به نام خدا

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (آنالیز)

عنوان :

n—میانگین پذیری ضعیف جبرهای باناخ

استاد راهنما :

دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی

استاد مشاور :

دکتررجبعلی کامیابی گل

نگارنده :

امین روشنی

شهریور ماه ۱۳۸۸

تقدیم به

ساحت مقدس آقا علی بن موسی الرضا

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و هر آنکه در راه علم تلاش می‌کند

قدردانی

حمد و سپاس پروردگاری را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که مهربان هست و حقیر را به اتمام دوره‌ای دیگر از تحصیلاتم توفیق عنایت فرمود که اگر پرتو فضل او نبود هرگز موفق به انجام این مهم نمی‌شدم.

سپاس و تقدیر بی پایان خود را تقدیم استاد راهنمای بزرگوارم آقای دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی می نمایم که بدون راهنمایی‌های ارزنده، مساعدتهای همه‌جانبه و بی دریغ ایشان در مراحل مختلف تحقیق و تدوین رساله به انجام رساندن این پژوهش میسّر نبود. بدین وسیله مراتب قدردانی خویش را نسبت به ایشان ابراز می‌دارم و از خداوند بزرگ برای ایشان سلامتی و بیشترین موفقیّت ها را آرزومندم. همچنین سپاس و قدردانی خود را به اساتید محترم آقای دکتر میرزاوزیری و خانم دکتر حجازیان که قبول زحمت نموده و پایان نامه‌ام را مورد مطالعه و داوری قرار داده‌اند و آقای دکتر کامیابی گل که مشاورهٔ اینجانب را به عهده داشتند، تقدیم می‌نمایم.

از تمام دوستان و کارمندان دانشکده، واحد انتشارات، اداره آموزش و بخش کتابخانه که همکاری صمیمانه را داشتند، سپاسگزارم.

از هم اتاقی عزیز دوره کارشناسی ارشد و همکلاسی گرامیم آقای محسن کیان، تقدیر و تشکر می نمایم که در این ۲ سال کمکهای فراوانی در یادگیری بهتر دروس ارشد و اتمام پایان نامه داشتند. همچنین از همکلاسی بزرگوار و ارجمندم خانم اعظم عرفانیان عطار، تشکر می نمایم که در بررسی این رساله کمال همکاری را با بنده داشتند. از دوست گرامیم آقای آرش قاآنی فراشاهی که از شروع رساله تا پایان آن از هیچ کمکی دریغ نکردند بسیار سپاسگزارم.

و اما دوستان بسیار عزیز، بزرگوار و گرامیم آقایان محمد شیرازیان و حمید ترابی اردکانی، که ٦ سال زیبا، خاطره‌انگیز، پرهیجان!! و به یاد ماندنی را در خوابگاه دانشگاه فردوسی کنار هم تجربه کردیم و با غمها و شادی ها همیشه یار و یاور همدیگر بودیم، تقدیر و تشکر فراوان می نمایم.

خیلی خوشحالم که تمامی این ۵ دوست و همکلاسیه بزرگوارم موفق به قبولی در مقطع دکتری

ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد شدند و برای ایشان سلامتی و موفقیت هر چه بیشتر در تمامی مراحل زندگی را آرزومندم.

در نهایت از پدر و مادر عزیز و برادر بزرگتر خود آقای حسین روشنی بسیار متشکرم که آنچه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند و در این ۲۵ سال زندگی‌ام، کمکهای فراوان و راهنمایی‌های ارزنده ایشان باعث شد به دانشگاه راه پیدا کرده و مراحل موفق دیگری را در زندگی تجربه کنم.

در پایان خیلی خوشحالم که در روز تولد ۲۵ سالگی‌ام ، این مهم به سرانجام رسید. امید است بتوانم با تدریس و آموزش ریاضی چه در دوره دبیرستان و چه در دانشگاه موفق باشم و به کشور و مردم خوبم خدمت کنم.

این مجموعه را به همهٔ این بزرگواران تقدیم می‌کنم.

امین روشنی — ۱۸ شهریور ۱۳۸۸

فهرست مندرجات

خلاصه

در سال ۱۹۵۱ آرنز[۱] دو ضرب روی دوگان دوم جبر باناخ $\mathcal{A}$ یعنی $\mathcal{A}^{**}$ تعریف کرد و ثابت کرد $\mathcal{A}^{**}$ تحت هر کدام از این دو ضرب به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود. آرنز حالتی را که این دو ضرب برهم منطبق می‌شوند را منظم آرنزی نامید.

نتایج مهم و اولیه در این زمینه به شرمن[۲] منسوب است. او ثابت کرد هر $C^{\star}-$جبر منظم آرنزی است و دوگان دوم هر $C^{\star}-$جبر خود یک $C^{\star}-$جبر است.
سیوین و یود[۳] در[۴] به یک نتیجه جالب توجه دست یافتند، آنها ثابت کردند که برای یک گروه توپولوژیک هاسدورف موضعاً فشرده و آبلی G، شرط لازم و کافی برای منظم آرنزی بودن $L^{1}(G)$ متناهی بودن G است. این نتیجه در [۳۱] توسط یانگ[۴] برای هر گروه توپولوژیک هاسدورف موضعاً فشرده دلخواه تعمیم داده شد.

میانگین پذیری مفهومی است که تا سال ۱۹۷۲ فقط برای گروهها بکار می‌رفت. این مفهوم جالب روی گروههای توپولوژیک موضعاً فشرده شرایط خوبی را برای برخی از جبرهای وابسته به گروه G مانند $L^{1}(G)$ بدست می‌دهد.

---

[۱] Arens

[۲] Sherman

[۳] Civin and Yood

[۴] Young

این مفهوم اولین بار توسط جانسون[۵] مطرح و میانگین پذیری[۶] جبر باناخ نامیده شد. پس از جانسون ریاضیدانان زیادی در این زمینه شروع به فعالیت کردند و انواع دیگری از میانگین پذیری نیز ارائه شد. به عنوان مثال دیلز[۷] در سال ۱۹۸۷ مفهوم میانگین پذیری ضعیف[۸] جبرهای باناخ را مطرح کرد.

دراین رساله فصل اول را به‌بیان مفاهیم اساسی ومقدماتی مورد نیازدر فصلهای آینده، پرداخته‌ایم.
در فصل دوم مفاهیم و قضایای اساسی از میانگین پذیری را ارائه می کنیم. ضربهای آرنز را روی دوگان دوم A معرفی کرده و شرایط معادل منظم آرنزی را بررسی می کنیم. نشان می دهیم هر $C^\star$—جبر منظم آرنزی است و برای هر $n \in \mathbb{N}$، n—میانگین پذیر ضعیف می باشد ولی در حالت کلی میانگین پذیر نیست. همچنین جبر گروهی $L^۱(G)$، $(۲n+۱)$—میانگین پذیر است.
در فصل سوم که به دو بخش تقسیم کرده‌ایم، ابتدا در بخش اول نشان می دهیم جبر یکنواخت A ، $۲n$—میانگین پذیرضعیف می باشد. در بخش دوم جبرهای لیپ شیتز را معرفی کرده و میانگین پذیری ضعیف را روی این جبرها بررسی می کنیم.
در فصل چهارم میانگین پذیری روی جبر عملگر ها از جمله عملگر های هسته ای، عملگرهای تقریب پذیر و ... را بررسی می کنیم.
بطور کلی در این رساله روابط بین n—میانگین پذیری ضعیف و m—میانگین پذیری ضعیف را برای اعداد طبیعی n, m بررسی می کنیم.

مرجع اصلی این رساله مقالهٔ زیر می باشد:

H. G. Dales, F. Ghahramani, and N. Gronbaek , *Derivations into iterated duals of Banach algebra.* Studia Math **128** (1), (1998) 19-54.

---

[۵] Johnson
[۶] Amenability
[۷] Dales
[۸] Weak Amenability

فصل ۱

پیش نیازها

مقدمه

در این فصل تعاریف، گزاره‌ها، قضایا و نتایجی را که در فصلهای آینده به آنها نیاز داریم را بیان خواهیم کرد و برهان برخی از آنها را که اساسی بوده و یا مرجعی برای آنها نیافته‌ایم، خواهیم آورد و در بقیهٔ موارد اثبات را به مراجع مورد استفاده ارجاع خواهیم داد. مفاهیم مربوط به فضاهای نرمدار و باناخ را در بخش اول، مفاهیمی از جبرهای باناخ را در بخش دوم ارائه کرده‌ایم.

۱.۱ فضاهای باناخ

فضای برداری X روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است) به همراه نگاشت $\|\cdot\| : X \to [0,+\infty)$ را یک فضای نرمدار گوییم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم

۱) $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

۳) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای نرمدار $(X, \|\cdot\|)$ را باناخ [۱] گوییم هر گاه نسبت به متر تولید شده توسط نرم کامل باشد.

منظور از فضای ضرب داخلی [۲]، فضای برداری $\mathcal{H}$ است مجهز به تابعی مانند $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ به طوری که برای هر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

۱) $\langle x, x \rangle \geq 0$

۲) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

۳) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

۴) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

هر فضای ضرب داخلی با نرم $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ فضایی نرمدار است.

فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت [۳] گوییم هر گاه $\mathcal{H}$ نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی فضایی باناخ باشد.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد. اگر $f : X \to \mathbb{C}$ تابعی کراندار باشد آنگاه $\|f\|_\infty$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}.$$

---

[۱] Banach

[۲] Inner product

[۳] Hilbert space

$\|.\|_\infty$ یک نرم روی فضای توابع کراندار در X یعنی $B(X)$ است و $(B(X), \|.\|_\infty)$ یک فضای باناخ می باشد. همچنین

$$\begin{aligned} C(X) &= \{f \in B(X) \ : \ \text{پیوسته است } f\}, \\ C_\circ(X) &= \{f \in C(X) \ : \ \text{در بی‌نهایت صفر می‌شود } f\}, \\ C_{\circ\circ}(X) &= \{f \in C_\circ(X) \ : \ \text{دارای محمل فشرده است } f\}, \end{aligned}$$

که در آن $C(X)$ و $C_\circ(X)$ زیرفضاهای بسته از $B(X)$ هستند، در نتیجه خود فضاهایی باناخ خواهند بود. اما $C_{\circ\circ}(X)$ زیرفضای بسته‌ای از $B(X)$ نیست و در واقع بستار $C_{\circ\circ}(X)$ برابر $C_\circ(X)$ است. منظور از در بی نهایت صفر شدن[۴] تابع f آن است که برای هر $\varepsilon > \circ$، $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد و همچنین منظور از محمل[۵] f بستار مجموعهٔ $\{x \in X \ : \ f(x) \neq \circ\}$ است.
فرض کنید X یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ روی آن باشد و $1 \leq p < \infty$ و f تابعی اندازه‌پذیر مختلط روی X باشد. $\|f\|_p$ را این گونه تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p},$$

و $L^p(\mu)$ را برای نمایش مجموعه توابع اندازه‌پذیر مانند f بکار می‌بریم که $\|f\|_p < \infty$.
همچنین $L^\infty(\mu)$ را برای توابع اندازه‌پذیری مانند f بکار می‌بریم که

$$\|f\|_\infty = ess \sup |f| < \infty$$

. توجه شود که $\|.\|_p$ یک شبه نرم روی $L^p(\mu)$ است و با در نظر گرفتن فضای خارج قسمتی $\frac{L^P(\mu)}{\sim}$ که $f \sim g \Longleftrightarrow \|f-g\|_p = \circ$ به یک فضای نرمدار تبدیل می‌شود و به‌علاوه فضای نرمدار حاصل باناخ است.

حال اگر X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد آنگاه $M(X)$ شامل تمام اندازه‌های مختلط منظم بورلی مانند μ تحت نرم زیر

[۴] Vanish at infinity

[۵] Support

$$\|\mu\| = |\mu|(X) = \{\sum_{j=1}^{m} |\mu(E_j)| : \text{یک افراز } X \text{ با مجموعه های اندازه پذیر است } \{Ej\}_{j=1}^{m}\}$$

به یک فضای نرمدار تبدیل می شود.

حال اگر μ، یک اندازه کامل مثبت و بورل روی فضای توپولوژیک هاسدورف موضعاً فشرده X باشد که برای هر مجموعه فشرده K ، $\mu(K) < \infty$ آنگاه برای $1 < p < \infty$ ، $C_{00}(X)$ به‌عنوان زیرفضایی از $L^p(\mu)$ در آن چگال است.

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد، مجموعهٔ همه تابعک های خطی پیوسته روی X را فضای دوگان X نامیم و با X' نمایش می‌دهیم که همراه با نرم زیرتشکیل یک فضای باناخ می دهد

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \qquad (f \in X').$$

قضیهٔ نمایش ریس[6] نشان می‌دهد وقتی X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد آنگاه $C_0(X)' = M(X)$. بنابه تعریف بالا $M(X)$ نیز فضایی باناخ است.
همچنین اگر $1 < p, q < \infty$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ باشند، قضیهٔ نمایش ریس برای فضاهای $L^p(\mu)$ نشان می‌دهد

$$L^p(\mu)' \cong L^q(\mu).$$

قضیه: ۱.۱.۱ (قضیهٔ هان–باناخ) (ر.ک. [7] [۲۵]) [8] :
فرض کنید X فضایی نرمدار و M زیرفضایی از X باشد. اگر $f : M \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی کراندار باشد آنگاه تابعک خطی کراندار مانند F در X' موجود است به‌طوری که تحدید F به M برابر f است و $\|F\| = \|f\|$.

---

[6] Riesz Representation Theorem

[7] Rudin

[8] Hahn - Banach Theorem

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند. مجموعهٔ همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. عملگر خطی و پیوسته $T' : Y' \to X'$ را عملگر الحاقی[۹] T نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< T'(\lambda), x > = < \lambda, T(x) > \qquad (x \in X, \lambda \in Y').$$

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و X' دوگان آن باشد. توپولوژی تولید شده توسط X' روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی τ روی X که هر $f \in X'$ نسبت به τ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف[۱۰] روی X گوییم و آن را با $\sigma(X,X')$ نمایش می دهیم.

در واقع تمام مجموعه‌های به‌شکل :

$$U(f, x_\circ, \epsilon) = \{x \in X \ : \ |f(x) - f(x_\circ)| < \epsilon \} \qquad (f \in X', x_\circ \in X, \epsilon > \circ).$$

تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف روی X می‌دهند . X به همراه توپولوژی ضعیف را گاهی با (X, wk) نمایش می‌دهیم.

بدیهی است که دنبالهٔ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای نرمدار X همگرای ضعیف به x است ($x_n \xrightarrow{w} x$) اگروفقط اگر برای هر $f \in X'$ داشته باشیم: $\qquad f(x_n) \to f(x)$.

قضیه: ۳.۱.۱ اگر X یک فضای نرمدار باشد آنگاه $(X, wk)' = X'$. (ر.ک. [۱۱] [۵]).

[۹] Adjoint

[۱۰] Weak Topology

[۱۱] Conway

قضیه: ۴.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و A یک زیرمجموعهٔ محدب از آن باشد. دراینصورت بستار A با بستار ضعیف A برابر است یعنی $\overline{A}=\overline{A}^{w}$. (ر.ک. [۵]).

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و X'' دوگان دوم آن باشد. نگاشت $\wedge$ از X بتوی X'' با ضابطه $\hat{x}(f)=f(x)$ که $f\in X'$ را نشاننده طبیعی [۱۲] روی X نامیم.
براحتی می توان نشان داد نگاشت $\wedge$ یک همریختی طولپا[۱۳] از X بروی یک زیرفضای بستهٔ X'' است. در صورتی که $\wedge$ پوشا باشد X را بازتابی [۱۴] می گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X فضایی نرمدار باشد. منظور از توپولوژی ضعیف$-*$ [۱۵] روی X'، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X' است که نسبت به آن توپولوژی برای هر $x\in X$، $\hat{x}$ پیوسته می‌شود و آن را با $\sigma(X',X)$ نمایش می‌دهیم. X' به همراه این توپولوژی را گاهی با (X',wk') نمایش می‌دهیم.

از آنجایی که X' فضایی نرمدار است دارای توپولوژی ضعیف $\sigma(X',X'')$ نیز می‌باشد. بوضوح توپولوژی ضعیف$-*$ روی X' ضعیفتر از توپولوژی ضعیف روی X' است. در واقع تمام مجموعه‌های به شکل:

$$\begin{aligned} U(f_\circ,x,\epsilon) &= \{f\in X' \;:\; |\hat{x}(f)-\hat{x}(f_\circ)|<\epsilon\} \\ &= \{f\in X' \;:\; |f(x)-f_\circ(x)|<\epsilon\} \quad , \quad (f_\circ\in X', x\in X, \epsilon>\circ) \end{aligned}$$

تشکیل یک زیرپایه برای توپولوژی ضعیف$-*$ روی X' می‌دهند .
بسادگی می‌توان دید که دنبالهٔ $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای نرمدار X' همگرای ضعیف$-*$ به f است ($f_n \xrightarrow{w^*} f$) اگروفقط اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم: $f_n(x)\to f(x)$.

[۱۲] Natural embedding
[۱۳] Isometry linear
[۱۴] Reflexive
[۱۵] Weak* topology(w*-topology)

قضیه: ۷.۱.۱ اگر X یک فضای نرمدار باشد آنگاه $X = (X', \sigma(X', X))'$. (ر.ک. [۵]).

قضیه: ۸.۱.۱ (باناخ آلاغلو[۱۶]) (ر.ک. [۵]) :
اگر X یک فضای نرمدار باشد، آنگاه مجموعهٔ $B' = \{f \in X' \ : \ \|f\| \leq 1\}$ در X'، w^*-فشرده است.

قضیه: ۹.۱.۱ (گلدشتاین[۱۷])(ر.ک. [۵]) :
اگر X یک فضای نرمدار باشد آنگاه $\overline{X}^{w^*} = X''$. به عبارت دیگر برای هر $\Lambda \in X''$ یک تور کراندار (x_γ) در X موجود است بطوری که $\|x_\gamma\| \leq \|\Lambda\|$ و $\hat{x}_\gamma \xrightarrow{w^*} \Lambda$ در $(X'', \sigma(X'', X'))$.

---

[۱۶] Banach-Alaghlu's Theorem

[۱۷] Goldestine's theorem

۲.۱ جبرهای باناخ

فضای برداری $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ (که $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ است) را همراه با نگاشت

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}\\ &(x,y)\mapsto x\cdot y \end{aligned}$$

یک جبر گوییم، هرگاه برای هر $x,y,z\in\mathcal{A}$ و $\alpha\in\mathbb{F}$ داشته باشیم

۱) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$

۲) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$

۳) $(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$

۴) $\alpha(x\cdot y)=(\alpha x)\cdot y=x\cdot(\alpha y)$.

جبر $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ را جبر نرمدار گوییم، هرگاه $\mathcal{A}$ یک فضای برداری نرمدار باشد به‌طوری که برای هر $x,y\in\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\|x\cdot y\|\leq\|x\|.\|y\|.$$

هرگاه جبر نرمدار $(\mathcal{A},\|.\|)$ کامل باشد، آن را یک جبر باناخ [۱۸] می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد.دراینصورت $\mathcal{A}$

۱) یکدار است هر گاه $e\in\mathcal{A}$ یی موجود باشد بطوری که برای هر $x\in\mathcal{A}$، $ex=xe=x$،

۲) جابجایی است هر گاه برای هر $x,y\in\mathcal{A}$ داشته باشیم $xy=yx$،

۳) $\star$−جبر است هرگاه نگاشتی مانند $\star:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ با ضابطه $\star:x\mapsto x^\star$ موجود باشد به طوری که برای هر $x,y\in\mathcal{A}$ داشته باشیم :

$$(x+y)^\star=x^\star+y^\star\quad(xy)^\star=y^\star x^\star\quad(\alpha x)^\star=\alpha x^\star\quad(x^\star)^\star=x\quad\|x^\star\|=\|x\|.$$

---

[۱۸] Banach algebra

تعریف ۲.۲.۱ یک $\star$−جبر$\mathcal{A}$ را یک $C^\star$ −جبر می‌نامیم هرگاه برای هر$x \in \mathcal{A}$، $\|x\|^2 = \|xx^\star\|$.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبرباناخ روی میدان $\mathbb{F}$ و X یک فضای باناخ روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. X را یک $\mathcal{A}$−مدول چپ باناخ [۱۹] گوییم، هرگاه نگاشت $(a,x) \mapsto a \cdot x$ از $\mathcal{A} \times X$ بتوی X موجود باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $a \in \mathcal{A}$، نگاشت $x \mapsto a \cdot x$، یک نگاشت خطی روی X باشد،

۲) برای هر $x \in X$، نگاشت $a \mapsto a \cdot x$، یک نگاشت خطی روی $\mathcal{A}$ باشد،

۳) برای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ و $x \in X$، داشته باشیم

$$a_1 \cdot (a_2 \cdot x) = (a_1 a_2) \cdot x,$$

نگاشت $(a,x) \mapsto a \cdot x$ را ضرب مدولی چپ گوییم.

۴) برای هر $a \in \mathcal{A}$ و $x \in X$ داشته باشیم

$$\|a \cdot x\| \leq \|a\|.\|x\|.$$

$\mathcal{A}$−مدول راست باناخ [۲۰] به طور مشابه تعریف می‌شود. در نهایت X را یک $\mathcal{A}$−دومدول باناخ [۲۱] گوییم، هرگاه X هم $\mathcal{A}$−مدول راست باناخ و هم $\mathcal{A}$−مدول چپ باناخ باشد. همچنین ضربهای مدولی به ازای هر $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ و $x \in X$، در شرط زیر صدق کند:

$$a_1 \cdot (x \cdot a_2) = (a_1 \cdot x) \cdot a_2$$

مثلا جبر$\mathcal{A}$ باعمل ضرب در خودش یک $\mathcal{A}$−دومدول باناخ می باشد. $\mathcal{A}$−دومدول باناخ X متقارن است اگر

---

[۱۹] Banach Left $\mathcal{A}$-module

[۲۰] Banach Right $\mathcal{A}$-module

[۲۱] Banach $\mathcal{A}$-bimodule

$$a.x = x.a \quad (a \in \mathcal{A},\, x \in X).$$

در موردی که $\mathcal{A}$ عنصر همانی $e_{\mathcal{A}}$ را دارد، $\mathcal{A}$—دومدول باناخ یکدار است اگر

$$e_{\mathcal{A}}.x = x.e_{\mathcal{A}} = x \quad (x \in X).$$

مثال ۴.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و X یک $\mathcal{A}$−دو مدول باناخ باشد، دراین صورت با اعمال مدولی زیر، X' یک $\mathcal{A}$−دو مدول باناخ است.

$$\langle xa, \lambda\rangle = \langle x, a.\lambda\rangle \quad \langle ax, \lambda\rangle = \langle x, \lambda.a\rangle \quad (\lambda \in X', x \in X, a \in \mathcal{A}).$$

دوگان nام X را با $X^{(n)}$ نمایش می دهیم. بطور مشابه دوگانهای بالاتر $X^{(n)}$ ، $\mathcal{A}$—دومدول باناخ هستند. همچنین $X^{(n)}$ یک زیرمدول از $X^{(n+۲)}$ برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ است.

اگر X متقارن باشد، آنگاه $X^{(n)}$ نیز متقارن است. زیرا با استقرا اگر $X^{(k-۱)}$ متقارن باشد در این صورت

$$\langle x, a.\lambda\rangle = \langle x.a, \lambda\rangle = \langle a.x, \lambda\rangle = \langle x, \lambda.a\rangle.$$

که $x \in X^{(k-۱)}$ ، $\lambda \in X^{(k)}$ و $a \in \mathcal{A}$ لذا $\lambda.a = a.\lambda$. بنابراین $X^{(n)}$ متقارن است . همچنین اگر X یکدارباشد، آنگاه X' نیز یکدار است . از آنجایی که

$$\langle x, e_{\mathcal{A}}.\lambda\rangle = \langle x.e_{\mathcal{A}}, \lambda\rangle = \langle x, \lambda\rangle = \langle e_{\mathcal{A}}.x, \lambda\rangle = \langle x, \lambda.e_{\mathcal{A}}\rangle.$$

یعنی $e_{\mathcal{A}}.\lambda = \lambda.e_{\mathcal{A}}$.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد، تور کراندار $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq \mathcal{A}$ را یک همانی تقریبی کراندار[۲۲] $\mathcal{A}$ نامیم هر گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم:

$$ae_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} a \qquad , \qquad e_\alpha a \xrightarrow{\|\cdot\|} a.$$

[۲۲] Bounded approximate identity

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید X, Y, Z فضاهای خطی نرمدار روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، نگاشت $\Phi : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی [۲۳] نامیم هرگاه

۱) برای هر $x \in X$ نگاشت $y \mapsto \Phi(x, y)$ خطی باشد،
۲) برای هر $y \in Y$ نگاشت $x \mapsto \Phi(x, y)$ خطی باشد

در حالتی که $Z = \mathbb{F}$ باشد ، چنین نگاشتی را یک فرم دوخطی می نامیم.
نگاشت دو خطی Φ را کراندار گوییم هرگاه $M > 0$ ای موجود باشد بطوری که برای هر $x \in X, y \in Y$ داشته باشیم

$$\|\Phi(x, y)\| \leq M.\|x\|.\|y\|.$$

نرم این نگاشت برابر است با

$$\|\Phi\| = sup\{\|\Phi(x, y)\|; \quad \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

مجموعه همه نگاشتهای دو خطی کراندار از $X \times Y$ به Z را با $BL(X, Y; Z)$ نمایش می دهیم که یک فضای نرمدار می باشد.
اگر Z باناخ باشد آنگاه $BL(X, Y; Z)$ نیز باناخ است.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید X, Y فضاهای نرمدار روی $\mathbb{F}$ باشند. برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ نگاشت $x \otimes y : X' \times Y' \longrightarrow \mathbb{F}$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم :

$$(x \otimes y)(f, g) = f(x).g(y) \quad (f \in X', g \in Y').$$

در اینصورت نگاشت $x \otimes y$ تابعک خطی روی $X \times Y$ است و داریم

$$|(x \otimes y)(f, g)| = |f(x).g(y)| \leq \|f\|.\|x\|.\|g\|.\|y\|.$$

[۲۳] Bilinear