دانشگاه رازی کرمانشاه

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی

ریاضی کاربردی(آنالیز عددی)

عنوان:

معادلات انتگرال منفرد نوع دوم و روش‌های حل آن‌ها

استاد راهنما :

پروفسور محمد تقی درویشی

نگارش:

سعید شکری

اسفند ۱۳۹۲

ک!

سپاس گزاری

می‌ستایم آن کس که مرا علم آموخت تا زندگی کنم...

قدردان زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدرم جناب آقای پروفسور محمد تقی درویشی هستم که با صبر و بردباری فراوان راهنمای اینجانب در جهت تدوین این پایان‌نامه بودند.

ضمن تشکر از تمام اساتید گرامی دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد که وجود ایشان سرچشمه‌ای عظیم برای انگیزه‌های علمی اینجانب بود، سپاسگزار خانواده‌ی عزیزم به‌ویژه، پدر و مادر بزرگوار و همه دوستان دوران تحصیلی دانشگاهم هستم که همواره مشوق و پشتیبان من بودند.

سعید شکری

اسفند۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا معادلات انتگرال را معرفی می‌کنیم و یک دسته‌بندی از آنها ارائه می‌دهیم. در ادامه، بحث خود را روی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم معطوف می‌کنیم. ضمن معرفی یک رده خاص از آنها، به نام معادلات انتگرال آبل، به بیان سه روش تحلیلی برای حل آنها می‌پردازیم. همچنین دو روش جدید، تحت عنوان روش تجزیه لاپلاس دو مرحله‌ای و روش تجزیه آدومین دو مرحله‌ای را برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم خطی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه، این دو روش را برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی، به ویژه معادلات انتگرال آبل نوع دوم غیرخطی، تعمیم می‌دهیم. همچنین به منظور بررسی سادگی و دقیق بودن روش تجزیه لاپلاس دو مرحله‌ای، مقایسه‌ای بین روش تجزیه لاپلاس دو مرحله‌ای و دو روش عددی صورت می‌گیرد.

کلمات کلیدی:

معادلات انتگرال ولترای نوع دوم، معادلات انتگرال آبل، روش تجزیه لاپلاس دو مرحله‌ای، روش تجزیه آدومین دو مرحله‌ای، چندجمله‌ای های آدومین.

پیشگفتار

رشد سریع علم و تکنولوژی در دنیای امروز موجب پدید آمدن معادلات انتگرال در بسیاری از زمینه‌های علمی، مانند ریاضی فیزیک، انتقال گرما، رشد کریستال، هوافضا و ... شده است. در بسیاری از مسائل علمی و عملی، به یک معادله دیفرانسیل معمولی با شرایط اولیه یا شرایط مرزی می‌رسیم که باید آنها را حل کنیم. یکی از روش‌های حل این گونه معادلات، تبدیل آنها به یک معادله انتگرال و سپس حل آن است. بنابراین ارائه روش‌هایی برای حل معادلات انتگرال ولترا از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

در سال‌های گذشته مطالعات زیادی در زمینه معادلات انتگرال انجام گرفته است و پیشرفت‌های قابل توجهی در این زمینه حاصل شده است. روش‌های تحلیلی و عددی زیادی برای حل معادلات انتگرال وجود دارد. اما پیشرفت‌های به‌دست آمده در انواع مختلف مجلات تخصصی پراکنده باقی مانده است و این ایده‌ها و روش‌های جدید به ندرت با هم به صورت یک کتاب درسی جمع‌آوری شده‌اند. لذا متخصصان و دانشجویان قادر نخواهند بود از نتایج دستاوردهای پژوهشی در این زمینه به طور منسجم استفاده کنند. در سال ۲۰۱۱ کتابی در زمینه معادلات انتگرال منتشر شده است که تا حد زیادی به این پراکندگی‌ها سامان داده است و روش‌های حل تحلیلی زیادی در آن گردآوری شده است [۱۲].

در این پایان‌نامه تلاش شده است تا روش‌های جدید حل تحلیلی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم ارائه شوند

. در فصل اول، معادلات انتگرال معرفی می‌شوند و یک دسته‌بندی از آنها ارائه می‌شود. در فصل دوم، معادلات انتگرال ولترای نوع دوم خطی و به ویژه یک رده خاص از آنها تحت عنوان معادلات انتگرال آبل را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سه روش تحلیلی برای حل آنها معرفی می‌کنیم. در فصل سوم، دو روش جدید که اخیرا برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم خطی ارائه شده‌اند[۶]، معرفی می‌شود. در فصل چهارم، دو روش مطرح شده در فصل سوم را برای حل معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی تعمیم می‌دهیم. در فصل پنجم، ضمن معرفی دو روش حل عددی معادلات انتگرال ولترای نوع دوم، به مقایسه‌ای بین این دو روش عددی و روش مطرح شده در [۶] می‌پردازیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

معرفی معادلات انتگرال

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیمی که در ادامه این پایان‌نامه از آنها استفاده می‌شود، آورده شده اند. همچنین برخی از قضایای مهم که در سایر فصل‌ها از آنها استفاده شده است، ذکر شده‌اند. در ادامه فصل، معادلات انتگرال به طور کامل معرفی می‌شوند و نیز یک دسته‌بندی از آنها آورده خواهد شد و چند مدل که به معادلات انتگرال منجر می‌شوند، آورده شده‌اند.

۲.۱ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۲.۱. تابع گاما یا تابع گاما-اویلر: تابع $\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود، تابع گاما-اویلر(یا اویلر نوع دوم) می‌گویند.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

لم ۲.۲.۱. ویژگی های کلیدی این تابع که برای هدف ما مهم است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \quad (i$$
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)(ii$$

به ویژه $\Gamma(1) = 1$ و برای $x = n$ داریم $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$.

برهان. درکتب مقدماتی معادلات دیفرانسیل و آمار و احتمال برهان‌های (a) و (b) موجود است. □

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید تابع $f(x)$ در فاصله $[0, +\infty)$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس $f(x)$ را که با نماد $F(s)$ یا $L[f(x)]$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

برخی از خواص تبدیل لاپلاس که در این پایان‌نامه به آنها نیاز داریم در زیر ارائه شده‌اند.

قضیه ۴.۲.۱. (خاصیت خطی تبدیل لاپلاس) اگر $L[f(x)]$ برای $s > a$ و $L[g(x)]$ برای $s > b$ وجود داشته باشد و c_1 و c_2 دو اسکالر باشند، آنگاه $L[c_1 f(x) + c_2 g(x)]$ برای $s > \max\{a, b\}$ وجود دارد و

$$L[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 L[f(x)] + c_2 L[g(x)]$$

تعریف ۵.۲.۱. حاصلضرب کانولوشن(حاصلضرب پیچشی یا تلفیق) دو تابع f و g را که با نماد $f*g$ نشان می‌دهیم، عبارت است از:

$$(f*g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$$

لم ۶.۲.۱. تلفیق خاصیت جابجایی دارد. یعنی، $(f*g)(x) = (g*f)(x)$.

قضیه ۷.۲.۱. $L[(f*g)(x)] = L[f(x)]L[g(x)]$.

به مرجع [۱۴] مراجعه شود.

تعریف ۸.۲.۱. اگر $F(s)$ تابعی باشد که برای $s > a$ تعریف شده باشد و $f(x)$ تابعی پیوسته بر روی $[0,+\infty)$ باشد به طوری که $L[f(x)] = F(s)$، آنگاه می‌گوییم $f(x)$ تبدیل معکوس لاپلاس $F(s)$ است و آن را با نماد $L^{-1}(F(s))$ نشان می‌دهیم. یعنی،

$$F(s) = L[f(x)] \Leftrightarrow L^{-1}[F(s)] = f(x)$$

لم ۹.۲.۱. تبدیل معکوس لاپلاس خاصیت خطی دارد. یعنی،

$$L^{-1}[c_1F(s)+c_2G(s)] = c_1L^{-1}[F(s)] + c_2L^{-1}[G(s)].$$

۳.۱ معادلات انتگرال

تعریف ۱.۳.۱. یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد و به فرم استاندارد زیر می‌باشد:

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,t)u(t)dt \tag{۱.۱}$$

که در آن $h(x)$ و $g(x)$ حدود انتگرال، λ یک پارامتر ثابت و $k(x,t)$ یک تابع معلوم از x و t است که هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود. $f(x)$ تابعی معلوم است و عبارت غیرهمگن معادله ۱.۱ نامیده می‌شود. معادله انتگرال ۱.۱ یک معادله انتگرال نوع اول نامیده می‌شود.
اگر تابع مجهول $u(x)$ علاوه بر زیرعلامت انتگرال بیرون آن هم باشد، معادله انتگرال، یک معادله انتگرال نوع دوم نامیده می‌شود. فرم استاندارد معادله انتگرال نوع دوم به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x,t)u(t)dt$$

حدود معادله انتگرال یعنی $h(x)$ و $g(x)$ می‌توانند هر دو متغیر، ثابت یا ترکیبی از هر دو نوع باشند.

۴.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال

معادلات انتگرال به صورت‌های زیادی ظاهر می‌شوند. معادلات انتگرال را بر حسب حدود آنها عمدتا به دو نوع نامگذاری می‌کنند.

۱-اگر حدود معادله انتگرال(نوع اول و دوم) ثابت باشند، معادله انتگرال، معادله انتگرال فردهلم [۱] نامیده می‌شود.

فردهلم نوع اول $f(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$

فرد هلم نوع دوم $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$

۲- اگر حد بالای معادله انتگرال، متغیر x باشد، معادله انتگرال، معادله انتگرال ولترا [۲] نامیده می‌شود.

ولترای نوع اول $f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$

ولترای نوع دوم $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt$

۵.۱ معادلات انتگرال منفرد

تعریف ۱.۵.۱. یک معادله انتگرال(نوع اول و دوم) منفرد نامیده می‌شود هرگاه:

۱- یک یا هر دو حد انتگرال نامتناهی باشد؛ ۲- هسته معادله انتگرال در یک یا چند نقطه از دامنه انتگرال‌گیری بی‌کران باشد.

معادلات انتگرال زیر نمونه‌ای از معادلات انتگرال منفرد می‌باشند:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt$$

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt \qquad 0 < \alpha < 1$$

همان طور که مشاهده می‌شود در معادله انتگرال اول حدود انتگرال نامتناهی هستند و هسته معادله انتگرال دوم در $x = t$ بی‌کران است.

[۱] Fredholm integral equation

[۲] Volterra integral equation

۶.۱ معادلات انتگرال-دیفرانسیل

یک معادله انتگرال-دیفرانسیل معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ به دو صورت ظاهر می‌شود. در این معادلات تابع $u(x)$ هم در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و هم در بیرون آن به صورت یک مشتق معمولی ظاهر می‌شود.

مثال ۱.۶.۱. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل می‌باشند:

$$u'(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt,$$

$$u'''(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt.$$

معادلات انتگرال-دیفرانسیل در سال ۱۹۰۰ توسط **ویتو ولترا** [۳] که بر روی پدیده رشد جمعیت مطالعه می‌کرد، مطرح شدند. تعدادی از پدیده‌ها در فیزیک [۹] و بیولوژی در قالب این نوع معادلات انتگرال-دیفرانسیل ظاهرمی‌شوند. در معادلات انتگرال-دیفرانسیل مرتبه مشتق، مرتبط معادله انتگرال-دیفرانسیل نامیده می‌شود.

مثال ۲.۶.۱. معادله زیر یک معادله انتگرال-دیفرانسیل مرتبه دوم است.

$$u''(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt.$$

۷.۱ معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

یک معادله انتگرال خطی است هرگاه تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال و خارج از آن به صورت خطی ظاهر شود و آن را غیرخطی گوییم هرگاه تابع مجهول $u(x)$ در زیر علامت انتگرال به صورت غیرخطی ظاهر شود.

مثال ۱.۷.۱. معادله

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt$$

یک معادله انتگرال خطی و معادله

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)e^{u(t)}dt$$

[۳] Vito Volterra

یک معادله انتگرال غیرخطی است.

همچنین معادله

$$u(x) = 2x + \int_0^1 \sin(x-t)u(t)dt$$

یک معادله فردهلم نوع دوم خطی و معادله

$$\cos x = \int_{-2}^{5} (x+t)e^{u(t)}dt$$

یک معادله فردهلم نوع اول غیرخطی است.

معادله

$$u(x) = x^2 + \int_0^x \sqrt{x-t}\cos(u(t))dt$$

یک معادله ولترای نوع دوم غیرخطی و معادله

$$x = 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt.$$

یک معادله ولترای نوع اول خطی است.

۸.۱ جواب معادله انتگرال

یک جواب معادله انتگرال روی فاصله انتگرال‌گیری تابعی چون $u(x)$ است که در معادله انتگرال داده شده صدق می‌کند.

مثال ۱.۸.۱. $u(x) = e^x$ یک جواب معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی زیر است:

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt$$

زیرا

$$1 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^t|_0^x = e^x = u(x).$$

لازم به ذکر است که همواره جواب یک معادله انتگرال را نمی‌توان به فرم بسته به دست آورد، معمولا در چنین حالتی می‌توان جواب آن را به فرم یک سری ارائه کرد و آن را تقریب زد.

۹.۱ معادلات انتگرال آبل

معادلات انتگرال آبل در بسیاری از زمینه‌های علمی، مانند هوا فضا [۵]، رشد کریستال [۲] ، پراکندگی اتمی، رادیوگرافی با اشعه X و ... کاربردهای زیادی دارند. این نوع از معادلات انتگرال توسط ریاضیدان نروژی، نیلز آبل در سال ۱۸۲۳ معرفی شدند.

در بخش ۵.۱ معادلات انتگرال منفرد معرفی شدند و بیان شد یک معادله انتگرال را منفرد می‌نامیم هرگاه:

۱- یک یا هر دو حد انتگرال نامتناهی باشند یا

۲- هسته معادله انتگرال در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری بی‌کران باشد.

معادلات انتگرال آبل جزء معادلات انتگرال منفرد هستند. زیرا هسته آنها در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری بی‌کران است. معادلات انتگرال آبل در دسته معادلات انتگرال ولترای منفرد قرار می‌گیرند.

فرم معادلات انتگرال آبل در حالت استاندارد به صورت‌های زیر است:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(g(x)-g(t))^\alpha} u(t)dt \qquad 0<\alpha<1$$

که یک معادله انتگرال نوع اول خطی است و معادله

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(g(x)-g(t))^\alpha} u(t)dt \qquad 0<\alpha<1$$

یک معادله انتگرال نوع دوم خطی است.

معادلات انتگرال آبل فوق، معادلات انتگرال آبل به فرم کلی نامیده می‌شوند. واضح است که در معادلات انتگرال آبل، هسته معادله در $x=t$ بی‌کران می‌شود.

اگر $g(x)=x$، در این صورت معادله انتگرال آبل به شکل زیر قابل بازنویسی خواهد بود:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt \qquad 0<\alpha<1$$
$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t)dt \qquad 0<\alpha<1$$

که در این حالت معادله انتگرال آبل، معادله انتگرال آبل نوع ضعیف نامیده می‌شود که در بسیاری از پدیده‌ها نیز به همین شکل ظاهر می‌شود.

اگر هسته یک معادله انتگرال برحسب عبارت $(x-t)$ بیان شود، یعنی $k(x,t)$ به فرم $k(x-t)$ باشد هسته معادله انتگرال، هسته تفاضلی نامیده می‌شود.

۱۰.۱ مدل‌هایی که به معادلات انتگرال منجر می‌شوند

معادلات انتگرال در بسیاری از زمینه‌های علمی مانند ریاضی فیزیک، انتقال گرما، رشد جمعیت و... ظاهر می‌شوند. در این قسمت یک مدل ریاضی و یک مدل فیزیکی که هر یک منجر به یک معادله انتگرال می‌شوند، تشریح می‌شوند. در معادله انتگرال حاصل از مدل‌های چند پدیده دیگر آورده می‌شوند.

مدل ریاضی: تبدیل مساله مقدار اولیه IVP [۴] به معادله انتگرال ولترا

یکی از راه‌های ایجاد یک معادله انتگرال، حل یک مساله مقدار اولیه از طریق تبدیل آن به یک معادله انتگرال است. روش‌های متعددی برای حل مسائل مقدار اولیه موجود است. یکی از روش‌های حل یک مساله مقدار اولیه، تبدیل آن به معادله انتگرال ولترای معادل و سپس حل این معادله انتگرال است. در این بخش، روش تبدیل مساله مقدار اولیه به معادله انتگرال معادلش را شرح می‌دهیم. برای سادگی، روش را برای تبدیل مسائل مقدار اولیه مرتبه دوم به کار می‌گیریم. برای مشاهده روش تبدیل مسائل مقدار اولیه با مرتبه های بالاتر به معادله انتگرال معادل، می‌توان به مرجع [۱۲] مراجعه کرد.

قضیه ۱.۱۰.۱. (قاعده لیب نیتس [۵]) فرض کنید $f(x,t)$ یک تابع پیوسته و $\frac{\partial f}{\partial t}$ برای x و t در مستطیل $a \leq x \leq b$ و $t_0 \leq t \leq t_1$ پیوسته باشد و همچنین فرض کنید

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,t)dt \tag{۲.۱}$$

در این صورت مشتق ۲.۱ وجود دارد و

$$F'(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + h'(x)f(x,h(x)) - g'(x)f(x,g(x))$$

برهان. مرجع [۷] را ببینید. □

قضیه ۲.۱۰.۱. همواره داریم:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dtdx_1 = \int_0^x (x-t)F(t)dt \tag{۳.۱}$$

[۴] Initail Value Problem

[۵] Libnits

برهان. قرار می‌دهیم:

$$G(x) = \int_0^x (x-t)F(t)dt \tag{۴.۱}$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه ۴.۱ و استفاده از قضیه ۱.۱۰.۱ داریم

$$G'(x) = \int_0^x F(t)dt \tag{۵.۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه ۵.۱ از 0 تا x داریم:

$$G(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} F(t)dtdx_1 \tag{۶.۱}$$

طرف راست روابط ۴.۱ و ۶.۱ با هم برابرند و برهان کامل می‌شود. □

حال با استفاده از این قضایا، به شرح تبدیل یک مساله مقدار اولیه به معادله انتگرال معادل می‌پردازیم. یک مساله مقدار اولیه مرتبه دوم در حالت استاندارد به فرم زیر می‌باشد:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \tag{۷.۱}$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = \alpha, \qquad y'(0) = \beta. \tag{۸.۱}$$

که در آن α و β ثابت می‌باشند و $p(x)$ و $q(x)$ توابعی تحلیلی و $g(x)$ بر روی بازه مورد نظر پیوسته است. حال قرار می‌دهیم:

$$y''(x) = u(x) \tag{۹.۱}$$

با فرض پیوسته بودن $u(x)$ از دو طرف رابطه ۹.۱ از 0 تا x انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x u(t)dt \tag{۱۰.۱}$$

یا به طور معادل

$$y'(x) = \beta + \int_0^x u(t)dt \tag{۱۱.۱}$$

با انتگرال‌گیری مجدد از طرفین رابطه ۱۱.۱ از 0 تا x به دست می‌آوریم

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt \tag{۱۲.۱}$$

با استفاده از قضیه ۲.۱۰.۱ می‌توان رابطه ۱۲.۱ را به شکل زیر نوشت:

$$y(x) = \alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{۱۳.۱}$$

با جایگذاری روابط ۹.۱ و ۱۱.۱ و ۱۳.۱ در ۷.۱ داریم:

$$u(x) + p(x)\left[\beta + \int_0^x u(t)dt\right] + q(x)\left[\alpha + \beta x + \int_0^x (x-t)u(t)dt\right] = g(x) \tag{۱۴.۱}$$

معادله ۱۴.۱ می‌تواند به فرم استاندارد معادله انتگرال ولترای نوع دوم نوشته شود. یعنی،

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)u(t)dt \tag{۱۵.۱}$$

که در آن

$$k(x,t) = p(x) + q(x)(x-t) \tag{۱۶.۱}$$

و

$$f(x) = g(x) - \big[\beta p(x) + \alpha q(x) + \beta x q(x)\big]. \tag{۱۷.۱}$$

مثال ۳.۱۰.۱. مساله مقدرا اولیه مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$y''(x) - y(x) = \sin x, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{۱۸.۱}$$

قرار می‌دهیم:

$$y''(x) = u(x) \tag{۱۹.۱}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه ۱۹.۱ و اینکه $y'(0) = 0$ داریم:

$$y'(x) = \int_0^x u(t)dt \tag{۲۰.۱}$$

با انتگرال‌گیری مجدد از رابطه ۲۰.۱ و اینکه $y(0) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$y(x) = \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt = \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{۲۱.۱}$$

با جایگذاری روابط ۱۹.۱ تا ۲۱.۱ در ۱۸.۱ معادله انتگرال ولترای زیر حاصل می‌شود:

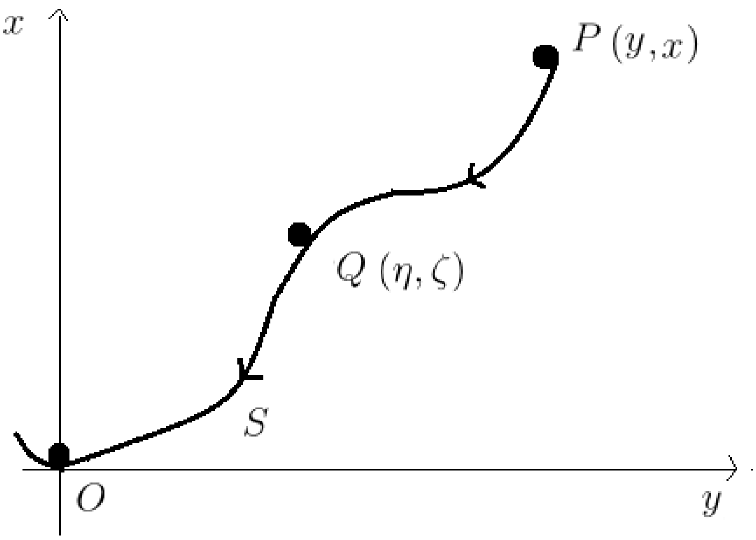
$$u(x) = \sin x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{۲۲.۱}$$

مدل فیزیکی: یافتن معادله منحنی سقوط

در سال ۱۸۲۳ نیلز آبل، ریاضیدان نروژی، در حل یک مساله ریاضی فیزیک، برای اولین بار به یک معادله انتگرال رسید که در ادامه معرفی می‌شود. یک منحنی هموار را به جای یک سطح عمودی در نظر می‌گیریم که گلوله‌ای به جرم M در نقطه P بر روی آن قرار می‌گیرد. شکل۱-۱.
گلوله بر اثر نیروی گرانشی زمین در نقطه P از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و تا پایین‌ترین نقطه که نقطه O هست، پایین می‌آید. سطح منحنی را بدون اصطکاک در نظر می‌گیریم و از مقاومت هوا نیز صرف نظر می‌کنیم. نقطه O را به عنوان مبدا مختصات در نظر می‌گیریم و محور عمودی را محور x و محور افقی را محور y در نظر می‌گیریم. مختصات نقطه P را (y, x) و مختصات نقطه Q را (η, ζ) و S را کمان OQ در نظر می‌گیریم.
بنابه قانون پایستگی انرژی، در هر نقطه از حرکت مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی گلوله، ثابت و برابر Mgx می‌باشد. در نقطه Q نیز مجموع انرژی‌های پتانسیل و جنبشی گلوله، ثابت و برابر Mgx است.
رابطه ریاضی این قانون در نقطه Q به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mg\zeta = Mgx \qquad (۲۳.۱)$$

که در آن g شتاب گرانشی زمین و v سرعت گلوله در نقطه Q است.



شکل ۱.۱: منحنی هموار