌شویم. برای آشنایی بیشتر با این مفاهیم و اثبات قضایا می‌توانید به کتاب نظریه‌ی گراف [۱۱] اثر باندی [۱] و مورتی [۲] مراجعه کنید.

۲.۱ گراف

در این پایان نامه گراف‌ها را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم که در آن V یک مجموعه‌ی دلخواه و ناتهی و E مجموعه‌ای از زوج‌های بدون ترتیب از عناصر V است. اگر ترتیب قرار گرفتن اعضای مجموعه‌ی

---

[۱] Bundy

[۲] Murty