دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

بررسی تقارن شکل ناوردایی معادله ی کلاین - گوردون با برخی پتانسیل های فیزیکی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک نظری

نویسنده:

عثمان حاتمی

استاد راهنما

دکتر محمد رضا ستاره

مهرماه 1387

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک نظری آقای عثمان حاتمی

تحت عنــوان:

بررسی تقارن شکل ناوردایی معادله ی کلاین _ گوردن با برخی پتانسیل های فیزیکی

در تاریخ ۱۳۸۷/۷/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی قرار گرفت و با درجه .... نمره .... به تصویب رسید.

۱ـ استاد راهنمای پایان نامه: دکتر محمد رضا ستاره .... استادیار دانشگاه کردستان

۲ـ داور (خارجی): دکتر هادی گودرزی .... استادیار دانشگاه ارومیه

۳ـ داور (داخلی): دکتر فاطمه طاعتی .... استادیار دانشگاه کردستان

۸۷/۷/۱۷

دکتر کمال شا نظری

معاون پژوهشی و نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه

دانشگاه کردستان

دانشکده علوم پایه

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم

قدردانی و تشکر

با کمال ادب و احترام، مراتب تقدیر و تشکر خودم را از استاد راهنمای خوبم آقای دکتر محمدرضا ستاره، که تجربیات و آموخته های خود را سخاوتمندانه در اختیارم قرار دادند و با مساعدت و راهنمایی هایشان در انجام این پروژه مرا یاری نمودند، ابراز می نمایم و اکنون که به پایان این دوره‌ی تحصیلی رسیده‌ام، دوست دارم که صمیمانه ترین و خالصانه ترین سپاس گزاری هایم را تقدیم ایشان کنم.

از کلیه‌ی دوستان عزیزم که مرا در انجام این پروژه کمک کردند بخصوص آقایان عبدالله حسینی ، ابوذر فلاح پور و کمال قادری تشکر و قدردانی می کنم.

چکیده

هدف ما در این رساله بررسی و مطالعه‌ی روش شکل ناوردایی برای یافتن جواب های دقیق معادله‌های نسبیتی کلاین ـ گوردن و دیراک با برخی از پتانسیل های فیزیکی است. در این روش ابتدا با استفاده از تابع موج حالت پایه یک ابر پتانسیل تعریف می کنیم و به کمک آن یک جفت پتانسیل همزاد می سازیم. سپس ارتباط بین پارامترهای موجود در پتانسیل های همزاد را طبق شرط شکل ناوردایی پتانسیل ها تعیین می کنیم و سرانجام با محاسبات ریاضی جواب های معادلات بالا را که شامل ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی است، به دست می آوریم.

فهرست

چکیده . . . . پنج

۱ مقدمه

۲ مکانیک کوانتمی ابر تقارن و شکل ناوردایی

۲—۱ پتانسیل های همزاد ۴

۲—۲ ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی ۶

۲—۳ شکسته شدن ابرتقارن ۷

۲—۴ تسلسل هامیلتونی ها ۸

۲—۵ پتانسیل های شکل ناوردا ۱۱

۳ مکانیک کوانتمی نسبیتی

۳—۱ نماد گذاری ۱۴

۳—۲ معادله ی کلاین ـ گوردن برای ذره‌ی آزاد ۱۶
۳—۳ حد غیر نسبیتی معادله ی کلاین ـ گوردن برای ذره‌ی آزاد ۱۷
۳—۴ برهم کنش یک ذره‌ی بدون اسپین با میدان الکترومغناطیسی ۱۸
۳—۵ حد غیر نسبیتی معادله‌ی کلاین ـ گوردن برای ذره در میدان الکترومغناطیسی ۱۹
۳—۶ معادله‌ی کلاین ـ گوردن با پتانسیل های اسکالر و برداری ۲۰
۳—۷ معادله‌ی دیراک ۲۲
۳—۸ معادله ی دیراک با پتانسیل های اسکالر و برداری ۲۶

۴ حل های دقیق معادله‌ی کلاین ـ گوردون

۴—۱ ذره‌ی باردار بدون اسپین در میدان مغناطیسی متغیر ۳۱
۴—۲ پتانسیل های اسکالر و برداری از نوع $S(x) = S_0 f(x)$ و $V(x) = V_0 f(x)$ ۳۵
۴—۲—۱ حالت اول : $f(x) = \tanh(x)$ ۳۵
۴—۲—۲ حالت دوم : $f(x) = -e^{-x}$ ۳۷
۴—۲—۳ حالت سوم : $f(x) = x/2$ ۳۹
۴—۳ پتانسیل هالتن تعمیم یافته ۴۰
۴—۳—۱ پتانسیل هالتن استاندارد ۴۲
۴—۳—۲ پتانسیل وود ساکسون ۴۳
۴—۴ چاه پتانسیل دو گانه‌ی متقارن تعمیم یافته ۴۳
۴—۴—۱ چاه پتانسیل دوگانه‌ی متقارن استاندارد ۴۷
۴—۴—۲ پتانسیل از نوع بدون بازتاب ۴۸

۴—۴—۳ پتانسیل $V_0 \tanh^2(r/d)$ ۴۸

۴—۵ پتانسیل های نمایی پنج پارامتری ۴۹

۴—۵—۱ پتانسیل رُوزِن ـ مورس ۵۲

۴—۵—۲ پتانسیل پاش تِلِر تعمیم یافته ۵۲

۴—۵—۳ پتانسیل چهار پارامتری برای یک مولکول دو اتمی ۵۳

۴—۵—۴ پتانسیل اکارت ۵۴

۴—۵—۵ پتانسیل اسکارف نوع II ۵۴

۴—٦ ساختار جبری پتانسیل مورس تغییر شکل یافته با پارامتر q ۵۵

۴—٦—۱ ساختار جبری پتانسیل مورس تغییر شکل یافته در معادله‌ی کلاین ـ گوردن ۵٦

۴—٦—۲ ساختار جبری پتانسیل مورس تغییر شکل یافته در معادله‌ی شرودینگر ۵۹

۴—۷ ساختار جبری چاه پتانسیل دوگانه‌ی متقارن تعمیم یافته در معادله‌ی شرودینگر ٦۰

۴—۷—۱ ویژه مقادیر و ویژه توابع ٦۱

۴—۷—۲ عملگرهای نردبانی ٦۲

۴—۷—۳ مباحث ٦۵

الف) چاه پتانسیل دوگانه‌ی استاندارد ٦۵

ب) پتانسیل بدون بازتاب ٦٦

ج) پتانسیل $V_0 \tanh^2(x/d)$ ٦٦

۵ حل های دقیق معادله‌ی دیراک

۵—۱ ذره‌ی باردار دارای اسپین $\frac{1}{2}$ در میدان مغناطیسی متغیر ٦۸

۲–۵ پتانسیل اکارت ۷۲
۱–۲–۵ پتانسیل هالتن ۷۶
۲–۲–۵ پتانسیل مورس تعمیم یافته ۷۶
۳–۵ پتانسیل تعمیم یافته‌ی اسکارف ۷۷
۱–۳–۵ پتانسیل اسکارف نوع II ۸۲
۲–۳–۵ پتانسیل پاش تِلِر تعمیم یافته ۸۳
۳–۳–۵ پتانسیل پاش تِلِر نوع II ۸۴

۶ ساختار جبری سیستم های شکل ناوردا

۱–۶ فرمول بندی جبری سیستم های شکل ناوردا ۸۸
۱–۱–۶ پتانسیل مورس ۹۱
۲–۱–۶ پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده ۹۲
۳–۱–۶ پتانسیل نمایی پنج پارامتری ۹۳
۲–۶ ساختار جبری سیستم های شکل ناوردای تغییر شکل یافته با پارامتر q ۹۴
۳–۶ مدل های تغییر شکل یافته ۹۵
۱–۳–۶ مدل استاندارد ۹۵
۲–۳–۶ مدل تغییر یافته‌ی با پارامتر Q ۹۶
۳–۳–۶ مدل تغییر یافته‌ی شکل ناوردا ۹۷
مراجع ۱۰۰

فصل اول

مقدمه

در سال های اخیر بسیاری از نویسندگان توجه زیادی به مطالعه‌ی معادله‌های موج مکانیک کوانتمی نسبیتی بویژه معادله‌ی کلاین ـ گوردن و معادله‌ی دیراک کرده اند. این معادلات نقش مهمی در فیزیک هسته‌ای برای سیستم های با پتانسیل های قوی، ایفا می کنند [۸–۱]. معادله‌ی کلاین ـ گوردن در سال ۱۹۲۷ توسط اسکار کلاین [۱] و والتر گوردن[۲] برای توصیف حالت موجی ذرات نسبیتی بدون اسپین مانند پیون ها و کائون ها ارائه شد و معادله ی دیراک نیز در سال ۱۹۲۸ برای توصیف حالت موج گونه ی ذرات نسبیتی دارای اسپین مانند الکترون توسط پاول آدِریَن موریس دیراک [۳] دانشمند بریتانیایی به وجود آمد این معادله ها وجود پاد ذرات (ضد ذرات) را پیش بینی کردند. پاد ذرات، ذراتی هستند که جرم آن ها برابر جرم ذره امّا بار و سایر اعداد کوانتمی آن ها مخالف ذره است. در سال ۱۹۳۲ کارل آندرسون[۴] در آزمایشات خود پوزیترون را که پاد ذره‌ی الکترون است، کشف کرد و این تأیید خوبی برای معادله‌ی دیراک و کلاین ـ گوردن شد.

---

[۱] Oscar Klein

[۲] Walter Gordon

[۳] Paul Adrien Maurice Dirac

[۴] Carl Anderson

از طرف دیگر مکانیک کوانتمی ابرتقارن در سال ۱۹۷۱ به وسیله ی افرادی چون گِل فاند[۵] و لیختمن [۶] [۹]، راموند[۷] [۱۰]، شوارتز[۸] [۱۱]، ویتن[۹] [۱۲]، کوپر[۱۰] و فریدمن[۱۱] [۱۳] به وجود آمد. به کمک ابر تقارن می توان حالت های بوزونی و فرمیونی را که هر کدام در فضای بخصوصی قرار دارند به هم مرتبط کرد.

در سال ۱۹۸۳ مفهوم پتانسیل های شکل ناوردا (SIP) و روش شکل ناوردایی که روشی زیبا و دقیق برای حل مسائل مکانیک کوانتمی است در چارچوب مکانیک کوانتمی ابر تقارن توسط گِندِنشْتین[۱۲] [۱۴] بوجود آمد و بسیاری از مسائل مکانیک کوانتمی غیر نسبیتی به کمک آن حل شد [۱۵]. لازم به ذکر است که پتانسیلی، شکل ناوردا یا همانند نامیده می شود، اگر پتانسیل های همزاد آن شکل فضایی یکسانی با پتانسیل اصلی داشته باشند و فقط در پارامترهای ظاهر شده در آن ها با هم تفاوت داشته باشند. در این روش ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی مربوط به پتانسیل اصلی به کمک پتانسیل های همزاد آن و به صورت جبری به دست می آیند. برعکس، می توان با استفاده از جواب پتانسیل های ساده‌ی حل شده، ویژه مقادیر و ویژه توابع انرژی مربوط به پتانسیل های همزاد آن را به روش عملگری به دست آورد که ممکن است حل آن ها به صورت تحلیلی مشکل باشد.

در این پروژه ابتدا مکانیک کوانتمی ابرتقارن و روش شکل ناوردایی را تشریح خواهیم کرد و ارتباط بین توابع ویژه و مقادیر ویژه‌ی انرژی یک هامیلتونی با هامیلتونی های همزاد آن را با استفاده از عملگرهای نردبانی مشخص خواهیم کرد سپس تعیین خواهیم کرد که چه پتانسیل هایی شکل ناوردا هستند و چگونه با این روش جواب های یک هامیلتونی را به دست آوریم. در فصل سوم چگونگی ایجاد شدن معادله های نسبیتی کلاین ـ گوردن و دیراک برای ذره ای که در یک میدان الکترومغناطیسی قرار دارد را تشریح خواهیم کرد و نحوه‌ی قرار گرفتن پتانسیل های اسکالر و برداری را در این معادلات بیان می کنیم و حد غیر نسبیتی این معادله‌ها را به دست می آوریم. در فصل چهارم این پایان نامه با استفاده از روش شکل ناوردایی معادله‌ی کلاین ـ گوردن را برای یک ذره‌ی باردار بدون اسپین تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی متغیر در مختصات دکارتی حل می کنیم و حد غیر نسبیتی آن را به دست می آوریم که

[۵] Gel'fand
[۶] Likhtman
[۷] Ramond
[۸] Schwartz
[۹] Witten
[۱۰] Cooper
[۱۱] Freedman
[۱۲] Gendenshtein

در مجله‌ی .Commun.Theor.Phys پذیرفته شده و زیر چاپ است. در ادامه جواب های معادله‌ی کلاین ـ گوردن با پتانسیل های اسکالر و برداری از نوع $S(x) = S_0 f(x)$ و $V(x) = V_0 f(x)$، هالتن تعمیم یافته، هالتن استاندارد و وود ساکسون و پتانسیل های اسکالر و برداری مساوی با چاه پتانسیل دوگانه‌ی متقارن تعمیم یافته، چاه دوگانه‌ی متقارن استاندارد، پتانسیل از نوع بدون بازتاب، $V_0 \tanh^2(r/d)$، پتانسیل نمایی پنج پارامتری، رُوزِن مورس، پاش تِلِر تعمیم یافته، پتانسیل چهار پارامتری برای یک مولکول دو اتمی، اکارت، اسکارف نوع II به روش شکل ناوردایی به دست خواهیم آورد. یکی دیگر از نتایج این پروژه تعیین ساختار جبری پتانسیل تغییر یافته‌ی مورس با پارامتر q برای معادله‌ی کلاین ـ گوردن و معادله‌ی شرودینگر است که در مجله‌ی Mod.Phys.Lett.A قبول شده است. در فصل پنجم نیز به کمک همین روش معادله‌ی دیراک برای یک ذره‌ی باردار با اسپین $1/2$ در یک میدان مغناطیسی متغیر در مختصات دکارتی را حل می کنیم و حد غیر نسبیتی آن را محاسبه می کنیم که در مجله‌ی CHIN.PHYS.LETT چاپ شده است. همچنین جواب های معادله‌ی دیراک با پتانسیل های اسکالر و برداری مساوی برای سیستم های با پتانسیل اکارت، هالتن، مورس تعمیم یافته، اسکارف تعمیم یافته، اسکارف نوع II، پاش تِلِر تعمیم یافته، پاش تِلِر نوع II، به دست می آوریم. در فصل ششم ساختار جبری سیستم های شکل ناوردای تغییر یافته با پارامتر q را ارائه خواهیم کرد و جبر مربوط به تعدادی از پتانسیل ها مانند پتانسیل مورس ، پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده و پتانسیل پنج پارامتری را به دست می آوریم.

فصل دوم

مکانیک کوانتمی ابر تقارن و شکل ناوردایی

۲—۱ پتانسیل های همزاد

یکی از روش های حل دقیق مسائل مکا نیک کوانتمی، ارتباط بین تابع موج حالت پایه و پتانسیل موجود در هامیلتونی است. در این روش می توان با استفاده از عملگرهای نردبانی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ و اثر آن ها روی یکی از ویژه حالت های مربوط به یک پتانسیل شکل ناوردا تمامی ویژه حالت های دیگر و طیف انرژی آن را به دست آورد همچنین می توان بین ویژه توابع و ویژه مقادیرانرژی یک پتانسیل ساده ی حل شده با پتانسیل همزاد آن که ممکن است حل آن نسبتاً مشکل باشد ارتباط برقرار کرد و جواب های آن را به دست آورد. هامیلتونی $H(x)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۵]

$$H(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \qquad (۲.۱)$$

ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی این هامیلتونی را به ترتیب با $\psi_n(x)$ و E_n نشان می دهیم

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x). \qquad (۲.۲)$$

اکنون هامیلتونی $H_1(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می کنیم طوریکه انرژی حالت پایه‌ی آن صفر باشد

$$H_1(x) = H(x) - E_0, \tag{۲.۳}$$

که E_0 انرژی حالت پایه‌ی $H(x)$ است. اگر $V_1(x)$ پتانسیل مربوط به هامیلتونی $H_1(x)$ باشد، داریم

$$H_1(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E_0, \tag{۲.۴}$$

واضح است که ویژه توابع دو هامیلتونی با هم برابرند و ترازهای انرژی آن ها فقط به اندازه‌ی E_0 با هم اختلاف دارند.

اگر ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی $H_1(x)$ را به ترتیب با $\psi_n^{(1)}(x)$ و $E_n^{(1)}$ نشان دهیم، داریم

$$H_1\psi_n(x) = (E_n - E_0)\psi_n(x) \quad \longrightarrow \quad \psi_n(x) = \psi_n^{(1)}(x), \qquad E_n^{(1)} = E_n - E_0 \tag{۲.۵}$$

عملگرهای نردبانی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{A} = \frac{d}{dx} + W(x), \qquad \hat{A}^\dagger = -\frac{d}{dx} + W(x) \tag{۲.۶}$$

که $W(x)$ اَبَر پتانسیل نامیده می شود. هامیلتونی $H_1(x)$ را به صورت حاصل ضرب عملگرهای بالا می نویسیم.

$$H_1(x) = \hat{A}^\dagger\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \tag{۲.۷}$$

با استفاده از روابط (۲.۶) و (۲.۷) داریم

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{dW(x)}{dx}, \tag{۲.۸}$$

می دانیم که انرژی حالت پایه ی $H_1(x)$ صفر است بنابراین:

$$H_1\psi_0^{(1)}(x) = \hat{A}^\dagger\hat{A}\psi_0^{(1)}(x) = 0, \tag{۲.۹}$$

و این بدین معنی است که عملگر $\hat{A}$ حالت پایه را نابود می کند

$$\hat{A}\psi_0^{(1)}(x) = 0, \tag{۲.۱۰}$$

با استفاده از روابط (۲.۶) و (۲.۱۰) می توان ابر پتانسیل را بر حسب حالت پایه و یا برعکس نوشت.

$$W(x) = -\frac{d}{dx}\ln\psi_0(x) = -\frac{\psi_0^{'}(x)}{\psi_0(x)} \quad \longleftrightarrow \quad \psi_0(x) = N\exp(-\int^x W(x)dx) \tag{۲.۱۱}$$

که علامت پریم نشان دهنده ی مشتق نسبت به متغیر x است و N ثابت نرمالیزاسیون می باشد. اکنون هامیلتونی $H_2(x)$ را که همزاد هامیلتونی $H_1(x)$ است به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$H_2(x) = \hat{A}\hat{A}^\dagger = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \tag{۲.۱۲}$$

با استفاده از روابط (۲.۶) و (۲.۱۲) پتانسیل $V_2(x)$ به صورت زیر به دست می آید.

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{dW(x)}{dx}, \tag{۲.۱۳}$$

پتانسیل های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ در روابط (۲.۸) و (۲.۱۳) پتانسیل های همزاد ابرتقارن نامیده می شوند.

۲—۲ ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی

در این قسمت نشان خواهیم داد که ویژه توابع و ویژه مقادیرانرژی هامیلتونی های H_1 و H_2 به هم مرتبط هستند و در واقع با به دست آوردن جواب های یکی از این هامیلتونی ها، جواب های دیگری نیز به دست می آید. برای هامیلتونی H_1 داریم.

$$H_1\psi_n^{(1)}(x) = \hat{A}^\dagger\hat{A}\psi_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)}(x), \tag{۲.۱۴}$$

اکنون هامیلتونی H_2 را روی $\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)$ اثر می دهیم.

$$H_2(\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)) = \hat{A}\hat{A}^\dagger(\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)) = \hat{A}(\hat{A}^\dagger\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)) = \hat{A}(H_1\psi_n^{(1)}(x)) = E_n^{(1)}(\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)), \tag{۲.۱۵}$$

این معادله نشان می دهد که $\hat{A}\psi_n^{(1)}(x)$ ویژه تابع H_2 با ویژه مقدار $E_n^{(1)}$ است. به روشی مشابه برای هامیلتونی H_2 داریم.

$$H_2\psi_n^{(2)}(x) = \hat{A}\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x) = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)}(x), \tag{۲.۱۶}$$

از اثر هامیلتونی H_1 روی $\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)$ داریم.

$$H_1(\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)) = \hat{A}^\dagger\hat{A}(\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)) = \hat{A}^\dagger(\hat{A}\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)) = \hat{A}^\dagger(H_2\psi_n^{(2)}(x)) = E_n^{(2)}(\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)) \tag{۲.۱۷}$$

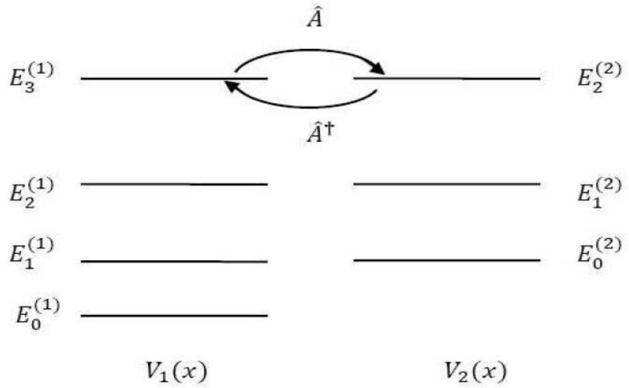
معادله اخیر نیز بیانگر این مطلب است که $\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x)$ ویژه تابع H_1 با ویژه مقدار $E_n^{(2)}$ است. با استفاده از روابط (۲.۱۴) تا (۲.۱۷) و با توجه به اینکه انرژی حالت پایه ی H_1 صفر است ویژه مقادیر انرژی H_1 و H_2 بجز در حالت پایه با هم یکسان هستند.

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \qquad E_0^{(1)} = 0 \tag{۲.۱۸}$$

همچنین ویژه توابع نرمالیزه شده‌ی آن ها از رابطه های زیر به دست می آید.

$$\psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}\hat{A}\psi_{n+1}^{(1)}(x), \qquad \psi_{n+1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x) \tag{۲.۱۹}$$

بنابراین اگر $\psi_{n+1}^{(1)}$ ($\psi_n^{(2)}$) نرمالیزه شود در آنصورت $\psi_n^{(2)}$ ($\psi_{n+1}^{(1)}$) بهنجار می شود و تنها حالتی که همزاد تقارن ندارد حالت پایه ی هامیلتونی H_1 است که به وسیله ی عملگر $\hat{A}$ نابود می شود. همانطور که می بینیم از نتایج این بخش می توان فهمید که با داشتن حل یک پتانسیل، جواب های پتانسیل همزاد آن را به روش عملگری به دست آورد.



شکل۲.۲.۱ ترازهای انرژی پتانسیل های همزاد V_1 و V_2 . اثر عملگرهای نردبانی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ روی ویژه توابع نشان داده شده است.

۲—۳ شکسته شدن ابرتقارن

چنانچه دیدیم هنگامی که هامیلتونی H_1 انرژی حالت پایه‌ی صفر داشته باشد عملگر $\hat{A}$ حالت پایه ی آن را از بین می برد و طیف انرژی این هامیلتونی و هامیلتونی همزاد آن یعنی H_2 جز در حالت پایه‌ی H_1 با هم یکسان هستند و همچنین از اثر عملگرهای نردبانی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ روی توابع موج یک هامیلتونی، ویژه توابع دیگری نیز به دست می‌آید. این

دسته از هامیلتونی ها را ابر تقارن نشکسته[۱] می نامند. بنابراین برای ابرتقارن نشکسته یا انرژی حالت پایه‌ی H_1 صفر است یعنی:

$$\hat{A}\psi_0^{(1)}(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \psi_0^{(1)}(x) = N\exp(-\int^x W(x)dx) \tag{۲.۲۰}$$

یا انرژی حالت پایه‌ی H_2 صفر است که در اینصورت داریم.

$$\hat{A}^\dagger\psi_0^{(2)}(x) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \psi_0^{(2)}(x) = N\exp(+\int^x W(x)dx) \tag{۲.۲۱}$$

معمولاً ابر پتانسیل $W(x)$ را به گونه‌ای انتخاب می کنند که ویژه مقدار حالت پایه‌ی H_1 صفر باشد و ویژه حالت نرمالیزه‌ی آن به دست بیاید و تحقق این امر با گرفتن ابر پتانسیل مثبت (منفی) برای x های بزرگ مثبت (منفی) در رابطه‌ی (۲.۲۰) میسر می شود.

اما اگر هیچ کدام از هامیلتونی های H_1 و H_2 حل هایی مانند روابط (۲.۲۰) و (۲.۲۱) نداشته باشند و انرژی حالت پایه‌ی آنها صفر نباشند ابر تقارن می شکند. به عبارت دقیق تر در ابرتقارن شکسته اثر عملگرهای $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ روی توابع موج عدد n را تغییر نمی دهد و تناظر یک به یکی بین ویژه مقادیر دو هامیلتونی وجود دارد این روابط را به صورت زیر می توان نشان داد.

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} \neq 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۲.۲۲}$$

$$\psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}\hat{A}\psi_n^{(1)}(x), \qquad \psi_n^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}}\hat{A}^\dagger\psi_n^{(2)}(x) \tag{۲.۲۳}$$

۲—۴ تسلسل هامیلتونی ها

در بخش های قبلی نشان دادیم که اگر تابع موج حالت پایه‌ی مربوط به هامیلتونی H_1 را داشته باشیم، می توانیم ابر پتانسیل مربوط به آن یعنی $W_1(x)$ را از رابطه‌ی (۲.۱۱) به دست آوریم و سپس با استفاده از عملگرهای نردبانی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ هامیلتونی H_1 و همزاد آن یعنی H_2 را بسازیم و تابع موج حالت پایه‌ی H_2 را از اثر عملگر $\hat{A}$ روی اولین حالت برانگیخته‌ی H_1 پیدا کنیم و از این تابع موج نیز ابر پتانسیل $W_2(x)$ را برای H_2 طوری بسازیم که همزاد دیگری مانند

[۱] Unbroken Supersymmetry

H_3 را پیدا کنیم. به همین ترتیب یک زنجیره‌ای از هامیلتونی‌ها ساخته می شود که هر هامیلتونی جدید یک تراز کمتر از هامیلتونی قبلی دارد. این فرآیند تا جایی می تواند ادامه پیدا کند که حالت های مقید به اتمام برسد. اگر هامیلتونی H_1 به طور دقیق حل شود ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی برای تمامی این زنجیره از هامیلتونی ها مشخص می شود. از طرف دیگر اگر تابع موج حالت پایه‌ی این زنجیره از هامیلتونی ها توسط ابر پتانسیل های مربوط به آن ها تعیین شود در آنصورت ویژه توابع هامیلتونی اصلی نیز به دست می آید. اکنون با جزئیات بیشتر به این مسئله می پردازیم. واضح است که اگر H_1 انرژی حالت پایه‌ی $E_0^{(1)}$ داشته باشد.

$$H_1(x) = \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \qquad V_1(x) = W_1^2(x) - W_1^{'}(x) + E_0^{(1)}, \tag{۲.۲۴}$$

که عملگرهای $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_1^\dagger$ به صورت زیر تعریف شده اند.

$$\hat{A}_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), \qquad \hat{A}_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_1(x). \tag{۲.۲۵}$$

هامیلتونی همزاد H_2 به صورت زیر داده می شود.

$$H_2(x) = \hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x), \tag{۲.۲۶}$$

و پتانسیل مربوط به آن برحسب ابر پتانسیل و تابع موج محاسبه می شود.

$$\begin{aligned} V_2(x) &= W_1^2(x) + W_1^{'}(x) + E_0^{(1)} \\ &= V_1(x) + 2W_1^{'}(x) = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_0^{(1)}(x). \end{aligned} \tag{۲.۲۷}$$

همچنین ترازهای انرژی و توابع موج H_1 و H_2 به شکل زیر با هم ارتباط دارند.

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \qquad \psi_n^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}}\hat{A}_1 \psi_{n+1}^{(1)}(x), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{۲.۲۸}$$

می توان هامیلتونی H_2 را به صورت زیر نوشت.

$$H_2(x) = \hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger + E_0^{(1)} = \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 + E_0^{(2)} = \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 + E_1^{(1)}, \tag{۲.۲۹}$$

که عملگر پایین آورنده‌ی (فنا) $\hat{A}_2$ و بالابرنده‌ی (خلق) $\hat{A}_2^\dagger$ به کمک تابع موج حالت پایه‌ی H_2 ساخته شده‌اند.

$$\hat{A}_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \qquad \hat{A}_2^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_2(x), \qquad W_2(x) = \frac{d}{dx}\ln\psi_0^{(2)}(x), \tag{۲.۳۰}$$

هامیلتونی همزاد H_3 را که همزاد تقارن H_2 است به شکل زیر تعریف می کنیم.

$$H_3(x) = \hat{A}_2\hat{A}_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x), \tag{۲.۳۱}$$

پتانسیل $V_3(x)$ طبق روابط (۲.۲۷)، (۲.۲۸)، (۲.۳۰) و (۲.۳۱) به دست می آید.

$$\begin{aligned} V_3(x) &= W_2^2(x) + W_2'(x) + E_1^{(1)} \\ &= V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln\psi_0^{(2)}(x) \\ &= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2}\ln(\psi_0^{(1)}(x)\psi_0^{(2)}(x)), \end{aligned} \tag{۲.۳۲}$$

روابط بین توابع موج و طیف انرژی این هامیلتونی ها به شکل زیر است.

$$\psi_n^{(3)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)}}}\hat{A}_2\psi_{n+1}^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}}}\frac{1}{\sqrt{E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)}}}\hat{A}_2\hat{A}_1\psi_{n+2}^{(1)}(x), \tag{۲.۳۳}$$

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)}, \tag{۲.۳۴}$$

واضح است که اگر هامیلتونی اصلی H_1 دارای $p \geq 1$ حالت مقید باشد درآنصورت می توان $p-1$ هامیلتونی دیگر $H_2, H_3, \ldots, H_p$ را ساخت طوریکه هامیلتونی H_m، طیف انرژی یکسانی با هامیلتونی H_1 داشته باشد امّا $m-1$ تراز مقید اولیه ی H_1 را نداشته باشد. هامیلتونی H_m را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$H_m(x) = \hat{A}_m^\dagger\hat{A_m} + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x), \qquad m = 2, 3, \ldots, p \tag{۲.۳۵}$$

با داشتن $\psi_0^{(m)}(x)$ عملگرهای $\hat{A}_m$ و $\hat{A}_m^\dagger$ و ابر پتانسیل $W_m(x)$ محاسبه می شوند.

$$\hat{A}_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \qquad \hat{A}_m^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_m(x), \qquad W_m(x) = \frac{d}{dx}\ln\psi_0^{(m)}(x), \tag{۲.۳۶}$$

همچنین ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی حالت n ام هامیلتونی H_m به صورت زیر در می آید.

$$\psi_n^{(m)}(x) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)}}}\cdots\frac{1}{\sqrt{E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)}}}\hat{A}_{m-1}\ldots\hat{A}_1\psi_{n+m-1}^{(1)}(x) \tag{۲.۳۷}$$

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \ldots = E_{n+m-1}^{(1)}. \tag{۲.۳۸}$$