دانشگاه صنعتی شیراز

دانشکده علوم، گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی گرایش تحقیق در عملیات

حل مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی با رهیافت مجموعه پایدار بیشینه

نگارش:

افشین بصیری

استاد راهنما:

دکتر سید مصطفی خرمی زاده

استاد مشاور:

دکتر مرتضی کاظمی

آبان‌ماه ۱۳۹۲

تقدیم به:

پدربزرگم و پدرم

که راه را به من نشان دادند

و

مادربزرگم و مادرم

که چگون رفتن را به من آموختند

سپاس گزاری...

به نام خداوند لایزال مطلق که تمام جهان به فرمان او در تکاپو، تپش و جوش و خروشند، او را می‌جویند و در دربار کبریایش سر تعظیم فرو می‌آورند. شکر آن ایزد متعال که با تمام مشکلات و حوادث، توانایی به پایان رساندن این پایان‌نامه را به من عطا کرد و با سپاس و تشکر از استاد راهنمای محترم و ارجمند جناب آقای دکتر سید مصطفی خرمی‌زاده که با تلاش فراوان، صبر و تقوا در فراز و نشیبهای این مسیر طولانی راهنمای راهم بودند. در پایان بوسه می‌زنم بر دستان پدربزرگم، پدرم، مادربزرگم و مادرم و تمام کسانی که در طول دوران تحصیل زمینه رشد و ترقی را برای حقیر فراهم آوردند.

چکیده

حل مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی با رهیافت مجموعه پایدار بیشینه

نگارش:
افشین بصیری

در این پایان‌نامه ابتدا مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی را به صورت یک مساله بسته‌بندی مجموعه همراه با قیود حاشیه‌ای مدل‌بندی می‌کنیم. بدین منظور سعی می‌کنیم برخی محدودیت‌های مساله را با محدودیت‌هایی معادل که به شکل محدودیت‌های مساله بسته‌بندی مجموعه‌ای می‌باشند، جایگزین کنیم. سپس خانواده‌هایی از صفحات برش را برای این مساله شرح داده و معتبر بودن این برش‌ها برای مساله اصلی را مورد بررسی قرار می دهیم. پس از آن با استفاده از برش‌های بدست آمده مدل‌بندی جدیدی برای مساله بدست می‌آوریم. در پایان به بررسی نتایج عددی پرداخته و با اعمال روش‌های معرفی شده بر روی مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاه صنعتی شیراز، آن‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

عنوان صفحه

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

فصل ۱

مقدمه

۱−۱ مقدمه

مسایل برنامه‌ریزی صحیح چارچوبی کلی برای مدل‌بندی دسته وسیعی از مسایل با کاربردهای علمی و عملی می‌باشند. زمان‌بندی پروژه، مکان‌یابی انبار و بودجه‌بندی سرمایه نمونه‌هایی از کاربرد مسایل فوق می‌باشند [۱۰]. تاکنون الگوریتم‌های کارای بسیاری برای حل این دسته از مسایل ارایه شده است؛ از جمله روش شاخه و کران [۲۵]، روش صفحات برشی [۴، ۱۹]، روش شاخه و برش [۲۱] و روش‌های ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک، الگوریتم جستجوی ممنوعه ، الگوریتم مورچگان و ... [۲۶، ۳۰، ۳۳]. به دلیل این‌که مساله برنامه‌ریزی صحیح متناظر با نمونه مورد مطالعه، با استفاده از روش‌های دقیق قابل محاسبه است؛ لذا از بین تمامی روش‌های حل، روش شاخه و برش مورد توجه این پایان‌نامه است.

۱−۲ مساله جدول زمان‌بندی

در این بخش، ابتدا تعریفی از مساله جدول زمان‌بندی را ارایه می‌کنیم و بر اساس آن مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی را تعریف و به شرح آن می‌پردازیم. در ادامه نیز تاریخچه‌ای مختصر از روش‌های گوناگونی که تاکنون برای حل مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی ارایه شده‌اند، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱: (مساله جدول زمان‌بندی) یک مجموعه از فعالیت‌ها که به یک میزان مشخص از منابع نیاز دارد و در مورد گروهی از مردم و برای یک دوره زمانی متناهی می‌باشد، مساله جدول

زمان‌بندی نامیده می‌شود.

از نظر عملی می‌توان به کاربرد مسایل جدول زمان‌بندی در زمینه‌های مختلفی هم‌چون آموزش، ورزش، حمل و نقل و غیره اشاره کرد. در این پایان‌نامه توجه ما معطوف بر کاربرد مساله جدول زمان‌بندی در زمینه آموزش عالی، یعنی **مسایل جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی** است. هدف اصلی در مسایل جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی، یافتن یک جدول زمان‌بندی (یک تخصیص امکان‌پذیر از دروس به اتاق‌ها) است، به طوری که مقررات سازمانی و آموزشی دانشگاه مورد نظر را برآورده سازد. در اغلب موارد می‌توان مقررات سازمانی و یا آموزشی دانشگاه مورد نظر را به دو دسته **محدودیت‌های سخت** و **محدودیت‌های نرم** افراز کرد. در این صورت با استفاده از این رهیافت، مسایل جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی تبدیل به یک مساله بهینه‌سازی (برنامه‌ریزی خطی) می‌شوند. در حقیقت، هدف مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی با استفاده از مدل‌بندی رهیافت فوق، این است که جدول زمان‌بندی حاصل تمامی محدودیت‌های سخت را برآورده سازد و میزان نقض محدودیت‌های نرم را کمینه کند. در فصل ۴ به طور کامل به شرح محدودیت‌های سخت و محدودیت‌های نرم می‌پردازیم.

تا اواسط دهه ۹۰ میلادی، الگوریتم‌های حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح در عمل برای حل مسایل با اندازه بسیار بزرگ کارایی نداشتند [۱۱]. مدل‌های برنامه‌ریزی خطی (برنامه‌ریزی صحیح) با نرم‌افزارهای موجود برای مسایل جهان واقعی کارگشا نبودند و تنها مثال‌های کوچک و مصنوعی نتیجه خوب این روش‌ها بودند. در سال ۱۹۵۸ برای اولین بار گومری[۱] روش صفحات برشی را برای حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح ارایه و این روش را برای حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح ۱−۰ تعمیم داد [۱۹]. در همین دهه و پس از گمری به دلیل ارایه الگوریتم‌های کارا و موثر در حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح و رشد علمی و عملی در زمینه رایانه (چه در عرصه

[۱] Gomory

سخت‌افزار و چه در عرصه نرم‌افزار) مسایل جدول زمان‌بندی نیز به خاطر اهمیت عملی بسیار زیاد، مورد توجه قرار گرفتند و روش‌های زیادی برای حل آن‌ها ارایه شد. از نظر پیچیدگی، بارردادیم[۱] مساله زمان‌بندی را مورد بررسی قرار داد [۳]. پس از او دی ورا[۲] و همکاران، ثابت کردند که مساله جدول زمان‌بندی، در رده مسایل NPـسخت است [۱۳]. در سال ۱۹۸۴، ترپیاتی[۳] یک فرمول‌بندی از نوع برنامه‌ریزی صحیح از مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی معرفی و آن را با روش سست‌سازی لاگرانژی حل کرد [۳۴]. در سال ۱۹۹۷، بیرباس[۴] و همکاران، یک فرمول‌بندی از مساله جدول زمان‌بندی ارایه و آن را با برخی بسته‌های نرم‌افزاری تجاری[۵] حل کردند [۷]. هالتبرگا[۶]، مساله جدول زمان‌بندی را به عنوان یک حالت خاص از مساله حمل و نقل با هزینه ثابت[۷]، فرمول بندی و آن را با روش شاخه و کران حل کرد [۲۲]. در بسیاری موارد، مسایل جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی که در عمل با آن‌ها مواجه می‌شویم، بسیار سخت هستند و تنها می‌توان آن‌ها را با روش های ابتکاری[۸] حل نمود. آبرامسون[۹]، این مساله را با روش شبیه سازی حرارتی حل کرد [۱]. لوپزگارسیا[۱۰] و همکاران، روش جستجوی ممنوعه را بدین منظور مورد بررسی قرار دادند [۲۶]. در سال ۱۹۹۶، پاچر[۱۱]، روش الگوریتم ژنتیک را

[۱] Bardadym

[۲] De Werra

[۳] Tripathy

[۴] Birbas

[۵] Commercial Packages

[۶] Hultberga

[۷] Fixed Charge Transportation Problem

[۸] Heuristic Algorithms

[۹] Abramson

[۱۰] Lopez Garcia

[۱۱] Paechter

برای حل این مساله مورد بررسی قرار داد [۳۰]. در سال ۲۰۰۲ سوچا[۱] و همکاران، این مساله را با الگوریتم مورچگان حل کردند [۳۳]. در سال ۲۰۰۵، برای اولین بار آولا[۲] و واسیلف[۳]، با استفاده از مفهوم مجموعه پایدار بیشینه، یک مدل با قیود حاشیه‌ای برای مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی را ارایه و سپس نتایج عددی مربوط به آن را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [۲].

همان‌گونه که در قبل اشاره شد، یکی از روش‌هایی که در زمینه حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است، روش شاخه و برش می‌باشد؛ این امر به دلیل رشد و پیشرفت‌هایی که در زمینه نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، خصوصا در عرصه برنامه‌نویسی صورت گرفته است، انجام شد. پس از آن بسیاری از نرم‌افزارهای حل مسایل برنامه‌ریزی صحیح مانند ایکسپرس [۱۶] و سیپلکس [۲۳] متکی به روش شاخه و برش طراحی شده‌اند.

۱–۳ مطالب پایان‌نامه

این پایان‌نامه در شش فصل تنظیم شده است. در فصل اول، مقدمه‌ای از مسایل برنامه‌ریزی صحیح ارایه و اشاره‌ای کوتاه به مساله جدول زمان‌بندی شده است. در فصل دوم، به ارایه مفاهیم، مطالب پیش‌نیاز و تعاریف اولیه مورد نیاز مانند برخی از تعاریف مبحث نظریه گراف، نظریه چندوجهی و آنالیز محدب می‌پردازیم. همچنین در این فصل، مساله برنامه‌ریزی خطی و مساله برنامه‌ریزی صحیح را به طور جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. فصل سوم با عنوان مجموعه پایدار بیشینه و نامساوی‌های دسته‌ای، به بیان حالت دیگری از مسایل برنامه‌ریزی صحیح ۱–۰ می‌پردازیم و ارتباط بین یک مساله برنامه‌ریزی صحیح و مساله مجموعه پایدار

[۱] Socha

[۲] Avella

[۳] Vasilev

بیشینه را بیان می‌کنیم؛ همچنین در این فصل، نامساوی‌های دسته‌ای در یک گراف را تعریف و قضیه‌ای مهم در رابطه با آن شرح داده می‌شود. در فصل چهارم، مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی را به طور کامل تعریف و با استفاده از رهیافت جریمه و رهیافت محدودیت‌های نرم، آن را در قالب چندین مساله برنامه‌ریزی صحیح ۱−۰ مدل‌بندی می‌کنیم. در این فصل ابتدا ارتباط مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی و مساله بسته‌بندی مجموعه را شرح می‌دهیم؛ سپس با استفاده از این ارتباط، خانواده‌ای از نامساوی‌های معتبر برای مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاهی را به دست می‌آوریم. در انتها نیز برخی از صفحات برشی برای مدل‌بندی جدید معرفی می‌کنیم. در فصل پنجم، مطالعه موردی از مساله جدول زمان‌بندی دروس دانشگاه صنعتی شیراز را بیان می‌کنیم و به بررسی و تحلیل نتایج عددی حاصل از حل آن می‌پردازیم. فصل آخر به نتیجه‌گیری و پیشنهادها اختصاص دارد.

فصل ۲

پیش‌نیازها و مفاهیم مرتبط

۲-۱ مقدمه

این فصل، به معرفی برخی تعاریف و نمادهای مقدماتی در نظریه گراف، نظریه چندوجهی‌ها و ارتباط آن با مسائل برنامه‌ریزی خطی و مسائل برنامه‌ریزی صحیح و مفاهیم وابسته به آن‌ها که در فصل‌های بعدی با آن‌ها مواجه می‌شویم، اختصاص دارد. در این فصل، در بخش ۲-۲ برخی از اصطلاحات و مفاهیم کلیدی مورد نیاز در مبحث نظریه گراف را معرفی می‌کنیم. در بخش ۲-۳ برخی تعاریف نظریه چندوجهی‌ها و مفاهیم مورد نیاز در آنالیز محدب بیان می‌شود. سپس در بخش‌های ۲-۴ و ۲-۵ به معرفی مدل مسائل برنامه‌ریزی خطی و مدل مسائل برنامه‌ریزی صحیح می‌پردازیم و با اشاره به بیان مفاهیم کلیدی و ارایه مثالی از آن‌ها، ویژگی‌های هر یک را به اختصار شرح می‌دهیم.

۲-۲ گراف‌ها

در این بخش تعاریفی چند در زمینه نظریه گراف را بیان می‌کنیم. به دلیل تنوع اصطلاحات و تعاریف در این نظریه، تنها به بیان آن دسته از مفاهیم کلیدی که در این پایان‌نامه با آن سروکار داریم، پرداخته می‌شود. [۱۵، ۱۷].

تعریف ۲.۱: (گراف ساده) گراف G یک جفت مرتب (V, E) است که در آن V یک مجموعه متناهی و مخالف تهی از گره‌ها[۱] (رئوس)، و E یک مجموعه متناهی (در صورت امکان تهی) از

[۱] Nodes

یال‌ها[۱]ست؛ همچنین گراف ساده را با نماد $G(V,E)$ نمایش می‌دهیم. در ادامه، هر یال بین دو گره دلخواه u و v را به صورت uv و یا e_i نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $uv = vu$؛ همچنین گراف $G(V,E)$ را به اختصار با نماد G نشان می‌هیم.

تعریف ۲.۲: (مرتبه گراف) به اندازه (عدد اصلی) مجموعه گره V در گراف $G(V,E)$، **مرتبه**[۲] گراف G گوییم. مرتبه گراف G را با نماد $|G|$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲: (گراف مکمل) گراف $\bar{G}$ را **گراف مکمل**[۳] G گوییم، هرگاه شامل گره‌های گراف G باشد و تنها شامل یال‌هایی باشد که در مجموعه یال‌های گراف G وجود ندارند.

تعریف ۴.۲: (گراف وزن‌دار) اگر تابع وزن $c : V \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان تعریف شده باشد که به ازای هر گره $v \in V$، وزن v_c را به آن نسبت دهد، آن‌گاه می‌گوییم که گراف G، یک گراف **وزن‌دار**[۴] است و آن را با نماد $G_c(V,E)$ یا $G(V,E,c)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲: (مجاورت) دو گره $u, v \in V$ از گراف G را **مجاور**[۵] و یا همسایه نامیده می‌شوند، هرگاه uv یک یال از گراف G باشد؛ به عبارت دیگر، $uv \in E$.

مجموعه گره‌های $W \subseteq V$ را در نظر بگیرید. مجموعه همه راس‌هایی که مجاور با حداقل یکی از راس‌های مجموعه W هستند، همسایگی W نامیده می‌شود و آن را با نماد $\Gamma(W)$ نشان می‌دهیم؛ همچنین فرض می‌کنیم که $v \notin \Gamma(v)$.

تعریف ۶.۲: (درجه) به ازای هر گره $v \in V$، **درجه**[۶] وابسته به آن را با نماد $\delta(v)$ نمایش

[۱] Edges
[۲] Order
[۳] Complement
[۴] Node-Weighted Graph
[۵] Adjacent
[۶] Degree

می‌دهیم و عبارت است از تعداد یال‌هایی از گراف G که از گره v می‌گذرند. به عبارت دیگر، تعداد گره‌های مجاور با گره v را درجه گره v گوییم، که برابر با $|\Gamma(v)|$ است.

تذکر ۷.۲: اگر گره v در گراف G، دارای درجه صفر باشد ($\Gamma(v) = \circ$)، آن گره را، گره تنها [۱] می‌گوییم.

تعریف ۸.۲: (گراف کامل) گراف $G(V, E)$ را **کامل** [۲] گوییم، هرگاه بین هر دو راس آن یک یال باشد. گراف کامل n راسی را با نماد K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲: (زیرگراف) فرض کنید که $G(V, E)$ و $H(W, F)$ دو گراف دلخواه باشند. گراف H را **زیرگراف** [۳] گراف G گوییم هرگاه $W \subseteq V$ و $F \subseteq E$، و آن را با نماد $H \subseteq G$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲: (گشت، پیگرد، مدار) فرض کنید که u و v دو گره متمایز در گراف G باشند. هر **گشت** [۴] از گره u به گره v، یک دنباله متناوب متناهی مانند

$$W = \{u = u_\circ, e_۱, u_۲, e_۲, \dots, u_{k-۱}, e_k, u_k = v\}$$

از تعدادی گره و یال متعلق به G است، به طوری که از گره u آغاز و به گره v ختم می‌شود. حال اگر در یک گشت از گره u به گره v، هیچ یالی تکرار نشود، این گشت را یک **پیگرد** [۵] از گره u به گره v گوییم. حال اگر یک پیگرد از گره v به گره v باشد، آن را **مدار** [۶] می‌گوییم. تعداد یال‌های پیموده شده در یک مدار را طول آن مدار گوییم.

تعریف ۱۱.۲: (گراف همبند) در گراف G، گره v را متصل به گره u گوییم، هرگاه پیگردی از

---

[۱] Isolated

[۲] Complete

[۳] Subgraph

[۴] Walk

[۵] Trail

[۶] Circuit

گره u به گره v موجود باشد. حال اگر هر جفت گره دلخواه از گراف G متصل به یکدیگر باشند، در این صورت گراف را **همبند**[۱] و در غیر این صورت گراف را ناهمبند گوییم.

تعریف ۱۲.۲: (گراف دوبخشی) گراف $G(V, E)$ را **دوبخشی**[۲] گوییم، هرگاه بتوان مجموعه گره V را به دو زیرمجموعه $V_۱$ و $V_۲$ چنان افراز کرد که $V_۱ \cup V_۲ = V$، $V_۱ \cap V_۲ = \varnothing$ و هر یال G به صورت uv باشد که در آن $u \in V_۱$ و $v \in V_۲$.

قضیه ۱۳.۲: گراف G را دوبخشی گوییم اگر و فقط اگر، شامل هیچ مداری با طول فرد نباشد.

اثبات: برای اثبات به [۲۴] مراجعه شود. $\square$

۲-۳ نظریه چندوجهی

در این بخش، در ابتدا برخی از مفاهیم و تعاریف آنالیز محدب و جبرخطی را معرفی می‌کنیم و سپس به بیان برخی از تعاریف و قضایای نظریه چندوجهی می‌پردازیم [۸، ۲۰، ۳۲].

۲-۳-۱ آنالیز محدب

بر این اساس، به بیان مفاهیم ترکیب خطی، ترکیب خطی آفین، ترکیب خطی محدب و رتبه آفین در یک فضای برداری، و همچنین پوسته محدب و دیگر مفاهیم نظریه چندوجهی می‌پردازیم.

تعریف ۱۴.۲: (ترکیب خطی) فرض کنید که $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، بردارهایی متعلق به فضای برداری $\mathbb{R}^d$ باشند. یک **ترکیب خطی**[۳] از بردارهای $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$، برداری به صورت

$$\lambda_۱ x_۱ \ + \ \lambda_۲ x_۲ \ + \ \ldots \ + \ \lambda_n x_n \in \mathbb{R}^d$$

[۱] Connected

[۲] Bipartite

[۳] Linear Combination