بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

ناهمبند اکستریمال و همبندی

در فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر قاسم میرحسین‌خانی

استاد مشاور:

دکتر احمد احمدی

نگارش:

رقیه قره باغی بالسینی

اسفندماه ۱۳۹۳

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی تعمیمی از مفهوم همبندی تحت عنوان γ- همبندی برای نگاشت های یکنوای γ می‌پردازیم. سپس مفهوم ناهمبند اکستریمال و نگاشت های نیم پیوسته بالایی و نیم پیوسته پایینی روی فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته را بیان می کنیم و در ادامه، ارتباط ناهمبند اکستریمال و این نگاشت ها را بررسی می نماییم. این نشان می دهد که ناهمبند اکستریمال فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته، یک تعمیم خوبی از نگاشت های نیم پیوسته بالایی و نیم پیوسته پایینی می باشد؛ رابطه های بیشتری بین مفاهیم همبندی $\alpha, \beta, \pi, \sigma$ و ناهمبند اکستریمال را بیان می کنیم و در آخر مثال های جالبی از توپولوژی تعمیم یافته ناهمبند اکستریمال ارائه می دهیم.

واژگان کلیدی: ناهمبند اکستریمال، توپولوژی تعمیم یافته، همبندی

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

چه جهل مقدسی، آنگاه که انسان بعد از سال‌ها رنج و تکاپو می‌فهمد که هنوز هیچ نمی‌فهمد

و چه جهل نامقدسی وقتی خداوند در متن آگاهیهایت نباشد...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

تقدیر و سپاس همسری مهربان را که حامی من شدند تا در محضر اساتیدی بزرگوار هم‌کلاس با دوستانی شوم که تا ابد خاطرشان در دلم باقی بماند.

استاد ارجمندم جناب آقای دکتر میرحسین‌خانی را که استاد راهنمای من در این پایان‌نامه بودند سپاس می‌گویم و از سرکار آقای دکتر احمدی که مشاوره این پایان‌نامه بر عهده‌ی ایشان بود قدردانی می‌کنم. از دیگر اساتید بزرگوار آقای دکتر سبزواری، آقای دکتر استاد هادی و آقای دکتر مقدری و آقای دکتر زنگی‌آبادی که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم تشکر فراوان دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، همسر مهربان و مادر و پدر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بودند.

رقیه قره‌باغی باسمینی

اسفندماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیشگفتار

یک تعمیم از فضاهای توپولوژیک، فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته است. گردایه‌ی μ از زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی X، که شامل مجموعه‌ی تهی است و نسبت به اجتماع دلخواه بسته است، یک توپولوژی تعمیم یافته روی مجموعه‌ی X می نامند. در دهه‌های اخیر بسیاری از نتایج و قضایای فضاهای توپولوژیک و بسیاری از تعمیم‌های آنها روی فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته کار شده است.

سزار در سال ۲۰۰۲، توپولوژی تعمیم یافته را مطرح کرد و نزدیک به یک دهه است که سزار و محققان دیگر، علاقمند به تحقیق در مورد فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته هستند و خواصشان را مورد مطالعه قرار داده‌اند.

مفهوم فضای همبند، یکی از مباحث پربار توپولوژی عمومی است. به طور ساده می‌توان گفت فضای توپولوژیک (X, τ) همبند است هرگاه X را نتوان به دو زیر مجموعه‌ی باز در این فضا افراز نمود. در سال ۲۰۰۳، سزار تعمیمی از همبندی تحت عنوان γ- همبندی برای نگاشت های یکنوای γ را ارائه داد که در فصل اول این پایان نامه به آن پرداختیم.

فضای توپولوژیک X، ناهمبند اکستریمال نامیده می‌شود هرگاه بستار هر مجموعه‌ی باز X، در X باز باشد یا به طور معادل، درون هر مجموعه‌ی بسته از X، در X بسته باشد. کلمه‌ی « ناهمبند اکستریمال » توسط استون معرفی شد و سزار مفهوم ناهمبند اکستریمال را برای فضاهای توپولوژیکی تعمیم یافته معرفی کرده است. فضاهای ناهمبند اکستریمال در مطالعه فشردگی استون از فضای حاصلضربی و بطور کلی در مطالعه‌ی فضای استون از جبر بولی فشرده، مهم است. فضای ناهمبند اکستریمال نقش مهمی در نظریه توپولوژی نقطه‌ای دارد. با توجه به ویژگی های خاص فضاهای ناهمبند اکستریمال، کاربردهای مهمی در قضیه‌ی جبر بولی و همچنین در بعضی شاخه‌های آنالیز تابعی مانند C^*- جبر ارائه می‌دهد.

در فصل دوم، معادل های جالبی از فضاهای ناهمبند اکستریمال در فضاهای توپولوژیکی تعمیم

یافته ارائه می‌دهیم؛ همچنین نگاشت های نیم پیوسته‌ی بالایی و نیم پیوسته‌ی پایینی را در فضاهای توپولوژیکی تعمیم یافته معرفی می‌کنیم که ناهمبند اکستریمال یک تعمیم خوبی از این نوع نگاشت ها می‌باشد و در ادامه، ارتباط بیشتری میان مفهوم همبندی‌های $\alpha, \beta, \pi, \sigma$ و ناهمبندی اکستریمال در توپولوژی تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، مثال های جالبی از توپولوژی تعمیم یافته‌ی ناهمبند اکستریمال را بیان می‌کنیم.

فصل ۱

مجموعه‌های γ- همبند

۱.۱ مقدمه

یک توپولوژی روی مجموعه‌ی X عبارت است از گردایه‌ای مانند μ از زیرمجموعه های X که در شرایط زیر صدق کند:

۱. $X \in \mu \quad , \quad \phi \in \mu$.

۲. هرگاه U و V متعلق به μ باشند، آنگاه $U \cap V \in \mu$.

۳. اگر $\{V_i\}_{i\in I}$ گردایه‌ای از اعضای μ باشد، آنگاه $\bigcup_{i\in I} V_i \in \mu$.

زوج مرتب (X, μ) را یک فضای توپولوژیک و μ را یک توپولوژی روی X می‌نامیم. زیر مجموعه‌ی $A \subset X$ را باز می‌نامیم هرگاه $A \in \mu$ و بسته می‌نامیم هرگاه $X - A$ باز باشد.

تعریف ۱.۱.۱. به ازای $A \subseteq X$، μ -بستار A توسط $cl(A)$ نمایش داده می‌شود که اشتراک همه‌ی مجموعه‌های μ -بسته شامل A است. همچنین، μ -درون A توسط $int(A)$ نمایش داده می‌شود که اجتماع همه‌ی مجموعه‌های μ -باز شامل A می‌باشد.

فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\Gamma(X)$ گردایه‌ی همه نگاشت های یکنوا از مجموعه توانی $P(X)$ به توی خودش باشد.به عبارت دیگر،

$$\boldsymbol{A \subset B \subset X \Longrightarrow \gamma A \subset \gamma B \qquad , \quad \forall \gamma \in \Gamma(X)}$$

هرگاه μ یک توپولوژی روی X و $\gamma, \gamma' : P(X) \to P(X)$ باشد، در این صورت به جای cl، c و به جای int ، i می‌نویسیم و به جای $\gamma o \gamma'$، $\gamma\gamma'$ قرار می دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ از فضای توپولوژیکی (X, μ) ، نیم-باز نامیده می‌شود هرگاه $A \subset ciA$.

تعریف ۳.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ از فضای توپولوژیکی (X, μ) ، پیش-باز نامیده می‌شود هرگاه $A \subset icA$.

تعریف ۴.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ از فضای توپولوژیکی (X, μ) ، α -باز نامیده می‌شود هرگاه $A \subset iciA$.

تعریف ۵.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ از فضای توپولوژیکی (X,μ) ، β -باز نامیده می‌شود هرگاه $A \subset cicA$.

$$s = ci \qquad p = ic \qquad \alpha = ici \qquad \beta = cic$$

آنگاه $c, i, s, p, \alpha, \beta$ عناصر $\Gamma(X)$ هستند و به مجموعه‌های s- باز، p- باز، α- باز و β- باز، به ترتیب، نیم-باز، پیش-باز، α- باز و نیم پیش-باز گفته می‌شود.

برای عضوهای Γ ، نیاز به شرایط بیشتری که توسط Γ_n (n یک عدد صحیح یا یکی از علامت‌های + و - است) مشخص می‌شود، داریم. زیرمجموعه‌ای از Γ متشکل از همه‌ی $\gamma \in \Gamma$ ، به ازای $n \in \Delta$ را با نماد $\Gamma_\Delta(\{-,+\} \cup \Delta \subset Z)$ نشان می‌دهیم. به طور مثال، برای سادگی از نماد Γ_{13} به جای $\Gamma_{\{1,3\}}$ استفاده می‌کنیم.

شرایط زیر را برای نگاشت $\gamma \in \Gamma$ در نظر می‌گیریم :

$$(\Gamma_0) \qquad \gamma\emptyset = \emptyset,$$
$$(\Gamma_1) \qquad \gamma X = X,$$
$$(\Gamma_2) \qquad \gamma^2 A = \gamma A \qquad (A \subset X),$$
$$(\Gamma_+) \qquad A \subset \gamma A \qquad (A \subset X),$$
$$(\Gamma_-) \qquad A \supset \gamma A \qquad (A \subset X).$$

به ازای هر مجموعه‌ی باز G و $A \subset X$ داریم:

$$(\Gamma_3) \qquad G \cap \gamma A \subset \gamma(G \cap A)$$

منظور از Γ_2 این است که γ خودتوان است، Γ_+ یعنی γ، توسیع است و Γ_- یعنی γ، تحدید می‌باشد. واضح است که $id \in \Gamma_{012+} \cap \Gamma_{012-}$، $i \in \Gamma_{012-}$ و $c \in \Gamma_{012+}$.

$$(\Gamma_+) \Longrightarrow (\Gamma_1), (\Gamma_-) \Longrightarrow (\Gamma_0)$$

حال، نیاز به اصل ضعیف‌تری از Γ_- وΓ_2 داریم:

$$(\Gamma_{-2}) \qquad \gamma^2 A \subset \gamma A \qquad (A \subset X)$$

تعریف ۶.۱.۱. یک مجموعه‌ی $A \subset X$ ، γ -باز نامیده می‌شود هرگاه $A \subset \gamma A$ باشد.

$\emptyset$ همیشه γ -باز است. X ، γ -باز است هرگاه $\gamma \in \Gamma_1$. هرگاه $\gamma \in \Gamma_2$ ، آنگاه هر مجموعه‌ای به صورت γA ، γ -باز است. هرگاه $\gamma \in \Gamma_+$ ، آنگاه هر زیرمجموعه‌ی X ، γ -باز می‌باشد. هرگاه $\gamma \in \Gamma_-$ ، بنابراین A ، γ -باز است هرگاه $A = \gamma A$. در فضای توپولوژیک، مجموعه‌های i -باز با مجموعه‌های باز منطبق می‌باشند.

لم ۷.۱.۱. *هر اجتماعی از مجموعه‌های γ -باز، γ -باز است.*

برهان. فرض‌کنیم $A = \bigcup_{k\in K} A_k, A_k \subset \gamma A_k, (k \in K)$. لذا، به ازای هر $k \in K$، $\gamma A_k \subset \gamma A$. بنابراین،

$$A = \bigcup_{k\in K} A_k \subset \bigcup_{k\in K} \gamma A_k \subset \gamma A$$

برقرار است و برهان ثابت می‌شود. ■

تعریف ۸.۱.۱. زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ را γ -بسته نامیم هرگاه $X - A$ ، γ -باز باشد.

X همیشه γ -بسته است و $\emptyset$ ، γ -بسته است هرگاه $\gamma \in \Gamma_1$. هرگاه $\gamma \in \Gamma_+$ ، آنگاه هر زیرمجموعه‌ای از X ، γ -بسته است.

لم ۹.۱.۱. *هر اشتراکی از مجموعه‌های γ -بسته، γ -بسته است.*

به ازای هر $\gamma \in \Gamma$ و $A \subset X$ تعریف می‌کنیم :

$$\boldsymbol{\gamma^* A = X - \gamma(X - A)}$$

لم ۱۰.۱.۱. *هرگاه $\gamma \in \Gamma$ ، آنگاه $\gamma^* \in \Gamma$ و $(\gamma^*)^* = \gamma$.*

برهان. فرض کنیم $A \subset B \subset X$. درنتیجه، $X - A \supset X - B$ و $\gamma(X - A) \supset \gamma(X - B)$. بنابراین،

$$X - \gamma(X - A) \subset X - \gamma(X - B)$$

همچنین طبق تعریف واضح است:

$$\gamma^*(X - A) = X - \gamma A \qquad (۱.۱)$$

لذا، $(\gamma^*)^* A = X - \gamma^*(X - A) = \gamma A$.

■

هدف از این فصل، نشان دادن مفهوم فضاهای همبند یا به طور کلی‌تر، تعمیم مجموعه‌ی همبند تحت عنوان γ -همبند و ویژگی‌های اساسی آن، برای یک $\gamma \in \Gamma(X)$ دلخواه می‌باشد.

۲.۱ γ -همبندی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X یک مجموعه باشد و $\gamma \in \Gamma(X)$ ، طبق [۶] ، متمم یک مجموعه‌ی γ -باز، γ -بسته گفته می‌شود به طوری که، هر اشتراک از مجموعه‌های γ -بسته، γ -بسته است.

به ازای $A \subset X$ ، اشتراک همه‌ی مجموعه‌های γ -بسته‌ی شامل A را با $C_\gamma(A)$ نشان می‌دهیم؛ یعنی کوچکترین مجموعه‌ی γ -بسته شامل A.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $U, V \subset X$. U و V را γ -مجزا گوییم (به طور دقیق‌تر، جفت $\{U, V\}$ را γ -مجزا گوییم) هرگاه $C_\gamma U \cap V = C_\gamma V \cap U = \varnothing$.

واضح است که دو مجموعه‌ی γ -مجزا، از هم جدا می‌باشند. به علاوه، هرگاه U, V ، γ -مجزا باشند و $U' \subset U$ و $V' \subset V$ ، آنگاه U', V' نیز γ -مجزا می‌باشند.

لم ۳.۲.۱. هرگاه $U, V \subset X$ ، *گزاره‌های زیر معادلند:*

۱) U, V ، γ - *مجزا هستند.*

۲) *مجموعه‌های* γ - *بسته* F_U, F_V *وجود دارند به طوری که،* $U \subset F_U \subset X - V$ و $V \subset F_V \subset X - U$.

۳) *مجموعه‌های* γ - *باز* G_U, G_V *وجود دارند به طوری که،* $U \subset G_U \subset X - V$ و $V \subset G_V \subset X - U$.

برهان. (۲)⇐(۱) فرض کنیم U, V ، γ -مجزا باشند، بنابراین طبق تعریف داریم

$$c_\gamma U \cap V = c_\gamma V \cap U = \varnothing$$

قرار می‌دهیم $F_V = c_\gamma V$ و $F_U = c_\gamma U$. در نتیجه، نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$U \subset F_U \subset X - V \text{ و } V \subset F_V \subset X - U$$

(۳)⇐ (۲) فرض کنیم شرایط برقرار باشد. با گرفتن متمم از نامساوی‌های داده شده، رابطه های زیر را داریم

$$V \subset X - F_U \subset X - U \text{ و } U \subset X - F_V \subset X - V$$

قرار می‌دهیم $G_U = X - F_V$ و $G_V = X - F_U$. در نتیجه، حکم برقرار است.
(۲) $\Leftarrow$ (۳) قرار می‌دهیم $F_U = X - G_V$ و $F_V = X - G_U$. برهان، مشابه قسمت قبل است.
(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم رابطه(۲) برقرار باشد.

$$F_U \subset X - V \Longrightarrow c_\gamma F_U \cap V = \varnothing$$

$$F_V \subset X - U \Longrightarrow c_\gamma F_V \cap U = \varnothing$$

از طرفی طبق فرض، نامساوی روبرو برقرار است: $c_\gamma U \subset F_U$ و $c_\gamma V \subset F_V$. بنابراین،

$$c_\gamma U \cap V = c_\gamma V \cap U = \varnothing$$

■

تعریف ۴.۲.۱. زیرمجموعه‌ی $S \subset X$ را γ -همبند گوییم هرگاه $S = U \cup V$ و U, V، γ -مجزا باشند نتیجه دهد $U = \emptyset$ یا $V = \emptyset$.

ملاحظه ۵.۲.۱. *فضای X، γ- همبند گوییم هرگاه زیرمجموعه‌ی γ- همبندی از خودش باشد.*

قضیه ۶.۲.۱. *برای هر $\gamma \in \Gamma(X)$، گزاره‌های زیر معادلند:*
۱) *فضای X، γ- همبند است.*

۲) *هرگاه $X = G \cup G'$ و $G \cap G' = \emptyset$ و G و G'، γ- باز باشند، آنگاه $G = \emptyset$ یا $G' = \emptyset$.*

۳) *هرگاه $X = F \cup F'$ و $F \cap F' = \emptyset$ و F و F'، γ- بسته باشند، آنگاه $F = \emptyset$ یا $F' = \emptyset$.*

۴) *هرگاه $H \subset X$ هم γ -باز و هم γ -بسته باشد، آنگاه $H = \emptyset$ یا $H = X$.*

برهان. (۲) $\Leftarrow$ (۱) طبق لم ۳.۲.۱، G, G'، γ -مجزا هستند.

(۳) $\Leftarrow$ (۲) قرار می‌دهیم $G = X - F$ و $G' = X - F'$. در نتیجه طبق (۲)، $G = X - F = \emptyset$ یا $G' = X - F' = \emptyset$. به عبارت دیگر، $F = X$ یا $F' = X$ یعنی $F' = \emptyset$ یا $F = \emptyset$.

(۴) $\Leftarrow$ (۳) قرار می‌دهیم $F = H$ و $F' = X - H$. بنابراین طبق (۳)، $F = \emptyset$ یا $F' = \emptyset$ یعنی $H = \emptyset$ یا $H = X$.

(۲) $\Leftarrow$ (۴) فرض کنیم $X = G \cup G'$ و $G \cap G' = \emptyset$ و G و G' ، γ -باز باشند. قرار می‌دهیم $H = G$. بنابراین H ، γ -باز است و همچنین قرار می‌دهیم $H = X - G'$. بنابراین H ، γ -بسته نیز است. در نتیجه طبق (۴)، $H = \emptyset$ یا $H = X$. به عبارت دیگر $G = \emptyset$ یا $G' = \emptyset$.

(۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنیم $X = U \cup V$ و U و V، γ -مجزا باشند. قرار می‌دهیم:

$$G = X - c_\gamma U \text{ و } G' = X - c_\gamma V$$

بنابراین G و G'، γ -باز می‌باشند، $V \subset G$ و $U \subset G'$ نتیجه می‌دهد که $X = G \cup G'$ و داریم

$$G \cap G' = (X - c_\gamma U) \cap (X - c_\gamma V) = X - (c_\gamma U \cup c_\gamma V)$$

$$\subset X - (U \cup V) = X - X = \emptyset$$

بنابراین طبق فرض، $G = \emptyset$ یا $G' = \emptyset$. به عبارت دیگر، $c_\gamma U = X$ یا $c_\gamma V = X$ یعنی، $V = \emptyset$ یا $U = \emptyset$. ■

لم ۷.۲.۱. *هرگاه S، γ -همبند باشد و $S \subset U \cup V$ و U و V، γ -مجزا باشند، آنگاه $S \subset U$ یا $S \subset V$.*

برهان. فرض کنیم $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$ بنابراین $S \cap U$ و $S \cap V$، γ -مجزا هستند. در نتیجه $S \cap U = \emptyset$ یا $S \cap V = \emptyset$. به عبارت دیگر، $S \subset V$ یا $S \subset U$. ■

قضیه ۸.۲.۱. *هرگاه S، γ -همبند و $S \subset T \subset c_\gamma S$ باشد، آنگاه T، γ -همبند است.*

برهان. فرض کنیم $T = U \cup V$ و U و V، γ -مجزا باشند. بنابراین طبق لم ۷.۲.۱، $S \subset U$ یا $S \subset V$.

هرگاه $S \subset U$، بنابراین $T \subset c_\gamma S \subset c_\gamma U \subset X - V$. در نتیجه،

$$T \subset X - V \Longrightarrow U \cup V \subset X - V \Longrightarrow V = \emptyset$$

بطور مشابه، هرگاه $S \subset V$، در نتیجه $U = \emptyset$. ■

نتیجه ۹.۲.۱. *هرگاه S، γ -همبند باشد، آنگاه $c_\gamma S$، γ -همبند است.*

لم ۱۰.۲.۱. *هرگاه $S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ و S_λ برای هر $\lambda \in \Lambda$، γ - همبند باشد و برای $\lambda, \lambda' \in \Lambda$، $\lambda \neq \lambda'$، $S_\lambda, S_{\lambda'}$، γ - مجزا نباشند، آنگاه S نیز γ - همبند است.*

برهان. فرض کنیم $S = U \cup V$ و U, V ، γ -مجزا باشند، درنتیجه طبق لم ۷.۲.۱ :

$$\forall\lambda \in \Lambda \qquad S_\lambda \subset U \text{ یا } S_\lambda \subset V$$

طبق فرض، $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ ای وجود ندارد به طوری که $S_\lambda \subset U$ و $S_{\lambda'} \subset V$. به عبارت دیگر،

$$\forall \quad \lambda \in \Lambda, \lambda' \in \Lambda \qquad S_\lambda \subset U \text{ یا } S_{\lambda'} \subset V$$

هرگاه به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، $S_\lambda \subset U$؛ در نتیجه $S \subset U$ و $V = \emptyset$.

هرگاه به ازای هر $\lambda' \in \Lambda$، $S_{\lambda'} \subset V$؛ در نتیجه $S \subset V$ و $U = \emptyset$. ■

نتیجه ۱۱.۲.۱. *هرگاه $S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ و به ازای هر $\lambda \in \Lambda$، S_λ، γ - همبند باشد و به ازای هر $\lambda, \lambda' \in \Lambda$، $S_\lambda \cap S_{\lambda'} \neq \emptyset$، آنگاه S، γ - همبند است.*

نتیجه ۱۲.۲.۱. *هرگاه $S = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ و به ازای هر $\lambda \in \Lambda$ ، S_λ، γ - همبند باشد و $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$ آنگاه S، γ - همبند است.*

تعریف ۱۳.۲.۱. هرگاه $A \subset X$ و $x \in A$ باشد، مجموعه‌ی زیر، γ -مولفه‌ی A متعلق به x نامیده می‌شود.

$$\boldsymbol{A_x = \bigcup\{S \subset A : x \in S \text{ و } S\text{، }\gamma - \text{همبند است}\}}$$

قضیه ۱۴.۲.۱. *هر زیرمجموعه‌ی $A \subset X$ ، اجتماع همه‌ی γ - مولفه‌هایش است. هر مجموعه‌ی γ - همبند، یک زیرمجموعه‌ی γ - همبند ماکسیمال A است و دو γ - مولفه‌ی مجزا، مجزا می‌باشند. γ - مولفه‌های یک مجموعه‌ی γ - بسته، γ - بسته می‌باشند.*

برهان. هر مجموعه‌ی تک عضوی، γ -همبند است بنابراین، به ازای هر $x \in A$ ، $x \in A_x$ و $A = \bigcup_{x\in A} A_x$. لذا، طبق نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱، به ازای هر $x \in A$ ، A_x ، γ - همبند است. اگر $x \in S \subset A$، γ - همبند باشد. درنتیجه، $S \subset A_x$. بنابراین A_x زیرمجموعه‌ی γ - همبند ماکسیمال A شامل x می‌باشد.

هرگاه $x, y \in A$ و $A_x \cap A_y \neq \emptyset$. آنگاه $A_x \cup A_y$ طبق نتیجه‌ی ۱۲.۲.۱ ، γ - همبند است. بنابراین، $A_x \cup A_y \subset A_x \cap A_y$. درنتیجه، $A_x = A_y$.

هرگاه A، γ -بسته و $x \in A$ باشد آنگاه طبق نتیجه‌ی ۹.۲.۱، $A \supset c_\gamma A_x$ زیرمجموعه‌ی γ - همبند A شامل x است. بنابراین $c_\gamma A_x \subset A_x$ و A_x، γ - بسته است.

۳.۱ تصویر و نقش‌معکوس γ -همبندی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\gamma \in \Gamma(X), \gamma' \in \Gamma(X')$ و $f : X \to X'$. نگاشت f را (γ, γ') -پیوسته گوییم هرگاه $f^{-1}(A')$، به ازای هر مجموعه‌ی γ' -باز A'، γ -باز باشد.

هرگاه μ و μ' به ترتیب، توپولوژی روی مجموعه‌های X و X' باشند و ما نمادهای s, p, β و بطور مشابه s', p', β' را تعریف کنیم، آنگاه نگاشت‌های (s, s') -پیوسته، نگاشت‌های مردد و نگاشت‌های (p, p') -پیوسته، نگاشت‌های پیش-مردد و نگاشت‌های (β, β') -پیوسته، نگاشت‌های β -مردد نامیده می‌شوند.

لم ۲.۳.۱. *هرگاه f، (γ, γ') -همبند باشد و $U', V' \subset X'$، γ' -مجزا باشند، آنگاه $f^{-1}(U')$ و $f^{-1}(V')$، γ -مجزا هستند.*

برهان. طبق لم ۳.۲.۱، مجموعه‌های γ' -باز $G_{U'}$ و $G_{V'}$ وجود دارند به طوری که،

$$U' \subset G_{U'} \subset X' - V'$$

$$V' \subset G_{V'} \subset X' - U'$$

لذا،

$$f^{-1}(U') \subset f^{-1}(G_{U'}) \subset X - f^{-1}(V')$$

$$f^{-1}(V') \subset f^{-1}(G_{V'}) \subset X - f^{-1}(U')$$

به طوری که مجموعه‌های $f^{-1}(G_{U'})$ و $f^{-1}(G_{V'})$، γ -باز می‌باشند. بنابراین، طبق لم ۳.۲.۱، $f^{-1}(U')$ و $f^{-1}(V')$، γ -مجزا هستند. ■

لم ۳.۳.۱. *هرگاه $S \subset X$، γ -همبند باشد و f، (γ, γ') -پیوسته باشد، آنگاه $f(S)$، γ' -همبند است.*

برهان. فرض کنیم $f(S) = U' \cup V'$ با مجموعه‌های γ' -مجزای U', V' باشد. در این صورت، طبق لم ۲.۳.۱ ما داریم

$$S \subset f^{-1}(U') \cup f^{-1}(V')$$

به طوری که $f^{-1}(U')$ $f^{-1}(V')$، γ -مجزا می‌باشند.در نتیجه، طبق لم ۷.۲.۱، $S \subset f^{-1}(U')$ یا $S \subset f^{-1}(V')$. بنابراین، $f(S) \subset U'$ یا $f(S) \subset V'$ به عبارت دیگر، $U' = \emptyset$ یا $V' = \emptyset$. ■

تعریف ۴.۳.۱. f را (γ, γ') -باز گوییم هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی γ -باز S، $f(S)$، γ' -باز باشد.

لم ۵.۳.۱. *هرگاه f، (γ, γ') -باز و یک‌به‌یک باشد و $U, V \subset X$، γ -مجزا باشند آنگاه، $f(U)$ و $f(V)$، γ' -مجزا می‌باشند.*

برهان. طبق لم ۳.۲.۱ ، مجموعه‌های γ -باز G_U و G_V وجود دارند به طوری که،

$$U \subset G_U \subset X - V$$

$$V \subset G_V \subset X - U$$

ما داریم

$$f(U) \subset f(G_U) \subset f(X - V)$$

$$f(V) \subset f(G_V) \subset f(X - U)$$

به طوری که مجموعه‌های $f(G_U), f(G_V)$، γ' -باز می‌باشند. طبق فرض، داریم

$$f(X - U) \subset X' - f(U)$$

$$f(X - V) \subset X' - f(V)$$

در نتیجه، طبق لم ۳.۲.۱، $f(U)$ و$f(V)$، γ' -مجزا می‌باشند. ■

لم ۶.۳.۱. *هرگاه f، (γ, γ') -باز و یک‌به‌یک باشد و زیرمجموعه‌ی $S \subset X$ را داشته باشیم به طوری که $f(S)$، γ' -همبند باشد، آنگاه S، γ -همبند است.*

برهان. فرض کنیم $S = U \cup V$ به طوری که مجموعه‌های U, V، γ -مجزا می‌باشند؛ بنابراین، طبق لم ۵.۳.۱، $f(S) = f(U) \cup f(V)$ به طوری که مجموعه‌های $f(U), f(V)$، γ' -مجزا هستند. در نتیجه، $f(U) = \emptyset$ یا $f(V) = \emptyset$. به عبارت دیگر، $U = \emptyset$ یا $V = \emptyset$. ■

۴.۱ زیرمجموعه‌های γ -همبند

فرض کنیم (X,μ) یک فضای توپولوژیکی و $X_\circ \subset X$ باشد. علاوه بر نگاشت‌های c, i روی $expX$ نگاشت‌های $c_\circ, i_\circ$ را روی $expX_\circ$ در نظر می‌گیریم. با توجه به نگاشت‌های cl و int تعریف شده تحت توپولوژی زیرفضایی $\mu_\circ$ روی مجموعه $X_\circ$، به ازای $A \subset X_\circ$ داریم: $c_\circ A = cA \cap X_\circ$.
به طور مشابه، هرگاه $\gamma \in \Gamma(X)$، به ازای $A \subset X_\circ$ تعریف می‌کنیم:

$$\gamma_\circ A = \gamma A \cap X_\circ \qquad (۲.۱)$$

لم ۱.۴.۱. *هرگاه $\gamma \in \Gamma(X)$، آنگاه $\gamma_\circ \in \Gamma(X_\circ)$ و $\gamma \in \Gamma_k$ نتیجه می‌دهد، $\gamma_\circ \in \Gamma_k$ به ازای $k = \circ, +, -, ۳$.*

برهان. فرض کنیم $A \subset B \subset X_\circ$؛ در نتیجه، طبق فرض، $\gamma A \subset \gamma B$؛ در این صورت، داریم

$$\gamma A \cap X_\circ \subset \gamma B \cap X_\circ$$

بنابراین، $\gamma_\circ A \subset \gamma_\circ B$.
فرض می‌کنیم $\gamma \in \Gamma_\circ$؛ در این صورت، $\gamma\emptyset = \emptyset$ و

$$\gamma_\circ\emptyset = \gamma\emptyset \cap X_\circ = \emptyset \cap X_\circ = \emptyset$$

در نتیجه، $\gamma_\circ \in \Gamma_\circ$.
فرض کنیم $A \subset X_\circ$ و $\gamma \in \Gamma_+$؛ لذا، $A \subset \gamma A$. در این صورت، داریم

$$A \cap X_\circ \subset \gamma A \cap X_\circ$$

لذا، $A \subset \gamma_\circ A$؛ بنابراین $\gamma_\circ \in \Gamma_+$.
فرض کنیم $A \subset X_\circ$ و $\gamma \in \Gamma_-$؛ در نتیجه، $A \supset \gamma A$. در این صورت، داریم

$$A \cap X_\circ \supset \gamma A \cap X_\circ$$

لذا $A \supset \gamma_\circ A$؛ بنابراین $\gamma_\circ \in \Gamma_-$.
فرض کنیم G، $\mu_\circ$ -باز باشد؛ به عبارت دیگر $G_\circ = G \cap X_\circ$. G (μ -) باز و $A \subset X_\circ$ است.
بنابراین، طبق فرض و $G \cap A = G \cap A \cap X_\circ = G_\circ \cap A$ داریم