بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی آمار ریاضی

عنوان پایان نامه

ترتیب های تصادفی میان آماره های ترتیبی تعمیم یافته ی شرطی

استاد راهنما:

دکتر بهاءالدین خالدی

استاد مشاور :

دکتر عبدالرضا سیاره

نام دانشجو:

نسرین حامی گلزار

آذر ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

ماندگارترین ذات لایتناهی،

او که ذاتش یگانه، مهرش جاودانه و علمش بی کرانه است.

تقدیم به‌پژوهشگران عرصه علم و هنر،

تقدیم به خانواده‌ی عزیزم

و تقدیم به همه‌ی انسان هایی که به شادی دیگران شاد می شوند

و به غم آنان غمگین

قدردانی

مراتب سپاس و قدردانی‌ام را به پیشگاه استاد گرانقدر و فرزانه‌ام آقای دکتر بهاالدین خالدی تقدیم می‌دارم که شخصیت علمی و اخلاقی ایشان همواره برایم الگو بوده است.

همچنین از استاد گرانقدر آقای دکتر عبد الرضا سیاره به‌خاطر نقطه‌نظرات دانشمندانه‌ای که در انجام این پایان‌نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از اساتید محترم آقای دکتر جباری و آقای دکتر هاشمی سپاسگزارم که بزرگوارانه زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده و با دقت عالمانهٔ خود نکات ظریفی را در زیبا شدن این پایان‌نامه بیان داشتند.

از اساتید گرانقدرم آقای دکترهاشمی، آقای دکتر قزوینی، آقای دکتر قریشی و آقای دکترفرج زاده که در دوره کارشناسی ارشد افتخار شاگردی ایشان را داشتم نیز قدردانی می‌نمایم.

صمیمانه ترین سپاسگزاری ها را تقدیم پدر و مادرم می دارم که لحظات زندگی ام لبریز از عطر محبت‌شان است.

همچنین از دوستانی که به هر نحو در انجام این کار مرا یاری رساندند، تشکر می‌کنم.

نسرین حامی گلزار

کرمانشاه، آذر ۱۳۸۸

چکیده

مفهوم آماره های ترتیبی تعمیم یافته، برای یکپارچه نمودن مدل های مختلف آماره های ترتیبی مانند آماره های ترتیبی معمولی، مقادیر رکورد، آماره های ترتیبی سانسوریده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم (II) و غیره معرفی شده است. بنابراین قضایایی که برای آماره های ترتیبی تعمیم یافته بیان و اثبات می‌شود، تحت شرایطی برای آماره های ترتیبی که از مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته به دست می آیند، صادق هستند. ابتدا به بیان مفاهیم و تعاریف اساسی مورد نیاز در این پایان نامه پرداخته‌ایم. مقایسه‌های تصادفی میان آماره های ترتیبی معمولی شرطی را بیان کرده ایم که مطالعه‌ی آن با توجه به نقش اساسی آماره های ترتیبی معمولی در قابلیت اعتماد حائز اهمیت است. سپس آخرین مطالعات در باب مقایسه‌های تصادفی تک متغیره و چند متغیره، از دیدگاه ترتیب تصادفی معمولی، ترتیب تصادفی نرخ خطر و ترتیب تصادفی نسبت درست نمایی میان آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شرطی در حالت یک نمونه ای و دو نمونه ای تشریح شده اند. در پایان قضایایی جدید در باب مقایسه تصادفی، از دیدگاه ترتیب تصادفی نسبت درست نمایی تک متغیره و چند متغیره، میان توزیع‌های شرطی مقادیرآماره های ترتیبی تعمیم‌یافته بیان و اثبات می شوند.

فهرست مندرجات

عنوان　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　صفحه

ج

نمادها و علائم اختصاری

آماره ترتیبی تعمیم‌یافته r ام در اولین n آماره ترتیبی تعمیم‌یافته با پارامترهای m و k	$X_{(r,n,m,k)}$
آماره‌های ترتیبی در نمونه‌ای به اندازه n	$X_{1:n}, X_{2:n}, \cdots, X_{n:n}$
امید ریاضی	$E(.)$
اندازه احتمال	$P(.)$
برابری در توزیع (هم‌توزیعی)	$\overset{d}{=}$
به‌شرط آنکه	$\mid$
به‌طور مستقل و مشابه توزیع شده	iid
بینهایت	∞
تابع بقاء توزیع F	$\bar{F}$
تابع توزیع	F ، G
تابع چگالی احتمال	f ، g
تابع مشخصه مجموعه A	$I_A(.)$
تابع معکوس تابع توزیع F	F^{-1}
تابع نرخ شکست توزیع F	$\lambda_F(.)$
تابع نرخ شکست معکوس توزیع F	$\tilde{\lambda}_F(.)$
توزیع شدن	$\sim$
صعودی بودن (برای توابع)	$\uparrow$
صعودی بودن در مفهوم ترتیب تصادفی معمولی	$\uparrow_{st}$
صور عمومی	$\forall$
صور وجودی	$\exists$
عضویت مجموعه‌ای	$\in$
عملگر مجموعه‌ای سوپریمم	Sup

عملگر مجموعه‌ای ماکسیمم .... Max

عملگر مجموعه‌ای می‌نیمم .... Min

کوچکتری در ترتیب تصادفی معمولی .... $\leq_{st}$

کوچکتری در ترتیب نرخ شکست .... $\leq_{hr}$

کوچکتری در ترتیب نرخ شکست معکوس .... $\leq_{rh}$

کوچکتری در ترتیب نسبت درستنمایی .... $\leq_{lr}$

ماکزیمم x و y .... $x \vee y$

متغیر تصادفی هم‌توزیع با $[X_i - t|X_i > t]$ .... X_i^t

متناسب است با .... $\propto$

مجموعه اعداد حقیقی .... $\Re$

مجموعه اعداد حقیقی مثبت .... $\Re_+$

مجموعه اعداد حقیقی n بعدی .... $\Re^n$

مجموعهٔ اعداد حقیقی n بعدی مثبت .... $\Re_+^n$

مجموعه اعداد طبیعی $\{۱, ۲, \ldots\}$ .... N

مقدار رکورد n ام (دنباله $\{X_i\}_{i=۱}^{\infty}$) .... $R_n \, (R_n^X)$

مینیمم مقدار x و y .... $x \wedge y$

نزولی بودن (برای توابع) .... $\downarrow$

نقطه انتهایی چپ تکیه‌گاه X .... l_X

نقطه انتهایی راست تکیه‌گاه X .... u_X

نمونه تصادفی به اندازهٔ n .... $X_۱, X_۲, \cdots, X_n$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱ـ۱ آماره های ترتیبی تعمیم یافته

بعضی از آماره‌ها، همچون آماره‌های ترتیبی (معمولی)، مقادیر $k-$ رکورد، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، رکوردهای فایفر، آماره‌های ترتیبی سانسوریده فزاینده نوع دوم (II) و آماره‌های دیگری از این نوع که دارای ساختاری ترتیبی هستند و در این بخش با آن‌ها آشنا خواهید شد را می توان تحت یک ساختار کلی به نام " آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته " بیان نمود. به بیانی دیگر هر یک از این مدل های ترتیبی را می توان با جایگذاری مقادیر خاصی در برخی پارامترهای مدل آماره های ترتیبی تعمیم یافته به دست آورد. جهت معرفی آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته که برمبنای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با توزیع مشترک F تعریف می‌شوند، ابتدا لازم است که " آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت " را که برمبنای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با توزیع یکنواخت روی بازه $(\circ, ۱)$ تعریف می‌شوند، معرفی نماییم.

فرض کنید $\{U_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ی متغیر های تصادفی iid باشد که در آن U_i، $i \geq ۱$ دارای توزیع یکنواخت روی بازه‌ی $(\circ, ۱)$ است. یعنی

$$U_i \sim U(\circ, ۱) \ , \ i = ۱, ۲, \cdots .$$

تعریف زیر را از کمپس[۱] (۱۹۹۵) بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱ مقادیر $n \in N$، $k \geq ۱$ و $m_۱, m_۲, \cdots, m_{n-۱} \in \Re$ را در نظر گرفته و به‌ازای هر $۱ \leq r \leq n-۱$، قرار می‌دهیم $M_r = \sum_{j=r}^{n-۱} m_j$، $\gamma_r = k+n-r+M_r$ و $\tilde{m} = (m_۱, m_۲, \cdots, m_{n-۱})$. گاهی $\tilde{m}$ را به صورت $\tilde{m}_n$ نشان می دهند. در این صورت متغیرهای تصادفی

$$U(۱, n, \tilde{m}, k), U(۲, n, \tilde{m}, k), \cdots, U(n, n, \tilde{m}, k)$$

را آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت می‌نامیم، هرگاه دارای تابع چگالی توأم زیر باشند

$$f_{U(۱,n,\tilde{m},k),\cdots,U(n,n,\tilde{m},k)}(u_۱, \cdots, u_n) = k \left(\prod_{j=۱}^{n-۱} \gamma_j\right) \left(\prod_{i=۱}^{n-۱} (۱ - u_i)^{m_i}\right) (۱ - u_n)^{k-۱} \ , \quad \circ \leq u_۱ \leq u_۲ \leq \cdots \leq u_n \leq ۱. \qquad (۱.۱.۱)$$

---

[۱] Kamps

در حالت خاص $m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = m$، آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته یکنواخت را به‌صورت $U(r, n, m, k)$، $r = 1, 2, \cdots, n$، نشان می‌دهیم.

پس از تعریف آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته یکنواخت، اکنون می‌توان آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته برمبنای توزیع پیوسته F را با استفاده از تبدیل چندکی تعریف نمود.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $U(1, n, \tilde{m}, k)$،$U(2, n, \tilde{m}, k)$،$\cdots$،$U(n, n, \tilde{m}, k)$، آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت باشند. آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X(r, n, \tilde{m}, k) = F^{-1}(U(r, n, \tilde{m}, k)) \quad , \quad r = 1, 2, \cdots, n \, . \tag{2.1.1}$$

که در آن

$$\forall\, u \in (0, 1)\, , \quad F^{-1}(u) = Sup\{x : F(x) \leq u\}.$$

در حالت خاص $m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = m$، آماره‌های ترتیبی تعمیم یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت $X(r, n, m, k)$، $r = 1, 2, \cdots, n$، نشان می‌دهیم.

تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

در صورتی که تابع توزیع F مطلقاً پیوسته با تابع چگالی متناظر f باشد، می‌توان تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به دست آورد. برای این منظور به رابطه‌ی زیر نیاز خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & P(X(1, n, \tilde{m}, k) \leq x_1, X(2, n, \tilde{m}, k) \leq x_2, \ldots, X(n, n, \tilde{m}, k) \leq x_n) \\ &= P(F^{-1}(U(1, n, \tilde{m}, k)) \leq x_1, F^{-1}(U(2, n, \tilde{m}, k)) \leq x_2, \cdots, F^{-1}(U(n, n, \tilde{m}, k)) \leq x_n) \\ &= P(U(1, n, \tilde{m}, k) \leq F(x_1), U(2, n, \tilde{m}, k) \leq F(x_2), \cdots, U(n, n, \tilde{m}, k) \leq F(x_n)) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

که در روابط بالا از رابطه‌ی (۲.۱.۱) استفاده شده است. اکنون با توجه به برابری (۳.۱.۱) و تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته یکنواخت در رابطه‌ی (۱.۱.۱)، می‌توانیم تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته (برمبنای تابع توزیع F) را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} & f_{X(1,n,\tilde{m},k),\ldots,X(n,n,\tilde{m},k)}(x_1, \quad \ldots \quad , x_n) \\ &= k \left(\prod_{j=1}^{n-1} \gamma_j \right) \left(\prod_{i=1}^{n-1} (1 - F(x_i))^{m_i} f(x_i) \right) (1 - F(x_n))^{k-1} f(x_n) \\ & F^{-1}(0) \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq F^{-1}(1) \, . \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته

کمپس (۱۹۹۵، صفحه ۶۴)، تابع چگالی حاشیه‌ای آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته برمبنای تابع توزیع مطلقاً پیوسته‌ی F را در حالت خاص $m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = m$، به‌صورت زیر به دست آورده است

$$f_{X(r,n,m,k)}(x) = \phi_{r,n,m,k}(F(x))f(x)\,, \qquad (۵.۱.۱)$$

که در آن

$$\phi_{r,n,m,k}(u) = \frac{c_{r-1,n}}{(r-1)!}(1-u)^{\gamma_r-1}[\delta_m(u)]^{r-1}\,, \quad u \in (0,1)\,, \qquad (۶.۱.۱)$$

و

$$c_{r-1,n} = \prod_{j=1}^{r} \gamma_j\,, \quad \gamma_n = k. \qquad (۷.۱.۱)$$

به‌سادگی از تعریف ۱.۱ نتیجه می‌شود که

$$\gamma_r = k + (n-r)(m+1)\,, \qquad 1 \le r \le n-1\,. \qquad (۸.۱.۱)$$

گاهی γ_r را به صورت $\gamma_{r,n}$ نشان می دهند.

همچنین تابع $\delta_m : [0,1) \to \Re$، $m \in \Re$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1}\left[1-(1-x)^{m+1}\right], & m \neq -1 \\ -\ln(1-x) & m = -1\,. \end{cases} \qquad (۹.۱.۱)$$

از کمپس (۱۹۹۵، روابط صفحه ۶۸) تابع چگالی توأم $X_{(r,n,m,k)}, X_{(s,n,m,k)}$ تحت فرض $m_1 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = m$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} f_{X_{(r,n,m,k)},X_{(s,n,m,k)}}(x_r,x_s) &= \frac{c_{s-1}}{(r-1)!(s-r-1)!}(1-F(x_r))^m f(x_r)\delta_m^{r-1}(F(x_r)) \\ &\quad \times[h_m(F(x_s))-h_m(F(x_r))]^{s-r-1}(1-F(x_s))^{k+n-s+M_s-1}f(x_s) \end{aligned} \qquad (۱۰.۱.۱)$$

که در آن برای $x \in [0,1)$،

$$h_m(x) = \begin{cases} \frac{-1}{m+1}(1-x)^{m+1}, & m \neq -1 \\ -\ln(1-x), & m = -1\,. \end{cases} \qquad (۱۱.۱.۱)$$

در فصل چهارم این پایان نامه تابع چگالی توأم هر بردار از آماره های ترتیبی تعمیم یافته با هر بعدی به دست آمده است.

کمپس (۱۹۹۵)، کسلینگ[۲] (۱۹۹۹)، احسان الله[۳] (۲۰۰۰)، کمپس و کرامر[۴] (۲۰۰۱)، کمپس و کرامر(۲۰۰۳)، روی توزیع های آماره های ترتیبی تعمیم یافته و توزیع حاشیه ای آنان مباحث مفیدی را ارائه داده اند.

همان‌طورکه گفته‌شد، مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته شامل مدل آماره‌هایی است که همه آن ها دارای خاصیت ترتیبی هستند و با درنظر گرفتن مقادیر خاصی از پارامترهای مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته، یعنی مقادیر خاصی به‌ازای r، n، k و $\tilde{m}$، مدل‌هایی چون آماره‌های ترتیبی معمولی، مقادیر $k-$ رکورد، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، رکوردهای فایفر، آماره‌های ترتیبی سانسوریده فزاینده نوع دوم (II) و مدل‌های دیگری از این نوع، حاصل می‌شوند. در این جا جهت آشنایی خواننده آماره های ترتیبی و رکوردها را تعریف نموده و به نحوه عضویت آن ها در مدل آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته می‌پردازیم. خواننده‌ی علاقه مند جهت آشنایی با سایر مدل ها می تواند به کتاب کمپس (۱۹۹۵) مراجعه کند.

۱-۱-۱ آماره‌های ترتیبی معمولی

آماره‌های ترتیبی معمولی یا همان آماره‌های ترتیبی نقش بسیار مهمی را در اکثر شاخه‌های آماری اعم از استنباط آماری پارامتری و ناپارامتری و قابلیت اعتماد ایفا می کند. به طور مثال بردار آماره‌های ترتیبی همواره یک آماره‌ی بسنده برای پارامتر تحت مطالعه در یک خانواده از توابع چگالی است یا در قابلیت اعتماد، در بررسی طول عمر سیستم های $k-$ از$-n$، طول عمر سیستم با طول عمر $(n-k+۱)$ امین آماره‌ی ترتیبی تعیین می شود. به دلیل وجود منابع فراوان در مورد آماره های ترتیبی از توضیح بیشتر راجع به آماره های ترتیبی خودداری می کنیم و به چگونگی عضویت آماره های ترتیبی معمولی در مجموعه‌ی بزرگ ترتیبی آماره های ترتیبی تعمیم یافته می پردازیم.

برای $n \geq ۱$ فرض کنید $X_{i:n}$، i امین آماره ترتیبی از نمونه تصادفی $X_۱،X_۲،\cdots،X_n$ از توزیع پیوسته F باشد. این آماره‌های ترتیبی حالت خاصی از آماره‌های ترتیبی تعمیم‌یافته با پارامترهای

[۲] Ceselling

[۳] Ehsanellah

[۴] Cramer

$m_۱ = m_۲ = \cdots = m_{n-۱} = ۰$ و $k = ۱$ هستند. در این حالت

$$\gamma_r = n - r + ۱\,, \quad r = ۱, \cdots, n-۱.$$

پس از جایگذاری این پارامترها در رابطه‌ی (۴.۱.۱)، تابع چگالی توأم بردار آماره‌های ترتیبی معمولی به‌صورت زیر به دست می آید

$$f_{(X_{۱:n}, X_{۲:n}, \cdots, X_{n:n})}(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = n! \left(\prod_{i=۱}^{n} f(x_i) \right) .$$

خواننده برای جزئیات کامل تر می‌تواند به آرنولد[۵] و همکاران (۱۹۹۲) و کمپس (۱۹۹۵)، دیوید[٦] و ناگاراجا[۷] (۲۰۰۳) مراجعه نماید.

۱—۱—۲ مقادیر رکورد

شاید همگی ما بازی های دوران کودکی خود را به یاد داشته باشیم. اولین کسی که مسافتی خاص را زودتر از بقیه بدود یا کسی که به هنگام پرش دستش را به نقطه بالاتری بزند یا کسی که در بیشترین زمان ممکن، بتواند سرش را زیر آب نگه دارد، رکوردی را ثبت کرده‌اند. در بسیاری از مسایل روزمره، به خصوص در رشته‌های مختلف ورزشی مثل شنا، دو میدانی، وزنه‌برداری و بسیاری دیگر، رکوردهایی چون کوتاه‌ترین زمان طی نمودن مسافت ۱۰۰ متر توسط شناگر یا دونده یا بیشترین وزنه‌ای که وزنه‌بردار بالای سر می‌برد ثبت می‌شود. هرگاه دونده ای بتواند زمانی کوتاه‌تر از تمامی زمان‌های گذشته طی مسیر، که توسط دوندگان قبل از او به ثبت رسیده‌است را ثبت کند، یک رکورد ثبت کرده است. البته در این جا لازم است اشاره کنیم که مقادیر رکورد، دارای چندین نوع هستند، ازجمله مقادیر رکورد بالا یا همان مقادیر رکورد معمولی و مقادیر رکورد پائین که برخلاف مقادیر رکورد بالا با دیدن مشاهده‌ای که از همه مشاهدات قبلی در دنباله کوچک تر باشد، ثبت می‌شود.

گاهی اوقات برحسب نوع مسئله مورد بررسی، یک رکورد با مشاهده‌ی مقداری که از تمامی مقادیر متناظر قبل از خود بیشتر باشد، ثبت شده، و گاهی یک رکورد با مشاهده مقداری که از تمامی مقادیر قبل از خود کمتر باشد، ثبت می‌شود. از مقادیر رکورد، مثال های بسیاری نیز در موضوعات اقتصادی، اجتماعی، صنعتی، تاریخی و هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله‌نگاری و غیره وجود دارد. میزان رکوردهای قیمت نفت که از نظر افول قیمت یا افزایش قیمت ثبت می شود یا میزان رکوردی که برای برخی معضلات اجتماعی اعم از طلاق، اعتیاد یا بیکاری ثبت می شود، همگی مثال هایی از کاربرد رکورد ها

---

۵ Arnold

٦ David

۷ Nagaraja

در زندگی روزمره است.

حال به تعریف مقادیر رکورد از دیدگاه ریاضی می پردازیم. فرض کنید $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid از توزیع پیوسته F باشد. مشاهده X_j یک " مقدار رکورد " (یا رکورد معمولی) نامیده می‌شود، در صورتی که مقدار آن از همه مشاهدات قبل در دنباله بزرگ تر باشد. یعنی X_j یک رکورد است، اگر برای هر $i < j$ داشته باشیم

$$X_j > X_i \ .$$

به‌ازای j های مختلفی که X_j یک مقدار رکورد باشد، دنباله مقادیر رکورد $\{R_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ مشاهده می‌شود که در آن R_n^X، n امین مقدار رکورد دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ است. همچنین بدیهی است که اولین مشاهده، اولین مقدار رکورد است، یعنی $R_1^X = X_1$.

زمانی که یک رکورد اتفاق می‌افتد یک متغیر تصادفی " زمان رکورد " نیز ثبت می‌شود. دنباله زمان‌های رکورد را با $\{T_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T_1^X = 1 \qquad (\text{با احتمال یک})$$

و برای $n \geq 2$،

$$T_n^X = min\{j : X_j > X_{T_{n-1}}\}.$$

با استفاده از این تعریف، دنباله مقادیر رکورد $\{R_n^X\}_{n=1}^{\infty}$ عبارت است از

$$R_n^X = X_{T_n^X} \quad , \quad n = 1, 2, \cdots \quad .$$

مقادیر رکورد ابتدا توسط چاندلر[8] (۱۹۵۲) تعریف گردید و نخستین گردآوری نظریات در باب مقادیر رکورد توسط گلیک[9] (۱۹۷۸) به‌همراه کاربردهایی ارائه گردید. و به عنوان یک مرجع جامع و کامل خواننده را به کمپس (۱۹۹۵) و آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) ارجاع می‌دهیم.

مبحث سیستم ها و طول عمر آنها در قابلیت اعتماد، از مباحث اصلی این پایان نامه نمی باشد، ولی به دلیل این که آماره های ترتیبی معمولی دلالت بر طول عمر سیستم های $k-$ از $n-$ دارد و در فصل دوم، به ترتیب های تصادفی میان آماره های ترتیبی معمولی شرطی می پردازیم، این فصل را با مطالبی از سیستم ها ادامه می دهیم.

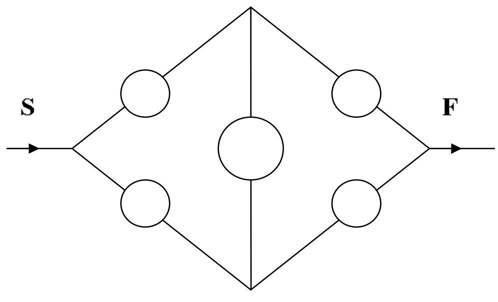
---

[8] Chandler

[9] Glick

۱—۲ سیستم و طول عمر آن

موتور یک هواپیما یا اتومبیل، انواع وسایل الکتریکی مانند اتو، لباسشویی، انواع لامپ‌ها، یک قطعه الکترونیکی مانند IC و غیره همه مثال‌هایی از یک سیستم هستند. از اهداف اصلی بررسی طول عمر سیستم ها، ارتقا و بهبود وضعیت سیستم است. در اغلب اوقات سیستم‌ها دارای یک ساختار چند جزئی هستند، یعنی آن‌ها از چند جزء ساده‌تر تشکیل شده‌اند. به هرکدام از اجزاء ساده یک سیستم، مؤلفه گفته می‌شود. طول عمر یک سیستم به طور مستقیم با آماره های ترتیبی حاصل از طول عمر مؤلفه‌هایش ارتباط مستقیم دارد. شاخه ای از علم آمار که به بررسی زمان کارکرد انواع سیستم ها و چگونگی بهبود آنها می پردازد، قابلیت اعتماد نام دارد. به منظور بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی سیستم، بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی مؤلفه‌هایی که سیستم از آن‌ها تشکیل شده‌است، مهم است.
زمان از کار افتادگی سیستم‌ها بستگی دارد به ساختاری که مؤلفه ها در کنار یکدیگر قرار می گیرند. به‌عبارت ساده‌تر بستگی به این دارد که مؤلفه‌ها چگونه در کنار هم قرار گرفته‌اند. سیستم سری، موازی، سری—موازی، ساختار پل و از همه مهم تر سیستم های k– از –n از مهم ترین ساختار سیستم ها هستند. سیستم سری، سیستمی را گویند که کار می کند اگر و تنها اگر همه‌ی مؤلفه های آن کار کنند و سیستم موازی، سیستمی است که به شرط کارکرد حداقل یکی از مؤلفه هایش کار می‌کند. برخی از سیستم‌ها دارای ساختاری هستند که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت ترکیبی از زیرساختارهای سری و موازی نشان داد. ساختار "پل" که ساده‌ترین حالت آن در شکل زیر نشان داده شده است، از جمله این ساختارهاست.



شکل ۱.۲.۱: ساختار (سیستم) پل

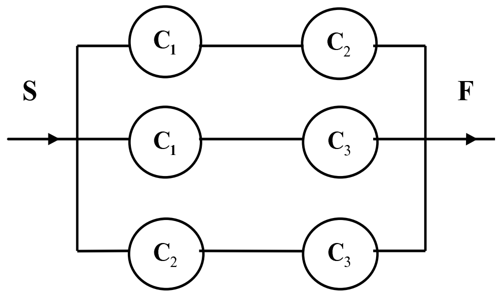
برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به بارلو[۱۰] و پروشان [۱۱] (۱۹۸۱) رجوع کنید. اما ساختاری از سیستم ها که در این پایان نامه ذکر می شود، سیستم های k–از–n هستند که به تعریف آن می‌پردازیم.

[۱۰] Barlow

[۱۱] Proschan

سیستم k–از–n

سیستمی که تا زمان کار کردن حداقل k تا از مؤلفه‌هایش (به تعداد مفروض n) کار می‌کند، سیستم k–از–n نامیده می‌شود. به‌بیان دیگر هرگاه $n-k$ تا از مؤلفه‌های آن از کار بیافتند، سیستم مزبور همچنان درحال کار کردن است، اما با از کار افتادن اولین مؤلفه بعدی
($n-k+۱$ امین مؤلفه)، سیستم دیگر کار نخواهد کرد. شکل ۲.۲.۱ ساختار یک سیستم ۲–از–۳ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۲.۱: ساختار (سیستم) ۲–از–۳

لازم به ذکر است که سیستم سری یک سیستم n–از–n و سیستم موازی یک سیستم ۱– از –n است. برای آشنایی بیشتر با ساختارهای مختلف، خواننده می‌تواند به کووالنکو[۱۲] و همکاران (۱۹۹۵) مراجعه نماید.

دربسیاری از اوقات و در عمل، بعد از این که t واحد زمان از عمر کارکرد سیستم، گذشته و سیستم هنوز در حال کارکردن است، مایلیم بدانیم که وضعیت طول عمر سیستم از این پس چگونه است یا این که سیستم از کار افتاده است و مایلیم بدانیم چه مدت زمانی از غیر فعال بودن سیستم گذشته است. به‌این منظور لازم است تعاریف اولیه‌ای را ارائه دهیم. همان طور که گفته شد، هر سیستم از چندین مؤلفه تشکیل شده است. بنابراین لازم است جهت بررسی طول عمر یک سیستم ابتدا به بررسی طول عمر مؤلفه‌ها بپردازیم.

طول عمر یک مؤلفه، یک متغیر تصادفی غیر منفی، همچون T با تابع چگالی $f(t)$ است. فرض کنید $F(.)$ تابع توزیع متناظر با $f(.)$ باشد. تابع قابلیت اعتماد (یا همان تابع بقا) چنین مؤلفه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bar{F}(t) = p(T > t) = ۱ - F(t)\,.$$

متغیر تصادفی طول عمر یک مؤلفه را زمان از کار افتادگی نیز می‌گویند.

۱۲ Kovalenko