

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه تبریز  
مجمع فنی مهندسی

دانشکده مکانیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
مهندسی مکانیک- طراحی کاربردی

تحلیل عددی ترک در صفحه محدود از جنس FGM  
به روش MLPG

استاد راهنما: دکتر علیرضا شفیعی

استاد مشاور: دکتر علیرضا فتوحی

پژوهش و نگارش: علی محی الدین



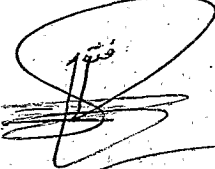
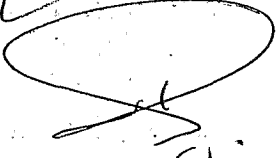
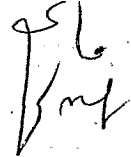

بهمن ۸۶

۱۰۲۰۷۰

مجمع فنی مهندسی  
تبریز

۱۳۸۷ / ۹ / ۲۴

اینجانب وظیفه خود می دانم از همراه ترین یارم و دوست داشتنی ترین دوستم، مادر بزرگوارم که همواره غم و شادی مرا با خود قسمت کرد سپاسگذاری کنم و این رساله را به وی تقدیم نمایم. همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر شفیع که در تمام مراحل انجام پروژه با سعه صدر مرا مورد عنایت قرار دادند و استاد عزیزم جناب آقای دکتر فتوحی به خاطر راهنمایی های بی دریغ ایشان صمیمانه تشکر کنم.

<p>شناسه: ب/اک/۲</p>	<p>صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد</p>	 <p>مدیریت تحصیلات تکمیلی</p>
<p>جلسه دفاعیه پایان نامه تحصیلی آقای / خانم: علی محی الدین رشته/گرایش: مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی تحت عنوان: تحلیل عددی ترک در صفحه محدود از جنس FGM به روش MLPG و تعداد واحد: ۶ در تاریخ ۱۳۸۶/۱۲/۷ با حضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید. پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان نامه با نمره: به عدد ۱۹/۲ به حروف (هز و دو دهم) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.</p>		
<p>امضاء</p>    	<p>نام و نام خانوادگی</p> <p>آقای دکتر علیرضا شفیعی</p> <p>آقای دکتر علیرضا فتوحی</p> <p>آقای دکتر محمود خداداد</p> <p>آقای دکتر محمد فاتحی</p>	<p>عنوان</p> <p>استاد/استادان راهنما:</p> <p>استاد/استادان مشاور:</p> <p>متخصص و صاحب نظر داخلی:</p> <p>متخصص و صاحب نظر خارجی:</p>
<p>نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر) نام و نام خانوادگی: آقای دکتر محمدرضا هادیان امضاء:</p> 		

## چکیده

در این تحقیق، از روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین (MLPG)<sup>1</sup> برای بررسی رفتار ترک در مواد هدفمند<sup>2</sup> استفاده می شود. روش MLPG یکی از روشهای بدون مش واقعی است که براساس فرم ضعیف محلی بوده و برای درونیابی تابع میدان و نیز انتگرال گیری عددی ماتریسهای سیستم نیازی به مش ندارد. در ابتدا روش MLPG برای حل مسایل الاستواستاتیک دو بعدی فرمول بندی می شود. یک برنامه در محیط MATLAB نوشته شده و اعتبار آن با حل یک مثال و مقایسه با پاسخ دقیق بررسی می شود. برای حل مسایل مکانیک شکست الاستیک خطی، چند روش مختلف جهت اصلاح تابع وزن و توابع پایه معرفی و از چند تابع وزن توسعه یافته برای حل این مسایل استفاده می شود. از روش انتگرال  $J$  برای محاسبه ضریب شدت تنش مود اول و دوم در ماده همگن استفاده شده است. برنامه نوشته شده برای تحلیل مسایل مکانیک شکست توسعه داده شده و دقت آن با حل دو مثال بررسی شده است. در ادامه با فرض تغییرات پیوسته و مشتق پذیر خواص ماده ناهمگن، روش انتگرال  $J$  برای محاسبه ضرایب شدت تنش مود اول و دوم در محیط ناهمگن توسعه داده می شود. در پایان با حل چند مثال، تأثیر وجود گرادیان خواص و شدت آن در ماده هدفمند بر روی ضرایب شدت تنش و نرخ رهایی انرژی بررسی می شود.

---

<sup>1</sup> Meshless Local Petrov Galerkin

<sup>2</sup> Functionally Graded Material (FGM)

## فهرست مطالب

۱ مقدمه

- ۱-۱ تاریخچه ..... ۱
- ۲-۱ پژوهش حاضر ..... ۳

## ۲ روش MLPG

- ۱-۲ مقدمه ..... ۵
- ۲-۲ فرمول بندی MLPG ..... ۸
- ۱-۲-۲ تخمین MLS ..... ۸
- ۱-۲-۲ تابع وزن ..... ۱۲
- ۳-۲-۲ فرمول بندی MLPG ..... ۱۳
- ۴-۲-۲ جداسازی فرم ضعیف ..... ۱۵
- ۵-۲-۲ اعمال شرایط مرزی اساسی ..... ۱۷
- ۶-۲-۲ فلوچارت روش MLPG ..... ۱۷
- ۳-۲ بررسی اعتبار کد ..... ۱۹

## ۳ حل مسایل مکانیک شکست الاستیک خطی به روش MLPG

- ۱-۳ مقدمه ..... ۲۲
- ۲-۳ تعیین میدان تنش و جابجایی در اطراف نوک ترک ..... ۲۲
- ۳-۳ توسعه توابع پایه ..... ۲۴
- ۴-۳ اصلاح تابع وزن ..... ۲۵
- ۱-۴-۳ معیار مشاهده ای ..... ۲۵

۲۶.....	۲-۴-۳	معيار انكسار.....
۲۷.....	۳-۴-۳	توابع وزن توسعه یافته.....
۳۰.....	۵-۳	محاسبه ضرایب شدت تنش.....
۳۱.....	۶-۳	محاسبه عددی.....
۳۱.....	۱-۶-۳	نوار ترکدار لبه ای تحت مود اول شکست.....
۳۴.....	۲-۶-۳	نوار ترکدار مرکزی تحت مود اول شکست.....
۳۵.....	۳-۶-۳	صفحه ترکدار مرکزی تحت مود دوم شکست.....

#### ۴ مواد هدفمند

۳۷.....	۱-۴	مقدمه.....
۳۸.....	۲-۴	تعریف مواد هدفمند.....
۴۰.....	۳-۴	کاربردهای مواد هدفمند.....
۴۲.....	۴-۴	تعیین خواص ترمومکانیکی مواد هدفمند.....

#### ۵ تحلیل ترک در مواد هدفمند

۴۶.....	۱-۵	مقدمه.....
۴۷.....	۲-۵	شکست مواد هدفمند.....
۴۹.....	۳-۵	تعیین ضرایب شدت تنش در مواد هدفمند.....
۵۰.....	۱-۳-۵	فرمول بندی انتگرال های $J^*$ .....
۵۲.....	۲-۳-۵	تعیین ضرایب شدت تنش.....
۵۳.....	۴-۵	معيار شکست مواد هدفمند.....
۵۵.....	۵-۵	محاسبه عددی.....
۵۵.....	۱-۵-۵	نوار ترکدار لبه ای تحت تنش کششی یکنواخت.....
۵۷.....	۲-۵-۵	نوار ترکدار لبه ای تحت بارگذاری کرنش ثابت.....

- ۳-۵-۵ نوار ترکدار مرکزی تحت بارگذاری کرنش ثابت ..... ۶۰
- ۴-۵-۵ نوار شامل دو ترک لبه ای موازی تحت تنش کششی یکنواخت ..... ۶۲
- ۵-۵-۵ بررسی تأثیر گرادیان خواص موازی با ترک بر ضریب شدت تنش ..... ۶۴
- ۶-۵-۵ بررسی تأثیر گرادیان خواص عمود بر ترک بر ضریب شدت تنش ..... ۶۸

## ۶ نتایج و پیشنهادات

- ۱-۶ نتایج ..... ۷۱
- ۲-۶ پیشنهادات ..... ۷۴

فهرست منابع و مآخذ ..... ۷۶



## فهرست جداول

- جدول ۱-۳ مقادیر ضریب شدت تنش مود اول به ازای مسیرهای بسته مختلف در نوار شامل ترک لبه ای با فرض  $W = 10$  و  $a = 5$  واحد..... ۳۳
- جدول ۲-۳ ضریب شدت تنش مود اول نرمال  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  در نوار شامل ترک لبه ای به ازای طول های مختلف ترک..... ۳۳
- جدول ۳-۳ ضریب شدت تنش مود اول نرمال  $K_I / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$  در نوار شامل ترک مرکزی به ازای طول های مختلف ترک..... ۳۵
- جدول ۱-۵ ضریب شدت تنش مود اول نرمال ترک لبه ای در نوار تحت تنش کششی یکنواخت..... ۵۹
- جدول ۲-۵ ضریب شدت تنش مود اول نرمال ترک لبه ای در نوار تحت بارگذاری کرنش ثابت..... ۶۰
- جدول ۳-۵ خواص مکانیکی اپوکسی و شیشه..... ۶۴

## فهرست شکل ها

- شکل ۱-۲ تابع تخمین  $u^h(\mathbf{x})$  و پارامترهای گره‌ای  $\mathbf{u}_r$  در تخمین MLS ..... ۱۰
- شکل ۲-۲ دامنه و مرزها در روش MLPG :  $\Omega$  دامنه مسأله،  $\Gamma_u$  مرز اساسی،  $\Gamma_f$  مرز طبیعی،  $\Omega_\rho$  دامنه تربع و محدود به مرز  $\Gamma_\rho$ ،  $\Gamma_{\rho u}$  قسمتی از مرز اساسی که با مرز  $\Omega_\rho$  تلاقی دارد،  $\Gamma_{\rho f}$  قسمتی از مرز طبیعی که با دامنه  $\Omega_\rho$  تلاقی دارد..... ۱۴
- شکل ۳-۲ تیر یک سردگیر با بار برشی سهموی در انتهای آزاد..... ۲۰
- شکل ۴-۲ نمودار جابجایی عمودی صفحه تقارن افقی تیر..... ۲۱
- شکل ۵-۲ توزیع تنش برشی در انتهای گیردار تیر..... ۲۱
- شکل ۱-۳ دامنه تأثیر در روش مشاهده‌ای..... ۲۶
- شکل ۲-۳ دامنه تأثیر در روش انکسار..... ۲۷
- شکل ۳-۳ توابع شکل بدست آمده از توابع وزن توسعه یافته در صفحه ترکدار (الف) : (ب)  $\Phi_1$ ، (پ)  $\Phi_2$ ، (ت)  $\Phi_3$ ..... ۲۹
- شکل ۴-۳ الگوی استفاده از روش انتگرال  $J$ ..... ۳۱
- شکل ۵-۳ نوار ترکدار لبه‌ای تحت مود اول شکست..... ۳۲
- شکل ۶-۳ مسیر انتخابی برای محاسبه انتگرال  $J$ ..... ۳۲
- شکل ۷-۳ نوار ترکدار مرکزی تحت مود اول شکست..... ۳۴
- شکل ۸-۳ صفحه ترکدار مرکزی تحت مود دوم شکست: (الف) هندسه، (ب) شرایط مرزی..... ۳۶
- شکل ۱-۴ گرادیان پیوسته ماده هدفمند از جنس CrNi/PSZ..... ۳۹
- شکل ۲-۴ تغییر پیوسته مدول یانگ در یک نمونه ماده هدفمند..... ۴۰
- شکل ۳-۴ مدل دو بعدی جسم هدفمند..... ۴۴
- شکل ۴-۴ تغییر تابع نسبت حجمی بر حسب ضخامت بدون بعد برای توان‌های مختلف  $n$ ..... ۴۴
- شکل ۵-۴ تغییرات مدول یانگ محاسبه شده توسط دو روش موری-تاناکا و قانون مخلوط‌ها بر حسب ضخامت بدون بعد برای توان‌های مختلف  $n$ ..... ۴۵

- شکل ۵-۱ مدل جسم ترکدار از جنس ماده هدفمند..... ۴۸
- شکل ۵-۲ هندسه و بارگذاری نوار ترکدار لبه ای تحت تنش کششی یکنواخت..... ۵۶
- شکل ۵-۳ تغییر نمایی مدول یانگ در طول صفحه به ازای ثابت های ناهمگنی متفاوت..... ۵۷
- شکل ۵-۴ هندسه و بارگذاری نوار شامل ترک لبه ای تحت بارگذاری کرنش ثابت..... ۵۸
- شکل ۵-۵ هندسه و بارگذاری نوار شامل ترک مرکزی تحت بارگذاری کرنش ثابت..... ۶۱
- شکل ۵-۶ ضریب شدت تنش مود اول نرمال در نوک چپ ترک مرکزی در نوار تحت بارگذاری کرنش ثابت به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی..... ۶۱
- شکل ۵-۷ ضریب شدت تنش مود اول نرمال در نوک راست ترک مرکزی در نوار تحت بارگذاری کرنش ثابت به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی..... ۶۲
- شکل ۵-۸ هندسه و بارگذاری نوار شامل دو ترک لبه ای موازی تحت تنش کششی یکنواخت: الف) مدل کامل نوار ، ب) مدل نصف نوار..... ۶۳
- شکل ۵-۹ لگاریتم نرخ رهایی انرژی بیشینه برحسب فاصله دو ترک به ازای مقادیر مختلف ثابت ناهمگنی..... ۶۳
- شکل ۵-۱۰ هندسه و بارگذاری نوار هدفمند با گرادیان موازی با ترک لبه ای..... ۶۴
- شکل ۵-۱۱ تغییر خطی مدول یانگ و نسبت پواسون در جهت  $x$ ..... ۶۶
- شکل ۵-۱۲ نسبت ضریب شدت تنش به ضریب شدت تنش دو ماده ای بر حسب ضخامت ناحیه گرادیان موازی با ترک برای طول های مختلف ترک..... ۶۶
- شکل ۵-۱۳ نسبت ضریب تنش به ضریب تنش ترک به طول  $\alpha$  بر حسب ضخامت ناحیه گرادیان..... ۶۷
- شکل ۵-۱۴ نسبت ضریب شدت تنش به ضریب شدت تنش ماده همگن بر حسب ضخامت ناحیه گرادیان برای طول های متفاوت ترک..... ۶۷
- شکل ۵-۱۵ هندسه و بارگذاری نوار هدفمند با گرادیان خواص عمود بر ترک لبه ای..... ۶۹
- شکل ۵-۱۶ نسبت نرخ رهایی انرژی بیشینه به نرخ رهایی انرژی بیشینه دو ماده ای بر حسب ضخامت ناحیه گرادیان عمود بر ترک برای موقعیت های مختلف ترک..... ۶۹

شکل ۵-۱۷ تغییر نسبت ضریب تنش ترک به ضریب تنش ترک به طول  $\alpha$  بر حسب ضخامت

ناحیه گرادیان ..... ۷۰

شکل ۵-۱۸ زاویه اولیه رشد ترک بر حسب ضخامت ناحیه گرادیان برای موقعیت های متفاوت

ترک ..... ۷۰

شکل ۶-۱ نمودار افزایش ضریب شدت تنش بر حسب میزان بارگذاری برای دو ترک به طول  $\alpha$

و  $\beta$  ..... ۷۴

# فصل اول

## مقدمه

### ۱-۱ تاریخچه

با توجه به نیاز فناوری های نوین به ویژه در زمینه صنعت هوافضا و میکرو الکترونیک، مهندسان مواد، پیوسته در پی ابداع مواد جدید با خواص بهبود یافته بودند. هدف اصلی تحقیقات آنها تولید انواع کامپوزیت، سرامیک، آلیاژ و پوشش هایی همگن و ایزوتروپ از نظر ماکروسکوپی با ریزساختار کنترل شده و در نتیجه خواص ترمومکانیکی کنترل شده بود. ولی این مواد قابلیت استفاده در برخی کاربردها و شرایط خاص به ویژه دمای بسیار بالا را نداشتند. زیرا دمای بالا موجب خوردگی و خزش در فلزات و آلیاژهای فلزی می شود. از طرف دیگر مقاومت و چقرمگی<sup>۱</sup> پایین همواره از معایب سرامیک بوده اند. لذا پوشش های ضد حرارت جدیدی از جنس سرامیک و کامپوزیت فلز- سرامیک ابداع شدند تا خواص مطلوب هر دو دسته از مواد فوق در کنار یکدیگر را حفظ کنند. با این حال مشکل اکسایش و چقرمگی پایین در کامپوزیت ها هنوز وجود داشت و در محافظ های سرامیکی نیز تنش های مانده و تنش های حرارتی بالا موجب ایجاد ترک و جدا شدن لایه محافظ می شد [۱].

مفهوم ماده هدفمند برای اولین بار به عنوان جایگزین سپرهای حرارتی مرسوم مطرح شد. درصد سرامیک محافظ های هدفمند از صفر درصد در محل اتصال تا صد درصد در سطح محافظ به طور پیوسته تغییر می کند و درصد آن به نحوی تعیین می شود که خواص ترمومکانیکی مورد نیاز را ارضا کند. ناهمگنی این مواد باعث شده است که نه تنها از نظر خواص ترمومکانیکی مانند مدول

---

<sup>۱</sup> Toughness

یانگ و نسبت پواسون ناهمگن باشند بلکه خواص مربوط به استحکام همچون مقاومت تسلیم، چقرمگی شکست، مقاومت خزش و خستگی نیز دارای ناهمگنی باشند [۱].

با اینکه تحقیق اولیه روی ماده هدفمند محدود به کاربردهای آن به عنوان سپر حرارتی بود، استفاده از مواد با خواص فیزیکی درجه بندی شده در صنایع مختلف در حال گسترش روز افزون است. با توجه به جدید بودن این مواد، تحقیق روی آنها با هدف طراحی و ساخت ماده ای با گرادیان خواص مطلوب در دو بعد تحلیلی و تجربی همچنان ادامه دارد. بخش اعظم این تحقیقات مربوط به بررسی تأثیر ناهمگنی بر پارامترهای شکست ماده هدفمند است [۱].

حل مسایل الاستیسیته برای مواد ناهمگن از جمله مواد هدفمند نیازمند روشهای پیشرفته ریاضی است. اگرچه روشهای تحلیلی، پاسخ با فرم بسته را نتیجه می دهند ولی محدود به هندسه ساده و حالت خاصی از ناهمگنی (مانند تغییرات نمایی یا توانی)، شرایط مرزی خاص (مانند تکیه گاه ساده) و بارگذاری ویژه (مانند بارگذاری سینوسی) می باشد. لذا پاسخ بدست آمده، غالباً غیر کاربردی است و استفاده از روش های عددی همچون روش اجزای محدود را اجتناب ناپذیر می کند [۲]. در این روش دامنه مسأله به نواحی کوچکتری به نام جزء تقسیم می شود و پس از تعیین معادلات جبری برای هر جزء، سیستم معادلات جبری برای کل دامنه مسأله با برهم نهی مجموعه معادلات جبری برای همه اجزاء بدست می آید. ولی این روش برای حل برخی مسایل، مناسب نیست. به طور مثال در شبیه سازی رشد ترک نیاز به مش بندی های پی در پی در ناحیه اطراف ترک است که باعث افزایش مدت زمان تحلیل و نیز کاهش دقت محاسبات می شود. همچنین در حل مسایل با تغییر شکل های بزرگ به دلیل اعوجاج المان ها دارای دقت کافی نمی باشد. در اواخر دهه ۱۹۷۰ یک روش عددی بر مبنای جدا سازی گره ای برای حل مسایل مقدار مرزی ابداع شد. ویژگی اصلی این روش عدم نیاز به مش بندی دامنه مسأله و مرزهای آن بود و لذا روش بدون مش<sup>۱</sup> نامگذاری شد [۳].

در روش بدون مش، محدودیت های روش اجزای محدود که مربوط به استفاده از المان بودند برطرف شدند. لذا روش بدون مش روشی بسیار کارآمد در حل مسایل مکانیک شکست به

<sup>۱</sup> Meshfree method

ویژه شکست دینامیکی است. انواع مختلفی از روش‌های بدون مش در دهه اخیر ابداع شده‌اند که ویژگی مشترک تمامی آن‌ها استفاده از یک مجموعه گره مجزا برای تعریف دامنه و مرزهای مسأله است. با این حال، انتگرال‌گیری فرمول‌بندی ضعیف معادله حاکم نیاز به مش پس زمینه بر روی کل دامنه را اجتناب ناپذیر می‌سازد. در سال ۱۹۹۸ یک روش به نام روش بدون مش محلی پتروف-گالرکین (MLPG) ارائه شد که برای انتگرال‌گیری فرم ضعیف نیازی به مش بندی کل دامنه ندارد. از طرف دیگر، شرایط مرزی اساسی<sup>۱</sup> برخلاف سایر روش‌های بدون مش به طور دقیق ارضا می‌شود [۴]. تا کنون، روش MLPG برای حل انواع مختلف مسایل مهندسی مورد استفاده قرار گرفته و کاربرد آن روزبه روز در حال گسترش است. به نظر می‌رسد در آینده ای نزدیک، روش MLPG از اعتبار و معروفیتی در حد روش اجزای محدود برخوردار شده و حتی جایگزین آن خواهد شد.

## ۲-۱ پژوهش حاضر

هدف تحقیق حاضر، بررسی رفتار ترک در مواد هدفمند با استفاده از روش MLPG است. بدین منظور در فصل دوم، تاریخچه‌ای از روش‌های بدون مش و دلایل نیاز برای ابداع این روش‌ها بیان می‌شود. در ادامه، فرمول بندی MLPG در حالت الاستواستاتیک و مفاهیم مطرح در این روش شرح داده شده و در انتها به حل یک مسأله با استفاده از این روش پرداخته می‌شود.

در فصل سوم، روش‌های مختلف اصلاح تابع وزن و توابع پایه در MLPG برای حل مسایل مکانیک شکست خطی ارائه شده و با ذکر دو مثال، دقت روش MLPG در مقایسه با پاسخ دقیق بررسی می‌شود.

در فصل چهارم، تاریخچه استفاده از مواد هدفمند و تحلیل این مواد بیان می‌شود. در ادامه به تعریف دقیق تر ماده هدفمند پرداخته شده و همچنین در مورد کاربردها و نحوه تعیین خواص ترمومکانیکی آن توضیحاتی داده می‌شود.

---

<sup>۱</sup> Essential boundary conditions

در فصل پنجم، روش انتگرال  $J$  برای مواد ناهمگن فرمول بندی شده و در مورد معیار شکست این مواد توضیح داده می شود. سپس با حل برخی از مسایل رایج مکانیک شکست، تأثیر ناهمگنی بر بعضی از پارامترهای شکست بررسی خواهد شد.

در فصل ششم، نتایج بدست آمده از این پژوهش جمع بندی شده و پیشنهاداتی برای ادامه کار ارائه می شود.



# فصل دوم

## روش MLPG

### ۱-۲ مقدمه

اغلب پدیده‌ها در طبیعت می‌توانند به کمک معادلات جبری، دیفرانسیلی و یا انتگرالی بیان شوند. یافتن مدل ریاضی حاکم بر یک فرایند فیزیکی در برخی از موارد نیازمند انجام محاسبات حجیم و بسیار پیچیده است که دستیابی به پاسخ به فرم بسته را دشوار و گاهی غیر ممکن می‌سازد. به طور مثال، گستره وسیعی از سیستم‌های مهندسی توسط معادلات دیفرانسیل پاره‌ای قابل بیان هستند که حل این معادلات محدود به شرایط خاص و استفاده از فرضیات متعدد می‌باشد. لذا تلاش‌های بسیاری در نیم قرن اخیر برای ابداع روش‌های حل عددی صورت گرفته است تا بتوان معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را با معادلات جبری-خطی قابل حل تقریب زد.

در نیم قرن اخیر، روش اجزای محدود به عنوان یک روش کارآمد در حل مسایل مکانیک جامدات مورد استفاده فراوان قرار گرفته است. ولی این روش دارای معایبی است که از این بین می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۵]:

- ۱- بیشترین زمان تحلیل را صرف ایجاد مش می‌کنند. به ویژه در مسایل مکانیک شکست نیاز به مش بندی ریز در اطراف ترک دارند که باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود.
- ۲- میدان تنش بدست آمده در محل اتصال المان‌ها ناپیوسته و دارای دقت کمی است.
- ۳- در شبیه سازی فرایندهای تولید مانند اکستروژن و فرجینگ به دلیل اعوجاج و تغییر شکل‌های بزرگ المان‌ها از دقت کافی برخوردار نیستند.
- ۴- شبیه‌سازی رشد ترک نیازمند اصلاح پی در پی مش بندی است که افزایش زمان محاسبات و کاهش دقت را به دنبال خواهد داشت.

۵- به دلیل قفل شدن المان ها در حل مسایل شامل مواد تقریباً تراکم ناپذیر ( $\nu \approx 0/5$ ) قابل استفاده نیستند.

۶- برای حل مسایل شامل مواد ناهمگن نیاز به افزایش تعداد المان ها دارند.

در دو دهه اخیر یک روش عددی جدید و مؤثر بر مبنای جدا سازی گره ای برای حل مسایل مقدار مرزی تا حد قابل توجهی جایگزین روش اجزای محدود شده است. ویژگی بارز این روش آن است که دامنه مسأله و مرزهای آن با استفاده از یک مجموعه گره با توزیع پراکنده معرفی می شوند. این گره ها بوجود آورنده مش نیستند و تنها برای درونیابی تابع متغیرهای میدان از آنها استفاده می شود. لذا هیچ نیازی به ایجاد ارتباط و اتصال گره ها برای تخمین تابع میدان نیست. لذا این روش، روش بدون مش<sup>۱</sup> نامگذاری شده است. بنا براین برخلاف روش اجزای محدود نه تنها عمل مش بندی انجام نمی گیرد بلکه به جای مش بندی های مکرر می توان گره های مورد نظر را حذف یا اضافه نمود [۳].

انواع مختلفی از روشهای بدون مش در سالهای اخیر ابداع شده اند که از این بین می توان به روش بدون المان گالرکین<sup>۲</sup>، روش باهم گذاری<sup>۳</sup> و روش ابرهای اچ پی<sup>۴</sup> اشاره کرد. تمام روشهای بدون مش یک ویژگی مشترک دارند: برای تقریب متغیرهای میدان فقط به گره احتیاج دارند. تفاوت اساسی این روشها در نحوه درونیابی متغیرهای میدان است. الگوریتم های درونیابی مورد استفاده در روشهای بدون مش به طور کلی عبارتند از الگوریتم های کرنل<sup>۵</sup>، حداقل مربعات متحرک (MLS)<sup>۶</sup> و جزء واحد<sup>۷</sup> [۵].

<sup>۱</sup> Meshfree method

<sup>۲</sup> Element Free Galerkin Method (EFG)

<sup>۳</sup> Collocation

<sup>۴</sup> Hp-clouds

<sup>۵</sup> Kernel

<sup>۶</sup> Moving Least Square

<sup>۷</sup> Partition of unity

هرچند روش‌های بدون مش در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند ولی شروع استفاده از این روش‌ها به اواخر دهه ۱۹۷۰ بر می‌گردد. لوسی<sup>۱</sup> [۶] روش SPH<sup>۲</sup> را برای شبیه‌سازی پدیده‌های نجومی بکار برد. نایرولس<sup>۳</sup> و همکارانش [۷] شاخه دیگری از روش‌های بدون مش را تحت نام DEM<sup>۴</sup> بر پایه تخمین MLS ارائه دادند. بلیچکو<sup>۵</sup> و همکارانش [۸] این روش را بهبود بخشیدند و روش EFG را توسعه دادند. دوارت و آدن<sup>۶</sup> [۹] و بابوسکا و ملنک<sup>۷</sup> [۱۰] به ترتیب روش‌های ابرهای اچ پی و PUFEM<sup>۸</sup> را ارائه کردند.

روش‌های بدون مش مذکور از مش پس‌زمینه برای انتگرال‌گیری فرمول‌بندی ضعیف گالرکین بر روی کل دامنه مسأله استفاده می‌کنند. نیاز به مش پس‌زمینه برای انتگرال‌گیری بدین مفهوم است که این روش‌ها، روش‌های بدون مش واقعی نیستند. اتلوری و ژو<sup>۹</sup> [۴] بدون مش MLPG را ارائه دادند که برای درونیابی متغیرهای میدان و برای انتگرال‌گیری فرم ضعیف معادلات نیاز به ایجاد یک مش مشخص بر روی کل دامنه ندارد. لذا روش MLPG بیش از سایر روش‌های فاقد مش مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. این روش بر اساس فرم ضعیف متقارن محلی بوده و از تقریب MLS برای تخمین تابع میدان استفاده می‌کند. فرمول‌بندی ضعیف در این روش روی یک زیر ناحیه با شکل منظم انجام می‌گیرد که غالباً در مسایل دو بعدی، دایره و یا مستطیل و در مسایل سه بعدی، کره و یا مکعب مستطیل در نظر گرفته می‌شود.

دقت و همگرایی روش MLPG با حل مسایل مختلف الاستواستاتیک توسط اتلوری و ژو بررسی شده است. نتایج نشان داده‌اند که این روش در مورد مواد تقریباً صلب نیز از دقت بالایی

---

<sup>۱</sup> Lucy

<sup>۲</sup> Smooth particle hydrodynamics

<sup>۳</sup> Nayroless

<sup>۴</sup> Diffuse Element Method

<sup>۵</sup> Belytschko

<sup>۶</sup> Duarte and Oden

<sup>۷</sup> Babuska and Melenk

<sup>۸</sup> Partition of Unity Finite Element Method

<sup>۹</sup> Atluri and Zhu

برخوردار است. چینگ و باترا<sup>۱</sup> [۱۱] از توابع چندجمله ای توسعه یافته برای حل مسایل مکانیک شکست استفاده نمودند و مقادیر دقیقی برای ضرایب شدت تنش بدست آوردند. ژو و لیو<sup>۲</sup> [۱۲] از روش MLPG برای بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر استفاده کردند. لانگ<sup>۳</sup> و اتلوری [۱۳] حل MLPG را برای مسأله خمش ورق نازک ارایه دادند. اتلوری و شن<sup>۴</sup> [۱۴] تأثیر انواع توابع امتحان<sup>۵</sup> و آزمایشی<sup>۶</sup> را بر دقت روش MLPG بررسی کردند و با حل مثال های عددی نشان دادند برخی از توابع امتحان و آزمایشی همگرایی بهتری را نسبت به روش اجزای محدود و اجزای مرزی نتیجه می دهند.

## ۲-۲ فرمول بندی MLPG

در این بخش، روش تخمین MLS و فرمول بندی ضعیف که اساس روش MLPG است شرح داده می شود [۴].

### ۱-۲-۲ تخمین MLS

تخمین MLS که در ابتدا توسط ریاضیدانان برای انطباق منحنی و سطوح در میان داده های تصادفی ابداع شد یکی از روش های پرکاربرد برای ساخت توابع شکل در روش های بدون مش است. این روش دارای دو مشخصه اصلی است که کاربرد آن را وسیع ساخته است:

- ۱- تابع میدان تخمین زده شده در این روش در کل دامنه مسأله پیوسته و هموار است.
- ۲- این روش قابلیت تولید تابع تخمین با درجه ثبات دلخواه را دارد.

<sup>۱</sup> Ching and Batra

<sup>۲</sup> Gu and Liu

<sup>۳</sup> Long

<sup>۴</sup> Shen

<sup>۵</sup> Test function

<sup>۶</sup> Trial function