بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایه دامغان

دانشکده ریاضی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی

به عنوان بخشی از فعالیتهای لازم جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض _گرایش آنالیز

قضیه ویگنر در C^*-مدولهای هیلبرت روی C^*-جبر عملگرهای فشرده

نگارش:

اعظم السادات حسینی نژاد

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان

استاد مشاور:

دکتر سید علی تقوی

شهریور ماه ۱۳۸۶

بسم الله الرّحمن الرّحیم

قضیه ویگنر در C^*-مدولهای هیلبرت روی C^*-جبر عملگرهای فشرده

ارائه دهنده:

اعظم السادات حسینی نژاد

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی

به عنوان بخشی از فعالیتهای لازم جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض _گرایش آنالیز

از

دانشگاه علوم پایه دامغان

دامغان-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته داوران با درجه

اعضای کمیته:

۱. دکتر غلامرضا عباسپور تبادکان، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(استاد راهنما)

۲. دکتر سید علی تقوی، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان(استاد مشاور)

۳. دکتر علی غفاری، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه سمنان (داور)

۴. دکتر مرتضی ابطحی، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان (داور)

۵. دکتر سید محمود حسینی نژاد (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ماه ۱۳۸۶

تقدیر و تشکر

خداوند بزرگ را سپاسگزارم که توانستم این مقطع از تحصیلاتم را با موفقیت به پایان برسانم. از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر *غلامرضا عباسپور* که در تدوین این پروژه مرا راهنمایی نموده‌اند، تشکر می‌نمایم. همچنین از استاد مشاور آقای دکتر *سید علی تقوی* و سایر اساتید محترم گروه ریاضی قدردانی می‌نمایم. از زحمات پدر و مادر عزیزم که مرا در این امر یاری رسانده‌اند، کمال تشکر را دارم. در خاتمه سعادت، سلامت و موفقیت همگی این عزیزان را از خداوند سبحان مسئلت دارم.

اعظم‌السادات حسینی نژاد

شهریور ماه ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

آنان که با توجه پرمهر و حمایت پرعشقشان

دروازه های موفقیت را به رویم گشودند

چکیده

قضیه یکانی- پارا یکانی ویگنر بیان می‌کنند که اگر $(H,(\cdot,\cdot))$ فضای هیلبرت باشد برای هر تابع دوسویی $T:H\to H$ که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|(Tx,Ty)| = |(x,y)| \ , \ \ x,y\in H$$

عملگر یکانی یا پارایکانی $V:H\to H$ و تابع فاز $\phi:H\to\mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x\in H$، $Tx=\phi(x)Vx$.

در این پروژه قضیهٔ ویگنر را برای C^*- مدولهای هیلبرت روی C^*- جبرعملگرهای فشرده تحقیق می کنیم به عبارتی دیگر فرض کنیم W یک C^*- مدول هیلبرت روی C^*- جبر A مخالف $\mathbb{C}$ از عملگرهای فشرده روی یک فضای هیلبرت با A- ضرب داخلی $\langle .,. \rangle$ باشد. ثابت می‌کنیم هر تابع $T:W\to W$ که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$|\langle Tx,Ty\rangle| = |\langle x,y\rangle| \qquad (x,y\in W)$$

برای هر $v\in W$ به شکل $Tv=\phi(v)Vv$ که ϕ تابع فاز و V ایزومتری A- خطی است.

فهرست مندرجات

مقدمه

قضیه یکانی – پارایکانی ویگنر[۱] بیان می‌کند که اگر H یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $(\cdot,\cdot)$ باشد برای هر تابع دوسویی $T:H\to H$ که در رابطه زیر صدق می کند:

$$|(Tx,Ty)| = |(x,y)|, \forall x,y \in H$$

عملگر یکانی یا پارایکانی $V:H\to H$ و تابع فاز $\phi:H\to\mathbb{C}$ وجود دارد که برای هر $x\in H$، $Tx=\phi(x)Vx$.

قضیه ویگنر ابتدا در سال ۱۹۳۱ توسط ویگنر در [۲۰] منتشر شد و در دهه سال ۱۹۶۰ چندین مؤلف روی اثبات آن کار کردند. به عنوان مثال لومونت[۲] و مندلسون[۳] در مرجع [۱۲] و راتز[۴] در [۱۸] از جمله کسانی بودند که روی قضیه ویگنر کارهای شایان ذکری انجام داده اند.

با استفاده از مرجع [۱۵] تعمیمی از قضیه ویگنر در C^*-مدولهای هیلبرت روی جبر همه ماتریسهای $d\times d$ با درایه‌های مختلط $(M_d(\mathbb{C}))$ و در مرجع [۵] قضیه ویگنر در C^*-مدولهای هیلبرت روی C^*- جبر عملگرهای فشرده در فضای هیلبرت H را بررسی می کنیم.

---

۱. Wigner
۲. Lomont
۳. Mendelson
۴. Ratz

فصل اول

مقدمات

۱.۱ جبر باناخ

تعریف ۱.۱.۱: فضای برداری A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ را جبر مختلط گوئیم هرگاه نگاشتی بـه نـام ضرب $A \times A \to A$ موجود باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $x(yz)=(xy)z, \qquad \forall x,y,z \in A$

۲) $(x+y)z=xz+yz, \quad x(y+z)=xy+xz, \ \forall x,y,z \in A$

۳) $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y) \qquad \forall x,y \in A \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$

تعریف ۲.۱.۱: جبر مختلط A را جبر بانـاخ گـوئیم هرگـاه A یـک فـضای نـرم دار کامـل باشـد و نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|xy\| \le \|x\| \|y\| \quad , \quad \forall x,y \in A$$

تعریف ۳.۱.۱: جبر باناخ A را جبر باناخ یکدار گوئیم اگر عنصر همانی e در A بـا $\|e\|=1$ موجـود باشد.

تعریف ۴.۱.۱: جبر باناخ A را جبر باناخ جابجایی گوئیم هرگاه

$$\forall x, y \in A \quad , \quad xy = yx$$

مثال ۵.۱.۱: اگر S یک مجموعه باشد، $l^{\infty}(S)$، مجموعه همه توابع مختلط مقدار کراندار روی S با:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall f, g \in l^{\infty}(S)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \forall f, g \in l^{\infty}(S)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall f \in l^{\infty}(S)\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

و $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in S} |f(x)|$ یک جبر باناخ یکدار است.

مثال ۶.۱.۱: اعداد مختلط با همانی 1 ، جبر باناخ جابجایی است.

مثال ۷.۱.۱: فرض کنیم X فضای هاوسدورف فشرده باشد. $C(X)$، مجموعه همه توابع پیوسته مختلط مقدار روی X نسبت به جمع و ضرب توابع و برای هر $f \in C(X)$ و $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار است.

مثال ۸.۱.۱: اگر Ω فضای توپولوژیک باشد، مجموعه $C_b(\Omega)$ متشکل از توابع پیوسته و کراندار مختلط مقدار روی Ω، جبر باناخ یکدار است.

مثال ۹.۱.۱: اگر Ω فضای هاوسدورف فشرده موضعی باشد، $C_0(\Omega)$، مجموعه همه توابع پیوسته از Ω به $\mathbb{C}$ است که در بینهایت به صفر میل می‌کنند به این معنا که برای هر عدد مثبت ε مجموعه $\{w \in \Omega \mid |f(w)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد، یک جبر باناخ است. همچنین یکدار است اگر و تنها اگر Ω

فشرده باشد و در این مورد $C_0(\Omega)=C(\Omega)$.

مثال ۱.۱.۱۰: اگر X فضای باناخ باشد، $B(X)$، مجموعه همه نگاشتهای خطی و کراندار از X به X با عمل جمع و ضرب (ترکیب نگاشتها) و نرم تعریف شده به صورت زیر، یک جبر باناخ یکدار است:

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\| \qquad (T\in B(X))$$

تعریف ۱.۱.۱۱: فرض کنیم A و B جبر باشند؛ نگاشت خطی $\varphi:A\to B$ را همریختی گوئیم هرگاه برای هر $a,b\in A$ ، $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

تعریف ۱.۱.۱۲: برای x ثابت در جبر باناخ X طیف x را که با $\sigma(x)$ نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(x)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid \lambda e-x \text{ وارون پذیرنیست}\}$$

تعریف ۱.۱.۱۳: برای x ثابت در جبر باناخ X، $\rho(x)$ کوچکترین شعاع ممکن برای دایره‌ای است که تمام $\sigma(x)$ را در بر داشته باشد به عبارت دیگر:

$$\rho(x)=\sup\{|\lambda| \mid \lambda\in\sigma(x)\}$$

$\rho(x)$ را شعاع طیفی x می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۱۴: اگر A یک جبر باناخ مختلط و $x\in A$ باشد، آنگاه $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است و

$.\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

برهان: قضیه ۱۳-۱۰ در [۱۹] را ببینید.

قضیه ۱.۱.۱۵: فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\Omega(A)$، مجموعه همه همریختی‌های ناصفر از A به $\mathbb{C}$ باشد؛ در این صورت اگر A یکدار باشد داریم:

$$\sigma(a) = \{T(a) \mid T \in \Omega(A)\} \qquad (a \in A)$$

و اگر A یکدار نباشد داریم:

$$\sigma(a) = \{T(a) \mid T \in \Omega(A)\} \cup \{0\} \qquad (a \in A)$$

برهان: به قضیه ۱.۳.۴ در [۱۷] مراجعه شود.

تعریف ۱.۱.۱۶: زیرمجموعه J از جبر مختلط جابجایی A را ایده‌آل گوئیم هرگاه J زیرفضایی از A باشد و برای هر $x \in A$ و $y \in J$ داشته‌باشیم $xy, yx \in J$. اگر $J \neq A$ باشد ایده‌آل J را ایده‌آل سره A گوئیم.

۱.۲ *C- جبر

تعریف ۱.۲.۱: اگر A یک جبر مختلط باشد نگاشت $*: A \to A$ که هر x در A را به x^* می نگارد ، یک برگشت روی A گوئیم هرگاه خواص زیر برای هر $x, y \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ برقرار باشد:

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

۳) $(xy)^* = y^* x^*$

۴) $x^{**} = x$

در این صورت جبر A را $*$- جبر می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱: اگر A جبر مختلط باشد، عنصر x در A را هرمیتی یا خودالحاق گوئیم هرگاه $x = x^*$.

قضیه ۳.۲.۱: اگر A جبر باناخ با یک برگشت باشد و $x \in A$ آنگاه

۱) $x+x^*$ و $i(x-x^*)$ و xx^* هرمیتی هستند.

۲) x دارای نمایش منحصر به فرد $x = u+iv$ است که u و v در A هرمیتی هستند و $u = \frac{x+x^*}{2}$ و $v = \frac{x-x^*}{2i}$.

۳) عنصر یکه e هرمیتی است.

۴) x در A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر x^* وارون‌پذیر باشد و داریم $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

۵) $\lambda \in \sigma(x)$ اگر و تنها اگر $\bar{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

برهان: به قضیه ۱۱.۱۵ در [۱۹] مراجعه شود.

تعریف ۴.۲.۱: اگر A یک *- جبر باناخ باشد و برای هر $a \in A$، $\|aa^*\| = \|a\|^2$ در این صورت A را یک C^* - جبر می‌نامیم.

مثال ۵.۲.۱: میدان اسکالر $\mathbb{C}$ با برگشت روی $\mathbb{C}$ بگونه‌ای که $\lambda \to \bar{\lambda}$ یک C^* - جبر یکدار است.

مثال ۶.۲.۱: اگر X فضای توپولوژیک فشرده و هاوسدورف باشد $C(X)$ با برگشت $f^*(x) = \overline{f(x)}$ برای هر $f \in C(X)$ یک C^* - جبر جابجایی و یکدار است.

مثال ۷.۲.۱: اگر X فضای هاوسدورف موضعاً فشرده باشد، $C_0(X)$، با برگشتی که هر f در $C_0(X)$ را به $\bar{f}$ ببرد یک C^* - جبر جابجایی بدون یک است.

مثال ۸.۲.۱: اگر S یک مجموعه باشد $l^\infty(S)$، با برگشت $f \to \bar{f}$ یک C^* - جبر است.

تعریف ۹.۲.۱: در *- جبر باناخ A عنصر u در A یکانی است هرگاه $u^*u = uu^* = 1$. اگر $u^*u = 1$ ، u را ایزومتری و اگر $uu^* = 1$، u را هم ایزومتری می‌گوئیم.

تذکر ۱۰.۲.۱: اگر A، C^* - جبر و u عنصر یکانی در A باشد، آنگاه $\|u\| = 1$.

تعریف ۱۱.۲.۱: در *- جبر باناخ A عنصر a را نرمال گوئیم هرگاه $a^*a = aa^*$ و آنرا تصویر گوئیم هرگاه $a = a^* = a^2$.

تعریف ۱۲.۲.۱: اگر A و B *- جبرهای باناخ باشند و $\varphi: A \to B$ همریختی و برای هر $a \in A$، $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ آنگاه φ را *- همریختی نامیم.

تعریف ۱۳.۲.۱: اگر در تعریف قبل φ یک به یک و پوشا باشد φ را $*$- یکریختی گوئیم و یک خودریختی روی $*$- جبر A یک $*$- یکریختی از A به A است.

تعریف ۱۴.۲.۱: اگر A یک C^* - جبر باشد عناصر a و b در A را هم‌ارز یکانی گوئیم هرگاه عنصر یکانی u در A موجود باشد بگونه‌ای که $b = uau^*$.

قضیه ۱۵.۲.۱: اگر a عنصر خود الحاق در C^* - جبر A باشد آنگاه $\rho(a) = \|a\|$.

برهان: قضیه ۲.۱.۱ در [۱۷] را ببینید.

لم ۱۶.۲.۱: فرض کنیم A یک $*$- جبر باناخ باشد و برای هر $a \in A$، $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ آنگاه A یک C^* - جبر است.

برهان: لم ۲.۱.۳ در [۱۷] را ببینید.

قضیه ۱۷.۲.۱: اگر a عنصر خود الحاق در C^* - جبر A باشد، آنگاه $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

برهان: قضیه ۲.۱.۸ در [۱۷] را ببینید.

قضیه ۱۸.۲.۱: اگر B، C^* - زیرجبر یک C^* - جبر یکدار A و شامل عنصر واحد A باشد آنگاه

$$\forall \ b \in B \ , \ \sigma_B(b) = \sigma_A(b)$$

برهان: قضیه ۲.۱.۱۱ در [۱۷] را ببینید.

قضیه ۱۹.۲.۱: اگر A و B C^* - جبر باشند و $\varphi : A \to B$ $*$- همریختی باشد، آنگاه $\|\varphi\| \leq 1$ است.

برهان: قضیه ۲.۱.۷ در [۱۷] را ببینید.

۳.۱ عنصر مثبت یک *C- جبر

تعریـــف ۱.۳.۱: در C^* - جبـر A عنـصر $a \in A$ را مثبـت گـوئیم هرگـاه a هرمیتـی باشـد و $\sigma(a) \subseteq [0,+\infty)$.

قضیه ۲.۳.۱: فرض کنیم A، C^* - جبر و a عنصر مثبت در A باشد آنگاه عنصر مثبـت منحـصر بـه فرد $b \in A$ وجود دارد که $b^2 = a$.

برهان: قضیه ۲.۲.۱ در [۱۷] را ببینید.

عنصر منحصر بفرد b که قضیه فوق وجود آن را تضمین می‌کند با $a^{1/2}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۱: مجموع دو عنصر مثبت در یک C^* - جبر عنصر مثبت است.

برهان: لم ۲.۲.۳ در [۱۷] را ببینید.

قضیه ۴.۳.۱: اگر a عنصر دلخواه از C^* - جبر A باشد آنگاه a^*a مثبت است.

برهان: قضیه ۲.۲.۴ در [۱۷] را ببینید.

تعریف ۵.۳.۱: برای هر $a \in A$، قـدر مطلـق a را کـه بـا $|a|$ نـشان مـی‌دهـیم بـصورت زیـر تعریـف می‌کنیم:

$$|a| = (a^*a)^{1/2}$$

قضیه ۶.۳.۱: فرض کنیم A C^* - جبر باشد در این صورت:

۱) $\overset{+}{A}$، مجموعه عناصر مثبت A مساوی مجموعه $\{a^*a \mid a \in A\}$ است.

۲) اگر a و b عناصر خودالحاق A باشند و c در A در این صورت

$$a \le b \quad \Rightarrow \quad c^*ac \le c^*bc$$

۳) اگر $0 \le a \le b$ آنگاه $\|a\| \le \|b\|$.

برهان: قضیه ۲.۲.۵ در [۱۷] را ببینید.

۴.۱ فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۱: فرض کنیم X فضای برداری مختلط باشد یک ضرب داخلی روی X تابع $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ است که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

۲) $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

۳) $\langle x, x \rangle \ge 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و فضای خطی با یک ضرب داخلی روی آن را فضای ضرب داخلی گوئیم.

تعریف ۲.۴.۱: فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد. تابع تعریف شده روی H بصورت $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} (x \in H)$ یک نرم روی H تعریف می‌کند اگر H نسبت به این نرم کامل باشد

آنگاه H را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

تذکر ۳.۴.۱: فرض کنیم $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ضرب داخلی روی فضای خطی X باشد. در این صورت داریم:

۱) $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle \quad (x,y,z \in X)$

۲) $\langle x,\alpha y \rangle = \bar{\alpha}\langle x,y \rangle \quad (x,y \in X \ , \ \alpha \in \mathbb{C})$

۳) $\langle x,y \rangle = 0 \ , \ \forall y \in X \ \Leftrightarrow \ x = 0$

۴) $\forall z \ \ \langle x,z \rangle = \langle y,z \rangle \Rightarrow x = y$

مثال ۴.۴.۱: $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است.

$$\langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k \ , \ x = (x_1,\dots,x_n) \ , \ y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{C}^n$$

مثال ۵.۴.۱: اگر E مجموعه اندازه پذیر در $\mathbb{R}$ باشد آنگاه $L_2(E)$، مجموعه همه توابع مربع انتگرالپذیر با ضرب داخلی تعریف شده به صورت $\langle f,g \rangle = \int_E f\bar{g}\,d\mu$ برای هر $f,g \in L_2(E)$ یک فضای هیلبرت است.

مثال ۶.۴.۱: $C[0,1]$، مجموعه همه توابع پیوسته مختلط مقدار تعریف شده روی $[0,1]$ تحت ضرب داخلی $\left(f,g \in C([0,1])\right)$ $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ فضای ضرب داخلی است ولی فضای هیلبرت نیست.

قضیه ۷.۴.۱: (نامساوی کوشی شوارتز[۱]): اگر H فضای ضرب داخلی باشد و $x,y \in H$ آنگاه $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|$.

برهان: قضیه ۱۲.۲ در [۱۹] را ببینید.

تعریف ۸.۴.۱: اگر X فضای ضرب داخلی باشد و برای $x,y \in X$، $\langle x,y\rangle = 0$. در این صورت x و y را عمود برهم گوئیم و با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم. اگر $A \subset X$، مجموعه همه عناصری در X که عمود بر A هستند را با $A^{\perp}$ نشان می‌دهیم و آنرا متمم A می‌نامیم.

قضیه ۹.۴.۱: اگر M زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد آنگاه

$$H = M \oplus M^{\perp} \quad , \quad (M^{\perp})^{\perp} = M$$

برهان: قضیه ۱۲.۴ در [۱۹] را ببینید.

تعریف ۱۰.۴.۱: مجموعه ناتهی $\{e_i\}$ از فضای هیلبرت H را یک مجموعه متعامد یکه گوئیم هرگاه

۱) $e_i \perp e_j, i \neq j$

۲) $\|e_i\| = 1 \; \forall i$

تعریف ۱۱.۴.۱: مجموعه متعامد یکه $\{e_j\}$ در یک فضای هیلبرت را ماکسیمال گوئیم هرگاه بطور سره مشمول در هیچ مجموعه متعامد دیگری نباشد. منظور از یک پایه برای فضای هیلبرت H یک

[1]. Cauchy Schwartz