دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض ، گرایش جبر

عنوان

نگاشت‌های میان مشبکه‌های مدولی

استادان راهنما

دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده و دکتر مریم داودیان

پژوهشگر

مهری خواجه

۱۳۹۴

تقدیم به همسر و

فرزند دلبندم سوگند

سرآغاز گفتار نام خداست
که رحمتگر و مهربان خلق راست[1]

به نام او که وجود ما به عنایت او است و سجود ما به هدایت او. به نام او که صلاح ما به ولایت او، و فلاح ما به رعایت او، به نام او که حیات ما به نعمت او و نجات ما به رحمت او. به نام او زبان‌ها گویا شده، به نام او جان‌ها شیدا شده، بیگانه آشنا شده، زشتها زیبا شده، و کارها هویدا شده، راه‌ها پیدا شده، به نام او چشم مشتاقان گریان، دل‌های عارفان سوزان، سرهای والهان خروشان، تنهای عاشقان بی‌جان.

ای خداوندی که در الاهیت یکتایی، و در احدیت بی‌همتایی، در ذات و در صفات از خلق جدایی، متصف به علائی، متحد به کبریائی، مایه‌ی هر بینوایی، پناه هر گدائی، همه را خدائی، تا دوست کرائی!

الهی: عاجز سرگردانم، نه آنچه دارم دانم، و نه آنچه دانم دارم.

---

[1] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری.

سپاس گزاری...

با تشکر از افرادی که در راستای کسب علم و ادب مرا یاری کردند. از اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر امیدعلی کرم‌زاده و سرکار خانم دکتر مریم داودیان صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از تمامی اساتید مهربانم که در تمامی طول تحصیل با کمک‌های بی شائبه‌ی خود مرا مورد لطف و عنایت قرار داده‌اند صمیمانه سپاس‌گذاری می‌کنم. همچنین از سرکار خانم خورشیدی به خاطر مساعدت و یاری در تایپ این مجموعه صمیمانه تشکر می‌کنم. از همسر فداکارم که در تمامی طول تحصیل مرا مورد حمایت خود قرار داد، قدردانی می‌کنم. در پایان از پدر و مادر عزیزم به خاطر محبت‌های بی انتهای ایشان کمال تشکر و سپاس‌گذاری را دارم و بر دستانشان بوسه می‌زنم.

مهری خواجه

۱۳۹۴

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

پیش‌گفتار

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول تعاریف و قضایای اولیه و مفاهیم مورد نیاز پایان‌نامه را بیان و برخی از آن‌ها را نشان می‌دهیم. در بخش ۵ فصل اول به بررسی دامنه‌های پروفر نوتری که همان دامنه‌های ددکیند هستند و اثبات برخی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. در بخش ۶ این فصل به بررسی حلقه‌های منظم فون‌نیومان و هافیان پرداخته و نشان می‌دهیم که هر مدول نوتری هافی می‌باشد. بخش ۷ به بررسی مدول‌های زنجیری و تک‌زنجیری و اثبات برخی از ویژگی‌های آن‌ها اختصاص دارد و در بخش ۸ به بررسی مدول‌های ضربی می‌پردازیم و یادآوری می‌کنیم هر مدول دوری ضربی می‌باشد. سرانجام در بخش آخر فصل اول به مدول‌ها با بُعدِ کرول خواهیم پرداخت.

در فصل دوم ابتدا به طور مختصر به تعریف و معرفی مجموعه‌های مرتب می‌پردازیم و سپس مفهوم مشبکه، نیم‌مشبکه و زیرمشبکه را بیان کرده و به بررسی خواص آن‌ها می‌پردازیم و در این ارتباط قضایایی را نیز نشان می‌دهیم. در بخش آخر فصل دوم به معرفی مشبکه‌های توزیع‌پذیر پرداخته‌ایم.

قسمت اصلی پایان‌نامه در فصل سوم گنجانده شده است، که در این فصل به معرفی دو نگاشت λ و μ پرداخته و نشان می‌دهیم که نگاشت λ یک یکریختی مشبکه‌ای است تنها وقتی‌که مدول M یک مدول ضربی وفادار متناهی‌مولد باشد و نشان می‌دهیم زیرمدول‌های

یک λـ مدول لزوماً λـ مدول نمی‌باشند. در ادامه به بررسی نگاشت μ پرداخته و نشان می‌دهیم که تصویر همریخت هر μـ مدول، μـ مدول می‌باشد.

فصل ۱

مفاهیم بنیادی از نظریه‌ی حلقه‌ها و مدول‌ها

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این بخش تعاریف و مفاهیم مورد نیاز پایان‌نامه را معرفی و بعضی از قضایای ضروری را بیان می‌کنیم. در فصل سوم این پایان‌نامه حلقه‌ها تعویض‌پذیر یکدار و مدول‌ها چپ می‌باشند.

تذکر ۱.۱.۱. *حلقه‌های یکداری R و عناصر $a, b \in R$ وجود دارند به‌طوری که $ab = 1$ ولی $ba \neq 1$. البته در حلقه‌های تعویض‌پذیر، مثل حلقه‌های ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌هایی در یک میدان و همچنین حلقه‌هایی مانند حلقه‌های نوتری و حلقه‌های متناهی این وضع پیش نمی‌آید.*

تعریف ۲.۱.۱. حلقه‌ی یکدار R را ددکیند متناهی گوییم هرگاه؛ $ab = 1$ نتیجه شود $ba = 1$.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه‌ی یکدار R را یک حلقه‌ی بخشی یا تقسیم گوییم، هرگاه هر عضو ناصفر R معکوس‌پذیر باشد. به عبارت دیگر اگر $U(R) = R/\{0\}$، مجموعه‌ی عناصر معکوس‌پذیر حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه R را یک حلقه‌ی بخشی یا **حلقه‌ی تقسیم** می‌نامند.

مثال ۴.۱.۱. حلقه‌ی چهارگان‌ها یک حلقه‌ی تقسیم است؛ زیرا اگر $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ یک چهارگان مخالف صفر باشد، در این صورت $\alpha = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq o$، چون α یک عدد حقیقی است لذا $a_0/\alpha - (a_1/\alpha)i - (a_2/\alpha)j - (a_3/\alpha)k$ یک چهارگان مخالف صفر است و نیز $(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)((a_0/\alpha) - (a_1/\alpha)i - (a_2/\alpha)j - (a_3/\alpha)k) = 1$ بنابراین هر عضو مخالف صفر حلقه‌ی چهارگان‌ها دارای وارون است.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه‌ی تعویض‌پذیر $(F, +, .)$ را یک **هیأت (میدان)** می‌نامیم، هرگاه $(F/\{0\}, .)$ یک گروه باشد. عضو بی‌اثر این گروه را با ۱ نمایش داده و آن‌را یکه‌ی هیأت می‌نامیم. پس در واقع یک هیأت، یک حلقه‌ی تقسیم جابجائی است. از این تعریف نتیجه می‌شود که هر هیأت حداقل شامل یک عضو مخالف صفر است.

مثال ۶.۱.۱. هر یک از ساختمان‌های $(\mathbb{R}, +, .)$ ، $(\mathbb{Q}, +, .)$ یک هیأت می‌باشند که در آن + و . جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی هستند.

تعریف ۷.۱.۱. دامنه‌ی تعویض‌پذیری که هر ایدآل آن اصلی باشد را حوزه‌ی ایدآل‌های اصلی گوییم و آن‌را با نماد PID نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و M مجموعه‌ای ناتهی، M را همراه عمل $+ : M \times M \longrightarrow M$ و ضرب اسکالر $. : M \times R \longrightarrow M$ یک Rـ **مدول راست** می‌نامیم، هرگاه $(M, +)$ گروه آبلی باشد و به ازای هر دو عضو از M مانند x و y و هر دو عضو از R مانند r و s؛

۱) $(x + y)r = xr + yr$ ؛

۲) $x(r + s) = xr + xs$ ؛

۳) $x(rs) = xr(s)$ ؛

۴) $x \times 1 = x$.

اگر R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد و M یک Rـ مدول راست، آنگاه M با تعریف ضرب اسکالر $. : R \times M \longrightarrow M$، به صورت $r.m = mr$ به‌طور طبیعی به Rـ مدول چپ تبدیل می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه، M یک Rـ مدول و N زیرمجموعه‌ای ناتهی از M باشد، در این صورت، N یک زیرمدول M است مشروط بر اینکه N یک زیرگروه جمعی M بوده و برای هر $r \in R$ و $n \in N$، $nr \in N$.

قضیه ۱۰.۱.۱ (محک فشرده)**.** *فرض کنیم M، یک Rـ مدول باشد و N زیرمجموعه‌ای ناتهی از M. اگر به ازای هر دو عضو از N مانند x و y و هر عضو از R مانند r، $x+y \in N$ و $rx \in N$ آنگاه N زیرمدولی از M است.*

برهان. به قضیه‌ی ۸.۶ در مرجع [۲] مراجعه کنید. □

لم ۱۱.۱.۱. *فرض کنیم $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب باشد. چنانچه هر زنجیر در X دارای یک کران بالا در X باشد، آنگاه X دارای عضو ماکسیمال است و چنانچه هر زنجیر در X دارای یک کران پایین در X باشد، آنگاه X دارای عضو مینیمال است.*

تعریف ۱۲.۱.۱. ایدال سره P از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R را یک ایدال اول گوییم؛ هرگاه

$$\forall s,t \in R \quad st \in P \Longrightarrow s \in p \quad or \quad t \in p.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را یک حلقه‌ی ساده گوییم، هرگاه تنها ایدال‌های آن ۰ و R باشند. حلقه‌ی تقسیم و میدان مثال‌هایی از حلقه‌های ساده هستند.

تعریف ۱۴.۱.۱. حلقه‌ی R را **موضعی** گوییم اگر تنها دارای یک ایدآل ماکسیمال باشد و **نیم موضعی** گوییم، اگر تعداد متناهی ایدآل ماکسیمال داشته باشد.

فرض کنیم R یک حلقه باشد. مجموعه ایدآل‌های اول R را با $spec(R)$ و ایدآل‌های ماکسیمال R را با $Max(R)$ نمایش می‌دهیم. همواره

$$Max(R) \subseteq spec(R).$$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمدول‌های M باشد. مجموعه‌ی تمام عناصر $\sum m_i$ که در آن به ازای هر $i \in I$، $m_i \in M_i$ و به جز تعدادی متناهی همگی m_iها صفرند تشکیل یک زیرمدول M را می‌دهند، که با $\sum_{i\in I} M_i$ نشان داده و آن‌را مجموع مدول‌های خانواده داده شده گوییم.

اگر به ازای هر $j \in I$، $M_j \bigcap \sum_{i\neq j} M_i = (0)$، آن‌گاه این مجموع را مجموع مستقیم داخلی نامیده و با $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم.

همچنین مجموعه‌ی تمام عناصر $(m_i)_{i\in I}$ که به جز تعدادی متناهی از m_iها همگی صفرند تشکیل زیرمدولی از حاصل‌ضرب مستقیم $\prod_{i\in I} M_i$ می‌دهند که به آن مجموع مستقیم خارجی گوییم و با نماد $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۱۶.۱.۱. *اگر مجموعه‌ی اندیس‌گذار I متناهی باشد، آن‌گاه* $\bigoplus_{i\in I} M_i = \prod_{i\in I} M_i$.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم M مدولی روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R باشد. فرض کنیم I ایدال R باشد و $I \subseteq Ann(M)$. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان به طور طبیعی ساختاری به M نسبت داد که M به صورت $\frac{R}{I}$ـ مدول درآید.

فرض کنیم عضوهای $r, \acute{r} \in R$ چنان باشند که $r + I = \acute{r} + I$ و فرض کنیم $m \in M$. در این صورت $r - \acute{r} \in I \subseteq Ann(M)$ و لذا $(r - \acute{r})m = 0$ و $rm = \acute{r}m$. در نتیجه می‌توانیم بدون ابهام نگاشت

$$\frac{R}{I} \times M \longrightarrow M$$
$$(r + I, m) \longmapsto rm$$

را تعریف کنیم و به آسانی ثابت کنیم که با این نگاشت گروه آبلی M به $\frac{R}{I}$ـ مدول تبدیل می‌شود. توجه می‌کنیم که رابطه‌ی ساختارهای Rـ مدول و $\frac{R}{I}$ـ مدول روی M به صورت زیر است. به ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ داریم $(r+I)m = rm$.
باید توجه کرد که هر زیرمجموعه‌ی از M، Rـ زیرمدول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ـ زیرمدول باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. مدول ناصفر M را ساده می‌نامیم، هرگاه تنها زیرمدول‌های آن (0) و خود M باشند.

تعریف ۱.۱.۱۹. مجموع تمام زیرمدول‌های ساده M را ساکل M نامیده و آن‌را با $Soc(M)$ نمایش می‌دهیم. توجه می‌کنیم که $Soc(M) = 0$ اگر و تنها اگر M زیرمدول ساده نداشته باشد.

تذکر ۱.۱.۲۰. *روشن است که ساکل Rـ مدول M زیرمدول M است. بنابراین ساکل راست حلقه‌ی R که مجموع تمام ایدال‌های راست ساده (مینیمال) R است یک ایدال راست R است. همچنین دیده می‌شود که $Soc(R_R)$ یک ایدال R است. به همین ترتیب ساکل چپ R که به شکل مشابه تعریف می‌شود یک ایدال R است.*

تعریف ۱.۱.۲۱. مدول M را نیم‌ساده گوییم، هرگاه $M = Soc(M)$.

تعریف ۱.۱.۲۲. زیرمجموعه‌ی L از Rـ مدول M را یک مجموعه‌ی مولد M می‌نامیم، هرگاه $LR = M$ و در این حالت می‌گوییم L مدول M را تولید می‌کند و یا M توسط مجموعه‌ی L تولید می‌شود.

مدول M را متناهی‌مولد می‌نامیم، هرگاه حداقل یک مجموعه‌ی مولد متناهی داشته باشد.

همچنین مدول M راشمارا مولد می‌نامیم، هرگاه حداقل یک مجموعه‌ی مولد شمارا داشته باشد. مدول M را دوری می‌نامیم هرگاه توسط یک عنصر تولید شود.

لم ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم M و N دو Rـ مدول و $f: M \to N$ یک همریختی Rـ مدولی باشد. در این صورت؛* $f(Soc(M)) \subseteq Soc(N)$

برهان. تصویر همریخت یک Rـ مدول نیم‌ساده یا صفر و یا مدولی نیم‌ساده است. □

گزاره ۲۴.۱.۱. *اگر* $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ *، آن‌گاه* $Soc(M) = \bigoplus_{i\in I} Soc(M_i)$.

برهان. به مرجع [۳]، نتیجه ۲ − ۲ . ۴ مراجعه کنید. □

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی R باشد در این صورت؛

$$Ann(A) = \{b \in R \mid ab = ba = 0, \forall a \in A\}$$

را پوچ‌ساز A می‌نامیم. ملاحظه می‌شود که $Ann(A)$ یک ایدال حلقه‌ی R است.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول و S یک زیرمجموعه‌ی ناتهی M باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی، $\{r \in R \mid sr = 0, \forall s \in S\}$ را پوچ‌ساز S می‌نامیم و با $Ann(S)$ نشان می‌دهیم. Rـ مدول M را **وفادار** می‌نامیم هرگاه $Ann(M) = 0$.

تذکر ۲۷.۱.۱. *$Ann(M)$ یک ایدال R است و M یک $\dfrac{R}{Ann(M)}$ ـ مدول وفادار می‌باشد.*

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول باشد و $N \leq M$، N رایک **زیرمدول ماکسیمال** گوییم هرگاه؛

۱) $N \subseteq M$؛

۲) برای هر $K \leq M$ اگر $N \subseteq K \subseteq M$، آن‌گاه $K = M$ یا $k = N$.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم M یک Rـ مدول و N زیرمدول M باشد. N را زیرمدول اساسی M گوییم و با نماد $N \leq_e M$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر زیرمدول K از M چنانچه $N \cap K = 0$ نتیجه شود $K = 0$.

به عبارت دیگر N را زیرمدول اساسی M گوییم، هرگاه به ازای هر زیرمدول ناصفر K از M، $N \cap K \neq 0$.

همچنین هرگاه $N \leq_e M$، آنگاه M را یک توسیع اساسی N گوییم. در صورتی‌که M توسیع اساسی N باشد و $N \neq M$، آنگاه M را یک توسیع اساسی سره N می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت **رادیکال جیکبسون** R برابر با اشتراک ایدال‌های ماکسیمال که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$J(R) = \cap_{M \in Max(R)} M.$$

لم ۳۱.۱.۱. *(لم ناکایاما) فرض کنیم Mــ مدول متناهی‌مولد روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و I ایدال R باشد و $I \subseteq J(R)$، که $Jac(R)$ رادیکال جیکبسون R است. فرض کنیم $M = IM$، در این صورت $M = 0$.*

برهان. به مرجع [۲]، مراجعه کنید. □

تعریف ۳۲.۱.۱. Rــ مدول V را یک فضای برداری روی میدان F خوانیم، اگر V تحت عملی (که با جمع نشان می‌دهیم) گروهی آبلی باشد و به ازای هر $\alpha \in F$ و هر $v \in V$، عنصری (که به صورت αv نوشته می‌شود) در V وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر α و $\beta \in F$ و هر v و $w \in V$؛

الف) $\alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w$؛

ب) $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$؛

ج) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$؛

د) $1.V = V$ (که در آن ۱ نمایش‌گر عنصر یکه‌ی F تحت عمل ضرب است).

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنیم M یک Rــ مدول باشد. گوییم زیرمجموعه‌ی X از M **مستقل خطی** است، هرگاه برای هر $x_1, ..., x_n$ متمایز در X داشته باشیم:

$$r_1x_1 + ... + r_nx_n = 0 \Longrightarrow r_1 = r_2 = ... = r_n = 0.$$

به عبارت دیگر X را مستقل خطی گوییم هرگاه یک ترکیب خطی از عناصر متمایز X با ضرایب در R صفر باشد، آن‌گاه همه‌ی ضرایب صفر باشند.

تعریف ۳۴.۱.۱. زیرمجموعه‌ی X از Rـ مدول M که یک مجموعه مولد برای آن می‌باشد، یک **پایه** برای M گوییم هرگاه X مستقل خطی باشد.

تعریف ۳۵.۱.۱. Rـ مدول M را یک مدول **آزاد** گوییم، هرگاه دارای یک پایه باشد.

مثال ۳۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R به عنوان Rـ مدول آزاد است، زیرا $X = \{1\}$ یک پایه برای R است.

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عضو $a \in R$ را **خودتوان** گوییم هرگاه $a^2 = a$ و آن‌را پوچ‌توان گوییم هر گاه عدد طبیعی n موجود باشد، به‌طوری که $a^n = 0$. حلقه‌ای که تنها عضو پوچ‌توان آن صفر باشد، حلقه‌ی کاهش‌یافته گوییم یا به عبارت دیگر حلقه‌ای که فاقد پوچ‌توان ناصفر باشد.

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایدال حلقه‌ی R باشد. رادیکال I که آن‌را با $\sqrt{I}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in N \ s.t \ x^n \in I\}.$$

مثال ۳۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $\frac{R}{\sqrt{0}}$ حلقه‌ای است فاقد پوچ‌توان ناصفر یا به عبارت دیگر یک حلقه‌ی کاهش‌یافته است.

برهان. فرض کنیم $(x + \sqrt{0})$ عضو پوچ‌توان حلقه $\frac{R}{\sqrt{0}}$ باشد. بنابراین عدد طبیعی nای وجود دارد که $(x + \sqrt{0})^n = 0_{\frac{R}{\sqrt{0}}} = \sqrt{0}$. یعنی؛ $x^n + \sqrt{0} = \sqrt{0}$. این نشان می‌دهد که

عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد که $(x^n)^m = 0$؛ یعنی، $x^{nm} = 0$. پس $x \in \sqrt{0}$، در نتیجه $x + \sqrt{0} = 0$. □

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. a را **مقسوم‌علیه صفر** گوییم، هرگاه $0 \neq b \in R$ موجود باشد به طوری‌که $ab = 0$ واضح است که عضو (0) یک مقسوم‌علیه صفر می‌باشد. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را با $Zdv(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴۱.۱.۱. *تابع $f : A \longrightarrow B$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت:*

الف) اگر $A \neq \varnothing$، آن‌گاه f یک به یک است اگر و تنها اگر f دارای معکوس چپ باشد؛

ب) f پوشاست اگر و تنها اگر f دارای معکوس راست باشد؛

ج) f دوسویی است اگر و تنها اگر f معکوس‌پذیر باشد.

برهان. به مرجع [۲۹]، قضیه‌ی ۳۰۲۰۳ مراجعه کنید. □

تعریف ۴۲.۱.۱. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول باشند. در این صورت $f : M \longrightarrow N$ را یک همریختی Rـ مدولی می‌نامیم هرگاه:

$$f(m + \acute{m}) = f(m) + f(\acute{m})$$

$$f(rm) = rf(m)$$

اگر همریختی $f : M \longrightarrow N$ دوسویی باشد f را **یکریختی** می‌نامیم. در این حالت می‌گوییم M با N یکریخت است و می‌نوسیم $M \cong N$. اگر f یک به یک باشد، آن‌را **تکریختی** و اگر f پوشا باشد، آن‌را **بروریختی** می‌نامند.

تعریف ۴۳.۱.۱. فرض کنیم، $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی Rـ مدولی باشد، آن‌گاه:

$$Imf = \{f(m) \mid m \in M\} \text{ و } kerf = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$$

را به ترتیب هسته، تصویر f می‌نامند. به سادگی می‌توان دید که؛ $kerf \leq M$ و $Imf \leq N$.

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول باشند. در این صورت مجموعه‌ی تمام همریختی‌ها از M به N را با $Hom_R(M, N)$ یا به طور ساده با $Hom(M, N)$ نمایش می‌دهند:

$$Hom_R(M, N) = \{f \mid f : M \longrightarrow N\}.$$

در صورتی‌که $M = N$ باشد $Hom_R(M, M)$ را معمولاً با $End_R(M)$ نمایش می‌دهند و $End_R(M) = \{f \mid f : M \longrightarrow M\}$.

تعریف ۴۵.۱.۱. یک دنباله از همریختی‌ها و Rـ مدول‌ها مانند

$$\ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

را کامل گوییم، مشروط بر این‌که به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، $Imf_i = Kerf_{i+1}$.

همچنین دنباله کامل

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

را دنباله کامل کوتاه می‌نامیم.

تعریف ۴۶.۱.۱. یادآوری می‌کنیم مدول P روی حلقه‌ی R تصویری است، اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از همریختی‌های Rـ مدول‌ها که سطر پایین آن کامل باشد (یعنی g برووریختی باشد) یک همریختی Rـ مدول‌ها مانند: $h : P \to A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "\exists h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی $gh = f$) .

تذکر ۴۷.۱.۱. *حلقه‌ی R را خودتصویری راست گوییم، هرگاه R_R یک Rـ مدول تصویری باشد. حلقه‌ی خودتصویری چپ به طور مشابه تعریف می‌شود.*

همچنین حلقه‌ای را که هم خودتصویری راست و هم خودتصویری چپ باشد ، حلقه خودتصویری گوییم.

تعریف ۴۸.۱.۱. گوییم مدول J روی حلقه‌ی Rانژکتیو است، اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$

از همریختی‌های Rـ مدول‌ها با سطر بالای کامل (یعنی g تکریختی) یک همریختی از Rـ مدول‌ها مانند $h : B \to J$ وجود داشته باشد، به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد (یعنی $hg = f$).

یا به عبارت دیگر Rـ مدول J را انژکتیو گوییم اگر و تنها اگر به ازای هر Rـ مدول B و هر زیرمدول A از B هر هم‌ریختی Rـ مدولی $f\colon A \to J$ را بتوان به همریختی Rـ مدولی $h\colon B \to J$ توسیع داد.