بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان :

دسته بندی مونوئیدهایی که سیستمهای دوری (بطور ضعیف) هموار آنها، بطور قوی هموارند

استاد راهنما :

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش :

حمید طاهری

تیر ۸۱

بسمه تعالی

صفحه الف

این پایان‌نامه با عنوان ***دسته‌بندی مونوئیدهایی که سیستمهای دوری (بطور ضعیف) هموار آنها، بطور قوی هموارند*** قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ***ریاضی محض*** گرایش ***جبر*** توسط دانشجو ***حمید طاهری*** تحت راهنمائی استاد پایان‌نامه ***آقای دکتر اکبر گلچین*** تهیه شده است.

استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد٪

امضاء دانشجو

این پایان نامه ۶/شش واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ ۸۱/۰۴/۰۹ توسط هیئت داوران بررسی و نمره ۱۸/۷۷ با درجه عالی به آن تعلق گرفت٪

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ ۸۱/۴/۹
۱ـ استاد راهنما:	دکتر اکبر گلچین		
۲ـ استاد مشاور:	----		
۳- داور ۱:	دکتر مجید ارشاد		
۴ـ داور ۲:	دکتر علی‌رضا سالمکار		
۵ـ تحصیلات تکمیلی:	دکتر محمد امینی‌دهک		

تقدیم به :

برادر و خواهر بزرگتر و همسر فداکارم

که هر کدام به نحوی، نقش موثری در پیشرفت تحصیلی ام داشته اند

تقدیر و تشکر

منت و سپاس شایسته پروردگاری است که بشر را قدرت تفکر و تحصیل علم بخشید . خداوندا تو خود می دانی که من شایسته این همه لطف و کرمت نبوده ام و اکنون که در سایه رحمت بی پایانت توانسته ام گامی دیگر در عرصه حیات بردارم و وجودم را به زینت علم بیارایم، باشد که به خودآیم، شاکر باشم، اندیشه ای کنم و طریقتی گزینم . ستایش هم او را که تجلی وجودش در دو گوهر تابان زندگیم براستی ستودنی است . پدر و مادری که دستانشان جایگاه هزاران بوسه است و با تشکر از دایی عزیزم، و معلم محبوب سالهای دبستانم خانم صدیقه نخعی، که در من این انگیزه را ایجاد کردند تا با وجود مشکلات فراوان بتوانم تا این مرحله از تحصیل موفق باشم . امیدوارم که خداوند توفیق خدمت به آنها و کشورم را به من عطا فرماید .

از استاد علم و اخلاق، آقای دکتر گلچین که با دقت و ظرافت خاص خود، راهنمایی این رساله را به عهده داشته اند، صمیمانه سپاسگزاری می کنم .

از ریاست محترم دانشگاه شیراز جناب آقای دکتر ارشاد و همچنین جناب آقای دکتر سالمکار که زحمت داوری این رساله را به عهده داشته اند، تقدیر و تشکر می نمایم .

از اساتید محترم گروه ریاضی بخصوص، آقای دکتر امینی و آقای دکتر غلامرضا رضایی که در دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد همواره مشوق و راهنمای اینجانب بوده اند، تشکر و قدردانی می نمایم .

از تمامی دوستان عزیزی که در مراحل مختلف تحصیلی همگام و همراهم بوده اند و از محضر آنها کسب فیض نموده ام، بخصوص آقایان حاتمی و احمدی، نیز تشکر می کنم .

چکیده

خواص سیستمها روی مونوئیدها حدوداً از سال ۱۹۷۰ مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته اند . ضرب تانسوری سیستمها و روابط آن با همواری سیستمها از جمله : همواری ضعیف، همواری و همواری قوی برای اولین بار توسط استنستروم [1] و کیلپ [2] مورد توجه قرار گرفت، که تاکنون منجر به نتایج ذیل گردیده است .

آزاد ⟵ پروژکتیو ⟵ بطور قوی هموار ⟵ شرط (P) ⟵ هموار ⟵ بطور ضعیف هموار ⟵ بطور اساسی ضعیف هموار

عکس روابط فوق در حالت کلی برقرار نیست . در این پایان نامه مونوئیدهایی را مورد بررسی قرار می دهیم که تحت شرایطی، نتایج زیر در مورد سیستمهای دوری آنها برقرار باشد .

بطور ضعیف هموار ⟵ بطور قوی هموار

بطور ضعیف هموار ⟵ هموار ⟵ بطور قوی هموار

بطور ضعیف هموار ⟵ شرط (P)

هموار ⟵ شرط (P)

فصل اول را با تعاریف و مفاهیمی که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می گیرند، آغاز می کنیم .
در فصل دوم با اعمال شرط راست PP بودن، یک دسته بندی از مونوئیدهایی را ارائه می دهیم بطوریکه سیستمهای دوری بطور ضعیف هموار آنها هموار باشند .
در فصل سوم با اعمال شرایطی چون برگشتپذیری، حذف پذیری و راست PP بودن، بر مونوئیدها، دسته بندی هایی از آنها را ارائه می دهیم بطوریکه که سیستمهای دوری (بطور ضعیف) هموار آنها در شرط (P) صدق کنند .
در فصل چهارم ثابت می کنیم که اگر مونوئید برگشتپذیر S، یک نیمگروه پوچ و یا یک گروه تک عضوی باشد آنگاه سیستمهای دوری هموار آن بطور قوی هموارند .

1- B.Stenstrom
2- M.Kilp

فهرست مطالب

فصل اول :

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی که در این پایان نامه مورد استفاده قـرار مـی گـیرند بیان شده است . البته در فصلهای دیگر نیز تعاریف لازم آمده است .

تعریف۱-۱) به مجموعه غیرتهی S که یک عمل دوتایی شرکتپذیر مـانند * روی آن تعریـف شـده باشد، نیمگروه گفته می شود . به عبارت دیگر :

$$\forall x, y, z \in S, \qquad x*(y*z) = (x*y)*z \ .$$

و از این به بعد برای راحتی بجای * از نماد "." استفاده می کنیم . مثلا بجای $x*y$ می نویسیم $x.y$ و برای راحتی با xy نمایش می دهیم . اگر نیمگروه S دارای خاصیت اضـافی زیـر نـیز باشـد بـه آن نیمگروه تعویضپذیر گوییم :

$$\forall x, y \in S, \qquad xy = yx \ .$$

تعریف۱-۲) فرض کنیم S یک نیمگروه باشد . اگر $1 \in S$ بگونه ای موجود باشد که :

$$\forall x \in S, \qquad 1x = x1 = 1 \ .$$

آنگاه عنصر۱ را عضو همانی نیمگروه S و S را نیمگروه یکدار ویا مونوئید (تکواره) نامیم .

توجه : هرنیمگروه S حداقل دارای یک عضو است . اگر نیمگـروه S شـامل عنصـر همـانی نباشـد براحتی می توان عنصر 1 باخاصیت زیررا به آن افزود ،

$$\forall s \in S, \qquad 1s = s1 = s, \qquad 1.1 = 1 \ .$$

دراینصورت $S \cup \{1\}$ یک نیمگروه با عضو همانی می باشد و تعریف می کنیم :

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases} \ .$$

و S^1 را نیمگروه بدست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن گوییم .

تبصره : اگر نیمگروه S با حداقل دو عضو ، شامل عنصر 0 چنان باشدکه :

$$\forall s \in S, \qquad 0s = s0 = 0 .$$

در اینصورت 0 را عنصر صفر نیمگروه S گوییم .

لازم به ذکر است که S حداکثر شامل یک عنصر صفر می تواند باشد . اگر S شامل عنصر صفر نباشد می توان عنصر 0 با خاصیت زیر را به آن افزود :

$$\forall s \in S, \qquad 0s = s0 = 0, \qquad 0.0 = 0 .$$

در اینصورت $S \cup \{0\}$ یک نیمگروه شامل عنصر صفر می باشد و تعریف می کنیم :

$$S^0 = \begin{cases} S & 0 \in S \\ S \cup \{0\} & 0 \notin S \end{cases}$$

و S^0 را نیمگروه بدست آمده از S با الحاق صفر به آن گوییم .

تعریف ۱-۳) نیمگروه S را پوچ گوییم هرگاه شامل عنصر صفر بوده و حاصل ضرب هر دو عنصر آن صفر باشد .

تعریف ۱-٤) اگر نیمگروه S در شرط زیر صدق کند، آن را گروه گوئیم .

$$\forall\, 0 \neq a \in S, \qquad aS = S \quad \& \quad Sa = S .$$

اگر G یک گروه باشد آنگاه $G \cup \{0\}$ یک نیمگروه است که به آن 0-گروه گوییم و با G^0 نشان می دهیم .

تعریف ۱-۵) زیر مجموعه ناتهی T از S را زیر نیمگروه S نامیم ، هرگاه تحت عمل S بسته باشد.

به عبارت دیگر :

$$\forall x, y \in T, \qquad xy \in T.$$

توجه : زیر مجموعه ناتهی T از نیمگروه S، زیر گروه S است اگر وفقط اگر

$$\forall 0 \neq a \in T, \qquad aT = T \ \& \ Ta = T \ .$$

تعریف ۱-٦) زیر مجموعه ناتهی I از نیمگروه S را ایده آل چپ (راست) S گوییم هرگـاه $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$) . اگر I هم ایده آل چپ و هم ایده آل راست باشد، آن را ایده آل گوییم .

واضح است که هر ایده آل (یکطرفه یا دوطرفه) از S یک زیر نیمگروه S می باشد . ولی عکس ایـن مطلب برقرار نیست .

هر نیمگروه S، همواره ایده آل خودش می باشد، و اگر شامل صفر باشد، آنگـاه $\{0\}$ ایـده آلـی از S است . اید ه آل I را ایده آل حقیقی S گوییم، هرگاه $\{0\} \subset I \subset S$.

تعریف ۱-۷) فرض کنیم a عنصری از نیمگروه S باشد . در اینصورت، کوچکترین ایده آل چـپ S شامل a، $Sa \cup \{a\}$ می باشد که آنرا با نماد $S^1 a$ نمایش داده و آن را ایده آل چپ اصلی تولید شده توسط a گوییم .

به طریق مشابه، ایده آل راست اصلی تولید شده توسط a تعریف می شود که آنرا با نماد aS^1 نمایش می دهیم .

تعریف ۱-۸) عضو a از نیمگروه S را خودتـوان گوییـم، هـرگـاه $a^2 = a$. مجموعـه تمـام عنـاصر خودتوان نیمگروه S ر ا با $E(S)$ نمایش می دهیم .

توجه : نیمگروه S را باند گوئیم هرگاه، هر عضو آن خودتوان باشد . همچنین اگر برای هر $a,b,c \in S$ ، $abc = acb$ $(abc = bac)$، در اینصورت S را باند نرمال چپ (راست) گوئیم .

تعریف ۱-۹) عضو a از نیمگروه S را منظم گوییم، هرگاه عضوی مانند a' در S موجود باشد بطوریکه $aa'a = a$.

نیمگروه S را منظم گوییم، هر گاه هر عضو آن منظم باشد .

تعریف ۱-۱۰) فرض کنیم S یک مونوئید باشد . عضو $a \in S$ را معکوس پذیر راست گوییم، در صورتیکه عضوی مانند a' در S موجود باشد، بطوریکه : $aa' = 1$ ومعکوس پذیر چپ گوییم، اگرعنصری مانند a' در S موجود باشد، بطوریکه : $a'a = 1$.

تعریف ۱-۱۱) نیمگروه S را حذف پذیر از راست (چپ) گوییم، درصورتیکه برای عناصر دلخواه $a,b,c \in S$، اگر $ac = bc$ $(ca = cb)$ نتیجه شود $a = b$.

تبصره : اگر $\{\rho_i \mid i \in I\}$ خانواده ناتهی از رابطه های هم ارزی روی مجموعه X باشد، آنگاه واضح است که $\bigcap\{\rho_i \mid i \in I\}$ نیز یک رابطه هم ارزی روی X است . اگر R یک رابطه دلخواه روی X باشد، آنگاه خانواده رابطه های هم ارزی روی X شامل R ناتهی است (چون $X \times X$ یک چنین هم ارزی است) . بنابراین اشتراک تمام هم ارزیهای روی X شامل R کوچکترین رابطه هم ارزی منحصر بفرد شامل R است . چنین هم ارزی روی X را هم ارزی تولید شده بوسیله R گوئیم و با R^e نشان می دهیم .

اگر S یک رابطه روی X باشد، S^∞ را بست متعدی S نامیده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$S^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n .$$

لم ۱-۱۲) اگر S یک رابطه روی مجموعه X باشد، آنگاه S^∞ کوچکترین رابطه متعدی روی X و شامل S است .

اثبات : اولا ، S^∞ متعدی است زیرا اگر $(x,y),(y,z) \in S^\infty$، آنگاه اعداد صحیح و مثبت m,n وجود دارند بطوریکه ، $(x,y) \in S^m$ و $(y,z) \in S^n$. بنابراین $(x,z) \in S^m o S^n = S^{m+n} \subseteq S^\infty$. همچنین واضح است که S^∞ شامل $S = S^1$ نیز می باشد . حال اگر T رابطه متعدی دیگری روی X و شامل S باشد.آنگاه، $S^2 = SoS \subseteq ToT \subseteq T$. بطور کلی برای $n = 1,2,\ldots$، $S^n \subseteq T$ و در نتیجه $S^\infty \subseteq T$. بنابراین S^∞ کوچکترین رابطه متعدی روی X و شامل S است .

قضیه ۱-۱۳) اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد، آنگاه $R^e = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$.

اثبات : مشابه اثبات لم قبل رابطه $E = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$ متعدی و شامل R است . حال ثابت می کنیم E یک رابطه هم ارزی است . از آنجائیکه $1_X \subseteq R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq E$ نتیجه می شود E انعکاسی است . چون $S = R \cup R^{-1} \cup 1_X$ متقارن است، پس برای هر $n \in \mathrm{N}$، $S^n = (S^{-1})^n = (S^n)^{-1}$، یعنی S^n نیز متقارن است . بنابراین،

$$\begin{aligned}
(x,y) \in E &\Rightarrow (\exists n \in \mathrm{N}) \quad (x,y) \in S^n \\
&\Rightarrow (\exists n \in \mathrm{N}) \quad (y,x) \in S^n \\
&\Rightarrow (y,x) \in E,
\end{aligned}$$

در نتیجه E متقارن است . یعنی، E یک رابطه هم ارزی روی X و شامل R است . حال اگر σ رابطه هم ارزی دیگری روی X و شامل R باشد، آنگاه $1_X \subseteq \sigma$ و $R^{-1} \subseteq \sigma^{-1} = \sigma$. بنابراین

$S = R \cup R^{-1} \cup 1_X \subseteq \sigma$. چون $SoS \subseteq \sigma o \sigma \subseteq \sigma$، پس بازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $S^n \subseteq \sigma$، و در نتیجه $E \subseteq \sigma$. پس $E = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^\infty$ کوچکترین رابطه هم ارزی روی X شامل R می باشد که بنا به تعریف با R^e نشان می دهیم .

حال با توجه به مطالب فوق داریم،

لم ۱-۱٤) اگر R یک رابطه روی مجموعه X و R^e کوچکترین رابطه هم ارزی روی X و شامل R باشد، آنگاه $(x,y) \in R^e$ اگر و فقط اگر $x = y$ یا برای $n \in \mathbb{N}$ی، یک دنباله انتقالات بصورت $x = z_1 \to z_2 \to \cdots \to z_n = y$ موجود باشد، بقسمی که برای $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ ، $(z_i, z_{i+1}) \in R$ یا $(z_{i+1}, z_i) \in R$.

تعریف ۱-۱۵) فرض کنیم S یک نیمگروه باشد، رابطه R را روی مجموعه S سازگار راست گوییم اگر :

$$\forall s,t,a \in S, \qquad (s,t) \in R \Rightarrow (sa,ta) \in R \ .$$

آنرا سازگار چپ گوییم، اگر :

$$\forall s,t,a \in S, \qquad (s,t) \in R \Rightarrow (as,at) \in R \ .$$

آنرا سازگار گوییم، اگر :

$$\forall s,s',t,t' \in S, \qquad (s,t) \in R \,\&\, (s',t') \in R \Rightarrow (ss',tt') \in R \ .$$

تعریف ۱-۱٦) یک رابطه هم ارزی را همنهشتی چپ گوییم، اگر سازگار چپ باشد و همنهشتی راست گوییم، اگر سازگار راست باشد .

یک رابطه هم ارزی سازگار را یک همنهشتی گوییم .

قضیه ۱-۱۷) رابطه ρ روی نیمگروه S همنهشتی است، اگر و فقط اگر ρ همنهشتی چپ و راست باشد .

اثبات : رجوع شود به [۱۲] .

نکته : فرض کنیم S یک نیمگروه و $x, y \in S$ دلخواه باشند، $\rho(x, y)$ را بعنوان کوچکترین همنهشتی روی S که شامل (x, y) است در نظر می گیریم .

تبصره : فرض کنیم I یک ایده آل حقیقی و ρ یک همنهشتی روی نیمگروه S باشد . در اینصورت $\rho_I = (I \times I) \cup \{1_S\}$ یک همنهشتی روی S می باشد .

با توجه به تعریف ρ_I بدیهی است که $x\rho_I y$ اگر و فقط اگر $x = y$ یا x و y هر دو در I باشند .

حال S/ρ_I را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$S/\rho_I = \{I\} \cup \{\{x\} : x \in S - I\}.$$

عمل ضرب دو عضو از S/ρ_I را اینگونه در نظر می گیریم که اگر نماینده آنها در $S - I$ قرار گرفت، مشابه ضرب آنها در S و در غیر اینصورت برابر I باشد . با توجه به مطالب فوق بدیهی است که S/ρ_I یک نیمگروه می باشد .

S/ρ_I را ترجیحا با S/I نشان می دهیم و به آن نیمگروه خارج قسمتی ریز [1] می گوئیم .

1-Rees