دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکده علوم

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته زمین‌شناسی(گرایش آبشناسی)

عنوان:

پیش‌بینی نوسانات سطح آب زیرزمینی دشت قروه با استفاده از شبکه عصبی - موجکی

تدوین

امیر صابری‌نصر

استاد راهنما

دکتر محمد نخعی

دی ۱۳۸۹

تقدیر و تشکر

«بسم الله الذی هو بکل شئ علیم»

خداوند بزرگ را سپاس می گویم که دروازه علم و حکمتش را بر بنده کوچکش اندکی گشود و از بیکران علمش قطره‌ای نصیبم ساخت تا این لطف و مرحمت، در قالب این دیباچه مهیا گردد.

در این راه دور، استادی اساتید و معلمی معلمانی بس بزرگوار، همچون چراغی فروزان، رهنگر راه من بود که با شفقت و تدبیر، مرا چون کودکی نوپا، قدم به قدم پیش برده و راه نمایانده اند. هیچ حرف و کلمه ای اندازه و مقدار آن را ندارد تا به رسم سپاس من، به ایشان تقدیم شود. به همین الفاظ اندک و کوچک اکتفا می کنم تا نامی از ایشان در ابتدا برده باشم و سپاسی تقدیمشان؛ که "من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق". با تمام احترام و ادب نام می برم از استاد ارجمند جناب آقای دکتر محمد نخعی، که در تمام این مدت و در قدم به قدم این راه، در حقّم پدری کرده و حق استادی را بر من تمام، هر چند حق شاگردی را بجا نیاوردم. تشکر می کنم از اساتید محترم آقایان دکتر محسن رضایی، دکتر غلامرضا اسدا. . . فردی، دکتر مجید محمدزاده و دکتر لطیف صمدی که در تمام مراحل تحصیل، مرا از تجارب ارزشمند خود بی نصیب نگذاردند. همچنین از جناب آقای دکتر جواد اشجاری که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل کردند کمال سپاس و تشکر را دارم. یاد می کنم از دو اسطوره صبر و شکیبایی، مهر و گذشت "پدر و مادر عزیزم" که اگر نبود یاری بی دریغشان، قامت ناتوان من در برابر سختی ها و مرارت های این راه استوار نمی ماند. همچنین تشکر می کنم از حضور گرم برادران و خواهرانم که خالصانه و صمیمانه در تمام مراحل زندگی مرا همراهی کرده اند.

سپاسگزارم از زحمات خالصانه کارمندان گروه علوم زمین دانشگاه تربیت معلم تهران. به همان اندازه از همراهی همیشگی دوستان عزیزم، آقایان فرج زاده، ودیعتی، خدری، خانی آرانی، منصوری، کریمی، دشتی، مرادی، رستمی، آلبوکردی، رضائیان، حسینی، آزاد، حشمتیان، یونسی، نظری، حاجی زاده، بردبار، حشمتی، صادقیان و محمدی کمال تشکر را دارم.

"حاصل تحقیق پیش رو، شاید جبران گوشه ای از زحماتشان"

تقدیم به:

پدر بزرگوار، مادر عزیز، برادران و خواهران مهربانم

-آنانکه زیر چرخ کبود، زهرچه رنگ تعلق پذیرند، آزادند

- آنانکه دل در گرو پیشرفت و آبادانی ایران دارند

چکیده

شبیه‌سازی سطح آب زیرزمینی با استفاده از مدل‌های عددی نیاز به پارامترهای هیدروژئولوژیکی و ژئولوژیکی مختلفی دارد. در این مدل‌ها شناسایی شرایط مرزی، تعیین داده‌های ورودی، کالیبراسیون و صحت‌سنجی، دشوار، زمان‌بر و پرهزینه می‌باشد. به‌علاوه ترکیب این مدل‌ها با مدل‌های بهینه‌سازی برای یافتن سناریوی مدیریت آب زیرزمینی بهینه، نیاز به صدها بار اجرای برنامه دارد. اما روشی که در سال‌های اخیر مورد توجه مهندسین هیدروژئولوژی قرار گرفته است، استفاده از روش شبکه‌های عصبی مصنوعی می‌باشد. همزمان با گسترش استفاده از ANN، استفاده از آنالیز موجک در زمینه هیدروژئولوژی نیز مطرح گردیده است. ترکیب این دو روش، مدلی با کارایی بهتر در پیش‌بینی فرآیندهای هیدروژئولوژیکی به نام شبکه عصبی-موجکی را به وجود می‌آورد. در این تحقیق نخست مبانی این شبکه‌ها بیان شده، سپس با بهره‌گیری از آن به مطالعه موردی دشت قروه پرداخته شده است. بهترین مدل‌سازی از روش تبدیل موجک گسسته، با موجک‌های db2 و db4 و با شبکه عصبی FNN-LM بدست آمد. سپس نتایج این مدل با نتایج حاصل از مدل عددی MODFLOW مقایسه گردید. نتایج بیانگر آن است که روش شبکه عصبی-موجکی نسبت به روش عددی کارایی بالاتری را در پیش‌بینی نوسانات سطح آب زیرزمینی دارا می‌باشد. در نهایت با توجه به مدل‌های شبکه عصبی-موجکی بدست آمده، به پیش‌بینی نوسانات سطح آب زیرزمینی در این دشت پرداخته شد.

کلید واژه‌ها: آنالیز موجک، دشت قروه، سطح آب زیرزمینی، شبکه عصبی-موجکی، MODFLOW

فهرست

فصل اول: روش پژوهش، تعاریف ۱
۱-۱-مقدمه ۲
۱-۲-تبدیل فوریه ۳
۱-۳-تبدیل فوریه پنجره‌ای ۴
۱-۴-تبدیل موجک ۵
۱-۴-۱-دستگاه موجکی ۶
۱-۴-۲-انواع روش‌های تبدیل موجک ۷
۱-۴-۲-۱-تبدیل موجک پیوسته ۷
۱-۴-۲-۲-تبدیل موجک گسسته ۱۰
۱-۴-۳-تعریف ریاضی تبدیلات موجک پیوسته و تبدیلات موجک گسسته ۱۲
۱-۵-مقدمه‌ای در مورد شبکه‌های عصبی مصنوعی ۱۳
۱-۵-۱-ساختار کلی شبکه عصبی مصنوعی ۱۴
۱-۵-۲-انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی ۱۶
۱-۵-۲-۱-شبکه‌های پیشرو ۱۶
۱-۵-۲-۲-شبکه‌های برگشتی ۱۶
۱-۵-۲-۳-پرسپترون چند لایه ۱۷
۱-۵-۲-۴-شبکه عصبی شعاعی ۱۷
۱-۵-۳-الگوریتم‌های مختلف آموزش ۱۷
۱-۵-۳-۱-الگوریتم پس‌انتشار خطا ۱۸
۱-۵-۳-۲-الگوریتم برویدن، فلکچر، گلدفارب، شانو ۱۹
۱-۵-۳-۳-روش لونبرگ-مارکوآت ۱۹
۱-۵-۳-۴-تنظیم بایزین ۲۱
۱-۵-۴-توابع فعال‌سازی متداول ۲۲
۱-۵-۴-۱-تابع همانی ۲۲
۱-۵-۴-۲-تابع پله‌ای ۲۲
۱-۵-۴-۳-سیگموید دودویی(سیگموید لجستیک) ۲۳
۱-۵-۴-۴-سیگموید دوقطبی ۲۳
۱-۵-۵-تقسیم‌بندی شبکه‌ها از نظر نوع آموزش ۲۴

فهرست

۱-۵-۵-۱-آموزش نظارت شده ۲۴
۱-۵-۵-۲-آموزش غیرنظارت شده ۲۴
۱-۵-۶-آموزش شبکه‌های عصبی مصنوعی ۲۴
۱-۵-۷-تعداد لایه‌ها و نرون‌های میانی ۲۵
۱-۵-۸-صحت‌سنجی ۲۶
۱-۵-۹-معیار ارزیابی کارایی و خطای مدل ۲۷
۱-۶-مروری بر تحقیقات انجام یافته ۲۸
فصل دوم: زمین‌شناسی، هیدروژئولوژی و هیدرولوژی ۳۶
۲-۱- مقدمه ۳۷
۲-۲- موقعیت جغرافیایی دشت قروه ۳۷
۲-۳-زمین‌شناسی منطقه مورد مطالعه ۳۸
۲-۳-۱-ژئومورفولوژی ۳۸
۲-۳-۲-چینه‌شناسی و سنگ‌شناسی ۳۹
مجموعه تریاس ۳۹
مجموعه‌تریاس ژوراسیک ۴۰
مجموعه میوپلیوسن و کواترنری ۴۱
مجموعه ماگماتیزم ۴۲
۲-۳-۳-زمین‌شناسی ساختمانی و تکتونیک ۴۴
۲-۴- هواشناسی ۴۶
۲-۴-۱- توزیع بارندگی سالانه ۴۶
۲-۴-۲- توزیع بارندگی فصلی ۴۷
۲-۴-۳- توزیع بارندگی ماهانه ۴۷
۲-۴-۴- دما ۴۸
۲-۴-۵- بررسی اقلیم منطقه ۴۹
۲-۵- هیدروژئولوژی ۵۰
۲-۵-۱- وضعیت فیزیکی آبخوان ۵۰
۲-۵-۲- وضعیت هیدرولیکی آبخوان ۵۴
۲-۵-۲-۱- تغییرات سطح آب زیرزمینی ۵۴

فهرست

۲-۵-۲-۲- جهت جریان و تراز آب زیرزمینی ۵۶
۲-۵-۳- ضریب قابلیت انتقال آب ۵۸
۲-۵-۴- آبنمود معرف ۵۹
۲-۵-۵-وضعیت بهره‌برداری از منابع آب زیرزمینی ۶۳
۲-۵-۵-۱- چاه‌ها ۶۳
۲-۵-۵-۲- چشمه‌ها ۶۴
۲-۵-۵-۳- قنوات ۶۴
۲-۵-۶- بیلان آب زیرزمینی ۶۴
۲-۵-۶-۱- محدوده بیلان ۶۵
۲-۵-۶-۲- دوره‌های بیلان ۶۵
۲-۵-۶-۳- پارامترهای تغذیه‌کننده بیلان ۶۵
۲-۵-۶-۳-۱- ورودی آب زیرزمینی ۶۵
۲-۵-۶-۳-۲- بارندگی ۶۷
۲-۵-۶-۳-۳- تغذیه از رواناب‌ها ۶۷
۲-۵-۶-۳-۴- تغذیه از طریق چاه‌های کشاورزی و صنعت ۶۸
۲-۵-۶-۳-۵- تغذیه از طریق چاه‌های شرب ۶۸
۲-۵-۶-۳-۶- تغذیه از طریق چشمه‌ها و قنوات ۶۸
۲-۵-۶-۴- پارامترهای تخلیه‌کننده بیلان ۶۸
۲-۵-۶-۴-۱- تخلیه توسط چاه‌ها ۶۸
۲-۵-۶-۴-۲- زهکش ۶۸
۲-۵-۶-۴-۳- تخلیه از طریق چشمه‌ها و قنوات ۶۹
۲-۵-۶-۴-۴- خروجی آب زیرزمینی ۶۹
۲-۵-۶-۴-۵- ضریب ذخیره و تغییرات حجم مخزن ۶۹
فصل سوم: مدل‌سازی، بحث، تجزیه و تحلیل ۷۱
۳-۱- مقدمه ۷۲
۳-۲- تعیین و آماده‌سازی داده‌ها ۷۲
۳-۳- تبدیل موجک ۷۴
۳-۳-۱- تبدیل موجک گسسته ۷۴

فهرست

۳-۳-۲-تعیین نوع موجک..... ۷۵

۳-۳-۳-حداکثر سطح تجزیه و سطح تجزیه بهینه..... ۷۶

۳-۴- تعیین معماری شبکه عصبی..... ۷۷

۳-۵- مدل‌سازی سطح آب زیرزمینی در چاه‌های مشاهده‌ای موجود در منطقه مورد مطالعه ۸۱

۳-۶- مقایسه نتایج حاصل از WNN با مدل عددی MODFLOW..... ۸۴

۳-۷- پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در پیزومترهای موجود در منطقه مورد مطالعه..... ۹۶

۳-۸- پیش‌بینی سطح آب در مناطق فاقد پیزومتر در محدوده مورد مطالعه و ترسیم منحنی هم‌تراز با استفاده از درونیابی..... ۱۰۸

فصل چهارم: نتایج و پیشنهادات..... ۱۱۵

۴-۱- نتیجه‌گیری..... ۱۱۶

۴-۲- پیشنهادات..... ۱۱۸

منابع..... ۱۱۹

Reference..... ۱۲۲

پیوست۱..... ۱۲۵

پیوست۲..... ۱۲۸

فصل اول:

روش پژوهش

تعاریف

۱-۱-مقدمه:

کشور ایران با میانگین سالانه ۲۵۰ میلیمتر بارش یکی از کشورهای خشک دنیا محسوب می‌شود و بنابراین لزوم توجه به منابع آب زیرزمینی امری حیاتی می‌باشد. بهره‌برداری بی‌رویه از منابع آب زیرزمینی باعث به هم خوردن تعادل طبیعی آن شده و تراز آب زیرزمینی در آبخوان‌های بسیاری از نقاط کشور منفی شده است. همچنین عدم اعمال مدیریت و یا اعمال مدیریت‌های غیرصحیح در این دشت‌ها باعث بروز مشکلات ناشی از افت آب و یا اثرات ناشی از استفاده‌های غیربهینه از این منابع گردیده است. با اعمال روش‌های مدیریتی مناسب در استفاده از منابع آب موجود ، علاوه بر اینکه می‌توان مخارج سنگین توسعه و بهره‌برداری از این منابع را کاست، میزان استفاده از این منابع را نیز می‌توان بهینه کرد. مدل‌سازی و پیش‌بینی صحیح سطح آب زیرزمینی و منابع آبی کمک شایانی به پروژه‌های شهری و عمرانی و همچنین مدیریت منابع آبی می‌کند.

اصولاً مدل ابزاری طراحی شده برای ارائه نسخه‌ای ساده شده از واقعیت یک پدیده یا سیستم است (Anderson & Woessner, 1992) و مدل هیدروژئولوژیکی مدلی است که تقریباً نشان‌دهنده کلیه فرآیندهایی است که در یک آبخوان رخ می‌دهد. لذا انتخاب مدلی که بتواند نوسانات آب زیرزمینی را به طور قابل قبولی پیش‌بینی کند امری ضروری به نظر می‌رسد.

به طور معمول پیش‌بینی‌های هیدروژئولوژی توسط تجزیه تحلیل رگرسیونی، مدل‌های تصادفی یا استوکستیک و ... صورت می‌گیرد ولی در سالهای اخیر استفاده از شبکه عصبی مصنوعی(ANN)، تئوری فازی و تئوری موجک(wavelet) در هیدروژئولوژی و منابع آبی در حال گسترش است. از مطالعاتی که در زمینه مدل‌سازی منابع آبی با این روشها صورت گرفته است چنین برآورد می‌شود که این روش‌ها از نظر دقت و مدت زمان پیش‌بینی چندان راضی کننده نبوده‌اند. در این تحقیق از یک مدل ترکیبی جدید تحت عنوان شبکه عصبی _ موجکی به منظور پیش‌بینی سطح آب در دشت قروه استفاده شده است. این مدل از مزیت‌های شبکه عصبی مصنوعی و آنالیز موجک با هم استفاده می‌کند، بنابراین کارایی قابل قبولی را از خود در شبیه‌سازی و پیش‌بینی نشان می‌دهد.

تبدیل موجک که در این تحقیق به کار می‌رود یکی از مهم‌ترین تبدیلات ریاضی در حوضه پردازش سیگنال و تصویر است. یکی از برتری‌هایی که آنالیز موجک را به عنوان یک ابزار قدرتمند در عرصه علم هیدروژئولوژی و هیدرولوژی قرار داده و باعث گسترش روزافزون آن در زمینه‌های گوناگون شده توانایی آن در پیش‌بینی رفتار کوتاه مدت و دراز مدت یک پدیده است.

برای پردازش سیگنال تبدیلات ریاضی زیادی را می‌توان استفاده کرد که از آن جمله می‌توان به آنالیز فوریه و آنالیز فوریه پنجره‌ای اشاره کرد. حال باید دید که چه نیازی به استفاده از آنالیز موجک است؟ ابتدا توضیح مختصری در مورد هریک از این تبدیلات و معایب و مزایای آن‌ها ارائه کرده و سپس اهمیت تبدیل موجک بیان می‌شود.

۱-۲-تبدیل فوریه(Fourier Transform)

در قرن ۱۹ میلادی، یک ریاضیدان فرانسوی به نام جوزف فوریه نشان داد که هر تابع متناوب را می‌توان بر حسب مجموع نامتناهی از توابع پایه سینوسی و کسینوسی (و یا تابع نمایی متناوب مختلط) نوشت. سال‌ها بعد از کشف این خاصیت شگفت انگیز توابع متناوب، این ایده تحت عنوان تبدیل فوریه(Fourier Transform) به سایر توابع نیز تعمیم داده شد. پس از این تعمیم بود که تبدیل فوریه به عنوان ابزاری کارآمد در محاسبات کامپیوتری وارد گردید.

این تبدیل یکی از معروف‌ترین تبدیلات ریاضی برای بیرون کشیدن اطلاعات مفید، در یک سیگنال سری زمانی (سیگنال سری زمانی در شکل اصلی‌اش) می‌باشد. این تبدیل توسط معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$ رابطه(۱-۱)

که در آن t زمان، f فرکانس و x(t) سیگنال پیوسته در زمان می‌باشد(مرتینز، ۱۹۹۸).

اگر مقدار این انتگرال بزرگ باشد آنگاه گفته می‌شود که سیگنال x(t) در فرکانس f مولفه فرکانسی غالبی دارد. مفهوم این عبارت این است که یک بخش عمده‌ای از سیگنال از فرکانس f تشکیل شده است. اگر مقدار انتگرال کوچک باشد بدین معنی است که سیگنال به طور عمده مولفه فرکانسی f را ندارد. نهایتاً اگر مقدار این انتگرال صفر باشد به معنی این است سیگنال به هیچ وجه دارای فرکانس f نمی‌باشد.

در حقیقت آنالیز فوریه یک سیگنال را از قلمرو زمانی به قلمرو فرکانسی می‌برد(شکل ۱-۱). در مورد خیلی از سیگنال‌ها، آنالیز فوریه خیلی مفید می‌باشد چرا که ظرفیت فرکانس سیگنال دارای اهمیت زیادی می‌باشد اما سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چه نیازی به تکنیک‌های دیگر نظیر موجک است. تبدیل فوریه دارای یک ایراد جدی است و بدین صورت که در تبدیل از

حیطه زمان به حیطه فرکانس اطلاعات زمانی از دست می‌رود. در هنگام نگاه کردن به تبدیل فوریه یک سیگنال غیرممکن است که بتوان گفت چه فرکانسی در چه زمانی اتفاق افتاده است. اگر ویژگی‌های سیگنال با زمان تغییر ننماید(سیگنال ایستا) این ایراد خیلی جدی نیست اما اکثر سیگنال‌های مهم ناایستا هستند. بنابراین آنالیز فوریه ابزار مناسبی برای آشکارسازی مشخصات سیگنال‌های غیرایستا(دریفت، ترند، تغییرات ناگهانی، شروع و پایان فرکانس‌ها) نمی‌باشد(امید صیادی، ۱۳۸۷).

شکل(۱-۱) طرح شماتیک تبدیل فوریه

۱-۳-تبدیل فوریه پنجره‌ای(Short Time Fourier Transform)

برای رفع نقص آنالیز فوریه، آنالیز فوریه پنجره‌ای(شکل ۱-۲) معرفی شد. در این تبدیل می‌توان یک سیگنال ناایستا را به بخش‌های کوچکی تقسیم کرد، به طوری که هر یک از این بخش‌ها را می‌توان ایستا فرض کرد(Gerald Kaiser, 1994). بدین منظور از یک تابع پنجره w استفاده می‌شود که طول آن برابر است با حداقل طول مورد نیاز برای آن که فرض ایستا بودن قطعات جدا شده سیگنال معتبر باشد. STFT یک سیگنال چیزی جز حاصل‌ضرب FT یک سیگنال در یک تابع پنجره نیست(Ruey Hwa Loh, 2003). بدین ترتیب، تبدیل فوریه زمان کوتاه سیگنال x(t) با استفاده از پنجره زمانی w(t) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$STFT_x^w(\tau, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w^*(t-\tau)e^{-j2\pi ft}dt \qquad \text{رابطه(۱-۲)}$$

که در آن f متغیر فرکانسی و τ متغیر زمانی است.

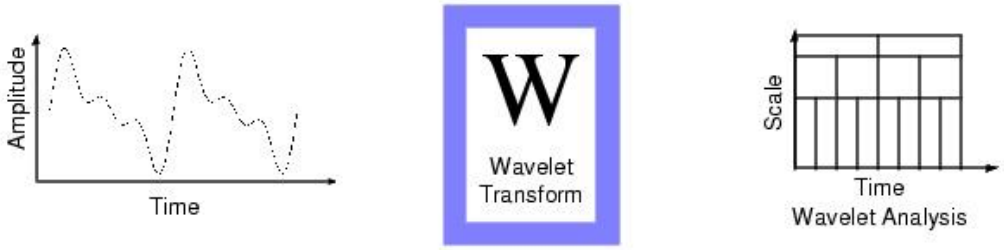
شکل(۱-۲) طرح شماتیک آنالیز فوریه پنجره‌ای

ایراد این روش نیز این است که هنگامی که یک پنجره‌ای با طول مشخص انتخاب می‌کنیم این پنجره برای تمام فرکانس‌ها یکسان می‌باشد به عبارت دیگر تفکیک فرکانسی برای تمام فرکانس‌ها ثابت می‌باشد. برای مثال اگر از یک پنجره عریض استفاده شود، تفکیک‌پذیری فرکانسی خوب ولی تفکیک‌پذیری زمانی ضعیف خواهد بود و برعکس. در مورد بعضی از سیگنال‌ها نیاز داریم که این روش قابل انعطاف‌تر باشد یعنی نیاز داریم که طول پنجره را به منظور بدست آوردن اطلاعات دقیق زمانی و مکانی تغییر دهیم(Holschneider.M.). بدین منظور از تبدیل موجک استفاده می‌کنیم.

۱-۴-تبدیل موجک(Wavelet Transform)

مشکل تفکیک‌پذیری ثابت در تبدیل فوریه پنجره‌ای ریشه در اصل عدم قطعیت هایزنبرگ دارد. طبق این اصل نمی‌توان توصیف زمان-فرکانس یک سیگنال را به طور دقیق داشت، یعنی نمی‌توان فهمید که در یک سیگنال به طور دقیق چه مولفه‌های فرکانسی در چه زمآن‌هایی وجود دارد، بلکه تنها می‌توان فهمید که در کدام بازه‌های زمانی، چه باند فرکانسی موجود است. اگرچه مشکلات تفکیک‌پذیری زمان و فرکانس در نتیجه یک پدیده فیزیکی (اصل عدم قطعیت هایزنبرگ) بوده و ربطی به نوع تبدیل مورد استفاده ندارد، می‌توان از یک رویکرد جایگزین برای تحلیل سیگنال‌ها استفاده نمود که اصطلاحاً تحلیل چند ریزه‌ساز(Multi-resolution analysis) نامیده می‌شود. این روش سنگ بنای تبدیل موجک است.

در حقیقت تبدیل موجک یک تکنیک پنجره‌ای با پنجره‌های متغیر می‌باشد که به ما اجازه می‌دهد از پنجره‌های با طول بلند در جایی که اطلاعات فرکانس پایین را با تفکیک‌پذیری بالا می‌خواهیم و از پنجره‌های با طول کوتاه در جایی که اطلاعات فرکانس بالا را با تفکیک‌پذیری پایین می‌خواهیم، استفاده نماییم(Hubbard, 1996). شکل ۱-۳ شماتیک تبدیل موجک را نشان می‌دهد.



شکل(۱-۳) طرح شماتیک تبدیل موجک

از نظر تاریخی مفهوم موجک‌ها در سال ۱۹۸۰ مطرح شد. در سال ۱۹۸۲، ژان مرلت(John Morlet, 1982) یک مهندس ژئوفیزیک فرانسوی، مفهوم تبدیل موجک را کشف کرد و بدین وسیله ابزار جدیدی برای تحلیل امواج زلزله یافت. مرلت موجک‌ها را به عنوان خانواده‌ای از توابع که از اتساع و انتقال تابع $\phi(t)$ به‌دست می‌آید، معرفی کرد. تابع $\phi(t)$ موجک مادر نامیده می‌شود و $\phi_{a,b}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \phi(\frac{t-b}{a}) \qquad \text{رابطه(۱-۳)}$$

که a پارامتر مقیاس اتساع و b پارامتر انتقال است که محل موجک را مشخص می‌کند(Addison p.s., 2002). خود تابع موجک مادر باید در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\{\phi_{a,b}(t)\}$ پایه‌ای برای $L^2(R)$ است.

۲. $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 0$

۳. $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|dt < \infty$

۴. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\phi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

۱-۴-۱-دستگاه موجکی

گسترش یک سیگنال بر اساس یک دستگاه موجکی یکتا نیست، زیرا دستگاه‌های موجکی متفاوتی را می‌توان در یک فضا تعریف کرد ولی همه آن‌ها دارای خصوصیات زیر هستند:

۱. یک دستگاه موجکی عناصر اصلی سازنده و نمایش دهنده یک سیگنال یا یک تابع است. در واقع یک مجموعه دوبعدی(معمولاً یک پایه) است که به وسیله آن خانواده‌ای از سیگنال‌های یک بعدی را بسط داده می‌شود. به بیان دیگر، اگر $\{\psi_{k,j}\}\ k,j \in z$ یک دستگاه موجکی باشد آنگاه سیگنال f(t) را می‌توان به صورت $f(t)=\sum_k \sum_j a_{j,k}\psi_{j,k}(t)$ نشان داد.

۲. با بسط یک تابع با استفاده از موجک‌ها، می‌توان سیگنال را بر اثر زمان – بسامد موضعی‌سازی کرد و این بدان معناست که انرژی سیگنال در تعداد کمی از ضرایب $a_{j,k}$ ذخیره می‌شود.

تبدیل فوریه، یک تابع از متغیرهای پیوسته را به دنباله‌ای از ضرایب یک‌بعدی تصویر می‌کند اما تبدیل موجکی گسسته، تابع را به دنباله‌ای از ضرایب دوبعدی تصویر می‌کند و به همین دلیل است که می‌توان سیگنال را در زمان و مکان موضعی‌سازی کرد. در واقع نمایش یک تابع به وسیله موجک‌ها بیشتر شبیه یک قطعه موسیقی است که موضع یک نت نشان می‌دهد، چه زمانی این نت نواخته می‌شود و بسامد و تکرار آن چگونه است.

گسترش یک سیگنال بر اساس موجک‌ها امکان توصیف دقیق و موضعی از سیگنال و بررسی جزء به جزء خصوصیات سیگنال را فراهم می‌کند. از سوی دیگر می‌توان متناسب با کاربرد مورد نظر از دستگاه‌های مختلف استفاده کرد، زیرا نه‌تنها دستگاه‌های موجکی متنوع هستند بلکه تابع موجک نیز یکتا نیست. از همه مهم‌تر این است که تعمیم و محاسبه تبدیلات موجک نیاز چندانی به محاسبات پیشرفته نظیر انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری ندارد. در واقع بیشتر اعمالی که برای این محاسبات انجام می‌شود، اعمال مقدماتی جمع و ضرب هستند(فرزان‌نیا، ۱۳۸۶).

۱-۴-۲-انواع روش‌های تبدیل موجک

۱-۴-۲-۱-تبدیل موجک پیوسته

تبدیل موجک پیوسته به عنوان روشی جایگزین بر تبدیل فوریه پنجره‌ای ارائه گردید و هدف آن فائق آمدن بر مشکلات مربوط به تفکیک‌پذیری در تبدیل فوریه پنجره‌ای است. در این تبدیل مشابه تبدیل فوریه پنجره‌ای، سیگنال مورد نظر در یک تابع(موجک) ضرب می‌شود که در حقیقت نقش همان تابع پنجره را دارد(Matlab, version 7.6). همچنین مشابه با قبل، تبدیل موجک نیز

به طور جداگانه بر روی قطعه‌های زمانی مختلف سیگنال انجام می‌شود. اما به طور کلی دو اختلاف عمده با تبدیل فوریه پنجره‌ای دارد که عبارتند از:

۱. در تبدیل موجک، از سیگنال پنجره شده، تبدیل فوریه گرفته نمی‌شود و بنابراین پیک‌های منفرد متناظر با یک سینوسی، یا به عبارت دیگر فرکانس‌های منفی محاسبه نمی‌شود.

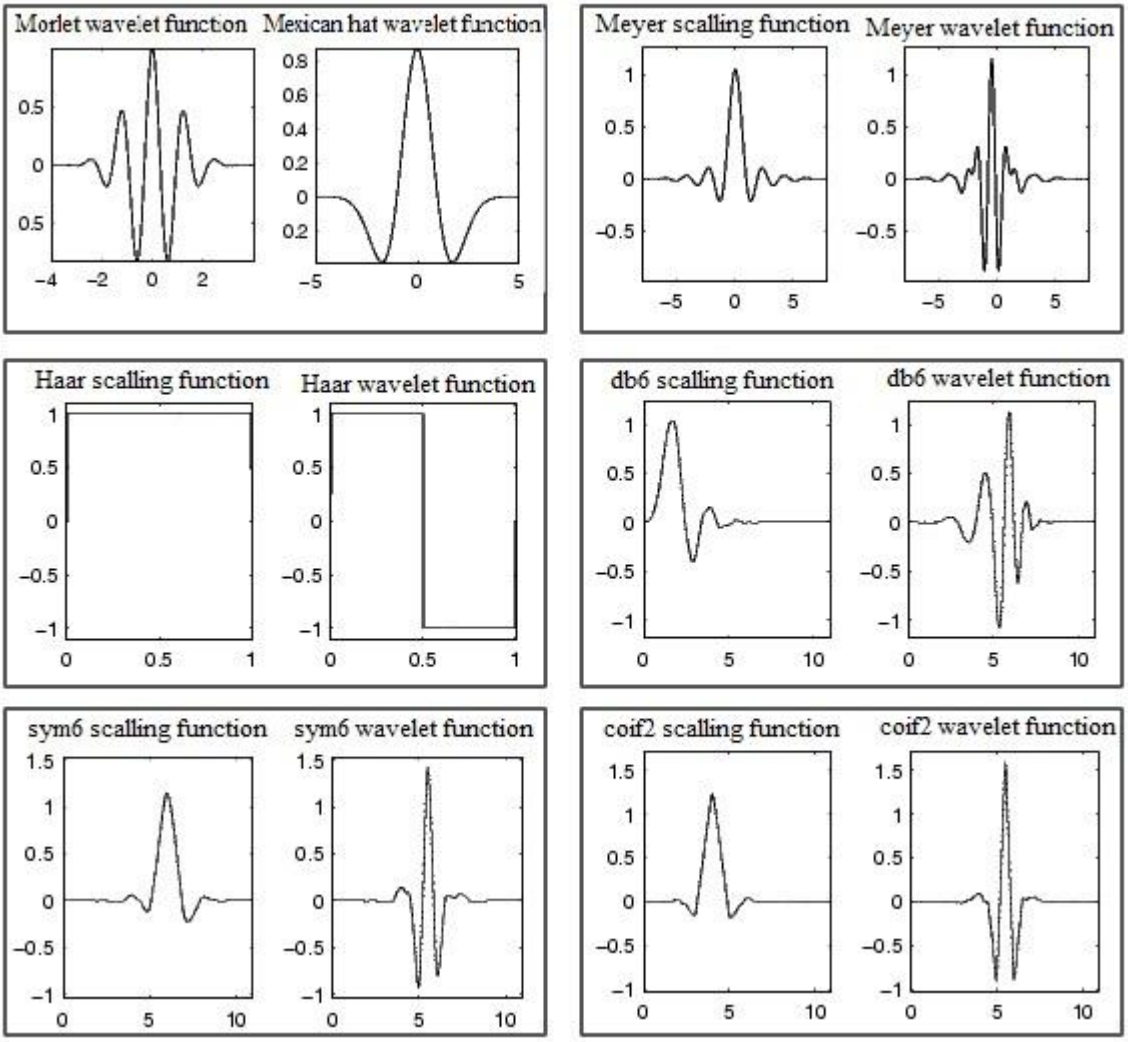
۲. در تبدیل موجک، عرض پنجره به موازات تغییر مولفه‌های فرکانسی تغییر می‌کند که به طور حتم مهم‌ترین ویژگی تبدیل موجک است.

بر این اساس تبدیل موجک پیوسته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$CWT_x^{\psi}(\tau,s) = \Psi_x^{\psi}(\tau,s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^*(\frac{t-\tau}{s})dt \qquad \text{رابطه(۱-۴)}$$

که در آن τ و s به ترتیب پارامترهای انتقال و مقیاس می‌باشند(Raghuveer M.Rao & Ajit S.Bopardikar, 1998). مفهوم انتقال به‌طور دقیق مشابه با مفهوم انتقال زمانی در تبدیل فوریه پنجره‌ای است که میزان جابجایی پنجره را معلوم می‌کند و به وضوح، اطلاعات زمانی تبدیل را دارد. اما بر خلاف تبدیل فوریه پنجره‌ای، در تبدیل موجک به طور مستقیم پارامتر فرکانس نداریم. در عوض، پارامتر مقیاس را داریم که به طور معکوس با فرکانس ارتباط دارد(s=1/f). در رابطه(۱-۴)، ψ تابع پنجره است که اصطلاحاً موجک مادر نامیده می‌شود. واژه موجک به معنای موج کوچک می‌باشد. دلیل استفاده از واژه کوچک، محدود بودن و کوتاه بودن تابع پنجره می‌باشد. علت استفاده از واژه موج نیز به دلیل ماهیت نوسانی این تابع است. واژه مادر نیز به این منظور به کار برده می‌شود که تمام نسخه‌های انتقال‌یافته و مقیاس‌شده، همگی از روی یک تابع اولیه به‌دست می‌آیند که اصطلاحاً موجک مادر نامیده می‌شود. به بیان علمی، موجک مادر یک تابع الگو جهت تولید سایر پنجره‌ها است(Paul s Addison, 2002).

مقیاس کردن، به عنوان یک اپراتور ریاضی، سیگنال را منقبض یا منبسط می‌کند. به این ترتیب، در مقیاس‌های بالا که سیگنال منبسط می‌شود، جزئیات را خواهیم داشت و در مقیاس‌های پایین که سیگنال منقبض می‌شود، کلیات یا تقریب‌ها را خواهیم داشت. متغیر مقیاس در تعریف تبدیل موجک، در مخرج ظاهر شده است. بنابراین به ازای مقادیر $s > 1$ سیگنال منبسط شده و به ازای $s < 1$ سیگنال فشرده می‌گردد.



شکل(۱-۴) شکل برخی از موجک‌های یک بعدی

تبدیل موجک در حقیقت اندازه‌گیری شباهت بین سیگنال و توابع پایه(موجک‌ها) است. منظور از شباهت در این بحث، شباهت‌سنجی بین محتوای فرکانسی است. به بیان دیگر، ضرایب تبدیل موجک بیان‌گر میزان نزدیکی سیگنال به موجک در مقیاس مورد نظر است. بدین ترتیب، اگر سیگنال مورد نظر یک مولفه برجسته در فرکانس متناظر با مقیاس مورد تحلیل داشته باشد، در این صورت موجک مقیاس شده، شبیه سیگنال مورد نظر خواهد بود. بنابراین ضریبی از تبدیل موجک پیوسته که در این مقیاس محاسبه می‌شود مقداری نسبتاً بزرگ خواهد داشت. شکل(۱-۴) برخی از موجک‌های یک‌بعدی را نشان می‌دهد.

۱-۴-۲-۲-تبدیل موجک گسسته

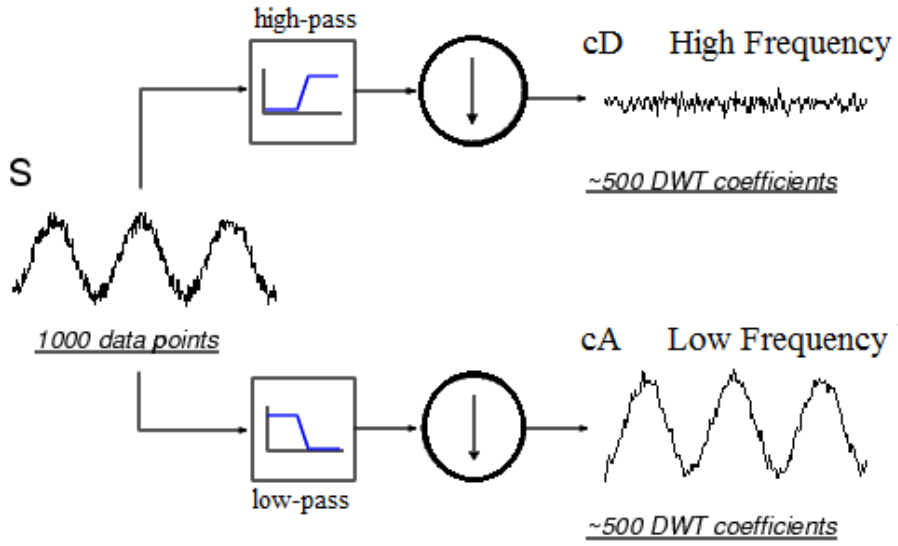
این تبدیل از لحاظ پیاده‌سازی بسیار ساده‌تر و بهینه‌تر است و از افزایش بار محاسباتی جلوگیری می‌کند. اصول تبدیل موجک گسسته به روشی تحت عنوان کدگذاری زیرباند(Subband Coding) برمی‌گردد که در سال ۱۹۷۶ توسط Crochiere, Weber, Flanagan بر روی سیگنال های صوتی انجام دادند. ایده اصلی این روش مشابه تبدیل موجک پیوسته است که در آن نوعی توصیف زمان-مقیاس از سیگنال گسسته با استفاده از فیلترهای دیجیتال ارائه می‌گردد. به خاطر داریم که تبدیل موجک، حاصل شباهت‌سنجی بین محتوای فرکانسی(مقیاسی) سیگنال و تابع موجک در مقیاس‌های مختلف است. برای محاسبه تبدیل موجک پیوسته نیز پنجره مورد نظر منقبض یا منبسط شده و شیفت می‌یابد و در هر موقعیت، از حاصل‌ضرب آن در سیگنال انتگرال زمانی گرفته می‌شود. در حالت گسسته، فیلترهایی با فرکانس قطع‌های مختلف برای تحلیل سیگنال در مقیاس‌های متفاوت به کار برده می‌شود. با عبور سیگنال از فیلترهای بالاگذر و پایین‌گذر، فرکانس‌های مختلف آن تحلیل می‌شود. در حالت گسسته، تفکیک‌پذیری سیگنال توسط عملکردهای فیلترها کنترل می‌شود و مقیاس از طریق Dawnsampling و Upsampling تغییر می‌کند. به‌طور معمول، این روند تغییر نرخ نمونه‌ها بر روی یک شبکه دوتایی(dyadic)، با $s_0=2$ و $\tau_0=1$ انجام می‌پذیرد. بنابراین مقیاس‌ها و شیفت‌های زمانی متناظر به ترتیب عبارتند از $s=2^j$ و $\tau=k2^j$.

Upsampling افزایش آهنگ نمونه‌برداری با اضافه کردن نمونه های جدید به سیگنال می‌باشد. این عمل تعداد نمونه‌های یک سیگنال را با ضریب n افزایش می‌دهد. Downsampling نیز کاهش آهنگ نمونه‌برداری سیگنال با حذف بعضی نمونه‌هاست. این عمل با ضریب n تعداد نمونه‌های یک سیگنال را n مرتبه در زمان کاهش می‌دهد(Michael Weeks,2007).

روند پردازش با تبدیل موجک گسسته چنین آغاز می‌شود که در ابتدا سیگنال از یک فیلتر دیجیتال پایین‌گذر نیم‌باند با پاسخ ضربه h[n] عبور می‌کند، و لذا خروجی فیلتر با کانولوشن ورودی و پاسخ ضربه فیلتر برابر است. در نتیجه این عمل فیلترینگ، تمام مولفه‌های فرکانسی که بیشتر از نصف بزرگترین فرکانس موجود در سیگنال باشند حذف می‌شوند. از آنجا که بیشترین فرکانس موجود در سیگنال خروجی فیلتر برابر با $\pi/2$ رادیان است، نیمی از نمونه‌ها قابل حذف‌اند. لذا با حذف یکی در میان نمونه‌ها، طول سیگنال نصف خواهد شد بدون این‌که اطلاعاتی را از دست

داده باشیم. روند مشابهی نیز با استفاده از یک فیلتر دیجیتال بالاگذر نیم‌باند با پاسخ ضربه g[n] انجام می‌پذیرد. در نتیجه در خروجی اولین مرحله از اعمال تبدیل موجک، دو نسخه، یکی بالاگذر و دیگری پایین‌گذر، با طول کاهش یافته(نصف شده) از سیگنال اولیه به فرم شکل(۱-۵) به‌دست می‌آیند.

با این عمل، تفکیک‌پذیری زمانی نصف شده و در مقابل تفکیک‌پذیری فرکانسی دو برابر می‌شود. این روند را می‌توان مجدداً بر روی نسخه پایین‌گذر شده اعمال نمود و در هر مرحله، با کاهش تفکیک‌پذیری زمانی به میزان نصف مرحله قبل، تفکیک‌پذیری فرکانسی را دو برابر نمود. این ایده برای محاسبه تبدیل موجک گسسته، به روش بانک‌فیلتر مشهور است. می‌توان دید که ضرایب خروجی فیلتر پایین‌گذر شکل اولیه سیگنال را دنبال می‌کنند، به همین دلیل به این ضرایب، تقریب(Approximation) گفته می‌شود. همچنین ضرایب خروجی فیلتر بالاگذر، جزئیات فرکانس بالای سیگنال را در بر دارند، به همین دلیل به این ضرایب، جزئیات(Detail) گفته می‌شود(شکل ۱-۵). با افزایش تعداد مراحل تبدیل، میزان جزئیات نیز کاهش می‌یابد.



شکل(۱-۵) تجزیه موج اولیه به امواج ثانویه تقریب و جزئیات

باید دقت داشت که تعداد مراحل مورد نیاز برای تبدیل موجک گسسته، به خصوصیات فرکانسی سیگنال مورد تحلیل بستگی دارد. معمولاً این سطح تجزیه از طریق فرمول INT(lg n) بدست