بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

مدلسازی ریاضی از پایداری بیماری HIV/AIDS با درمان و انتقال عمودی

استاد راهنما

دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور

دکتر حسین خیری

پژوهشگر

رضا دانایی

بهمن ۱۳۹۳

پروردگارا:

تو را شکر می‌کنم که هنوز زنده‌ام و فرصت جبران دارم،

در حالی که خیلی‌ها پیش از جبران مرده‌اند،

تو را شکر می‌کنم که سالم هستم،

در حالی که خیلی‌ها آرزو دارند یک جسم سالم داشته باشند،

تو را شکر می‌کنم که هنوز سایه پدر و مادرم بالای سرم است،

در حالی که خیلی‌ها آرزو دارند یک لحظه دیگر پدر و مادرشان را ببینند،

تو را شکر می‌کنم که فرصت ادامه تحصیل را به من دادی،

در حالی که خیلی‌ها آرزو دارند که ادامه تحصیل دهند ولی نمی‌توانند،

خدایا!!!

از کدام نعمتت سخن بگویم و شکرانه‌ی نعمت به جا آورم که نه نعمت تو را پایانی است تا آن را بشمارم

و نه مرا توانایی شکرانه نعمت تو است!

تقدیم به مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست.

تقدیم به

خانواده عزیزم

سپاس گزاری...

حمد و سپاس خداوندی را که اگر معرفت حمد خویش را از بندگان خود دریغ می‌داشت، در برابر آن‌همه نعمت‌ها که از پس یکدیگر بر آنان فرو می‌فرستاد، آن نعمت‌ها به کار می‌داشتند و لب به سپاسش نمی‌گشادند. به رزق او، فراخ روزی می‌جستند و شکرش نمی‌گفتند. و اگر چنین می‌بودند، از دایره انسانیت برون می‌افتادند و در زمره‌ی چهارپایان در می‌آمدند.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام**، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که همواره با رویی گشاده و سعه‌ی صدر در تمام مراحل آماده سازی این رساله یار و یاورم بودند.

از استاد گرانمایه‌ام جناب آقای دکتر **حسین خیری** که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل نمودند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از خانواده عزیزم، که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، صمیمانه سپاس‌گزاری می‌کنم.

رضا دانایی
بهمن ۱۳۹۳

نام خانوادگی دانشجو: دانایی نام: رضا
عنوان: مدلسازی ریاضی از پایداری بیماری HIV/AIDS با درمان و انتقال عمودی
استاد راهنما : دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام استاد مشاور : دکتر حسین خیری
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۳ تعداد صفحات: ۱۰۲
کلید واژه‌ها: ایدز، سیستم‌های دینامیکی، انتقال عمودی، سلول، نقاط تعادل، پایداری.

چکیده

اولین مدل ریاضی اپیدمولوژِی در سال ۱۷۶۰ به وسیله دانیل برونلی فرموله شد. پایه‌گذاری ریاضیات مدرن اپیدمولوژی بر پایه مدل‌های بخشی در قرن بیستم نهاده شده و از اواسط قرن بیستم ریاضیات اپیدمولوژی به صورت نمایی رشد پیدا کرده است. حضور ویروس HIV در سال ۱۹۸۱ که باعث بیماری ایدز شد از مهمترین پیامدهایی است که از طریق روابط جنسی منتقل می‌شود. یکی از اهداف مهم این پایاننامه مدل‌بندی انتقال ویروس ایدز از شخص مبتلا به فرزند میباشد. برای این منظور در این پایاننامه به تدوین و فرموله کردن مدلی ریاضی برای بیماری همه گیر ایدز که میتواند به صورت عمودی یا افقی در بین افراد منتقل شود میپردازیم.

فهرست مطالب

مقدمه ۳

۱ **سیستم‌های‌دینامیکی ومفاهیم اولیه** ۴
۱.۱ روش‌های هندسی برای درک رفتار جواب سیستم دینامیکی ۶
۲.۱ نقاط ثابت و پایداری ۹
۳.۱ تصاویر فاز سیستم‌های خطی ۱۶
۴.۱ خطی‌سازی در نقاط ثابت ۲۵
۵.۱ بررسی پایداری نقاط ثابت با توابع لیاپانوف ۲۸
۶.۱ نقاط حدی و دورهای حدی ۳۰
۷.۱ انشعاب ۳۳
۱.۷.۱ میدان برداری به طور ساختاری پایدار ۳۴
۲.۷.۱ انشعاب در نقاط غیرهذلولوی ۳۴
۸.۱ سیستم‌های گسسته ۳۹
۹.۱ محک راث–هورویتز ۴۱

۲ **دینامیکی از بیماری‌های عفونی** ۴۷
۱.۲ مقدمه ۴۸
۲.۲ مدل اپیدمی ساده و کاربردهای عملی ۴۹

۳ **مدل ریاضی** HIV ۵۹
۱.۳ مقدمه ۶۰
۲.۳ مدل ریاضی پایه HIV ۶۱
۱.۲.۳ فرمول بندی مدل ۶۲

۲.۲.۳ ناحیه ثابت ۶۳
۳.۲.۳ مثبت بودن جواب‌ها ۶۴
۴.۲.۳ نقاط تعادل ۶۵
۳.۳ مدل عفونت HIV ۶۵

۴ مدلسازی ریاضی از پایداری بیماری HIV/AIDS با درمان و انتقال عمودی ۶۸
۱.۴ عدد تکثیر ۶۹
۲.۴ مدل اپیدمی برای یک جمعیت ناهمگن ۶۹
۳.۴ نحوه به‌دست آوردن R_0 . . . . ۷۵
۴.۴ مدلسازی ریاضی از پایداری بیماری ایدز با درمان و انتقال عمودی ۷۹
۱.۴.۴ فرمول بندی مدل ۸۰
۵.۴ تجزیه و تحلیل مدل ۸۳
۱.۵.۴ مثبت بودن جوابها ۸۴
۲.۵.۴ عدد تولید مثل پایه مدل ۸۴
۳.۵.۴ تعادل بومی ۸۵
۴.۵.۴ پایداری کلی از تعادل بومی ۸۷
۶.۴ شبیه سازی عددی مدل ۸۸
۷.۴ نتایج و پیشنهادها ۹۴

مراجع ۹۵

واژه‌نامه تخصصی فارسی به انگلیسی ۹۸

واژه‌نامه تخصصی انگلیسی به فارسی ۱۰۰

مقدمه

یکی از عوامل کاهش طول عمر انسان در سال‌های اخیر بیماریهای عفونی بوده است. با اینکه در قرن بیستم به علت تولید واکسن‌هایی که جمعیت حساس را ایمن کرد نرخ مرگ و میر کاهش یافته، اما هنوز یکی از مهمترین عوامل مرگ و میر درکشورهای در حال توسعه بیماری‌های عفونی می‌باشد. ایدز بیماری ویرانگری است که سالانه بیش از ۲.۵ میلیون نفر از افراد آلوده را به کام مرگ می فرستد. برای کنترل انتقال بیماریها نیاز به اجرای برنامه های سلامت عمومی داریم تا اینکه تخریب ناشی از بیماری همه گیر ایدز را به حداقل برساند. مدل های ریاضی و اساسی مکانیزم انتقال بیماری ایدز می تواند به محققین علمی و پزشکی برای درک و پیش بینی شیوع آن در جمعیت های مختلف کمک کند. در این پایان نامه مدل های ریاضی دو نوع تعادل یعنی تعادل عاری از بیماری و تعادل بومی مورد مطالعه قرار میگیرد. نشان میدهیم که اگر تعداد تولید مثل پایه $R_\circ < ۱$ تعادل عاری از بیماری همیشه موضعی مجانبی پایدار بوده و تعادل بومی وجود ندارد. اگر $R_\circ > ۱$ یک تعادل منحصر به فرد موجود است که بطور موضعی مجانبی پایدار بوده و نشان داده میشود که تحت شرایطی بعلت انتقال عمودی (انتقال بیماری از مادر به فرزند) بیماری بومی میشود. در این پایان‌نامه که براساس مرجع [۱] تهیه می‌شود؛ پس از بیان مفاهیم اولیه مربوط به تحلیل ریاضی سیستم‌های دینامیکی، مدلی برای انتقال بیماری ایدز از یک شخص مبتلا (مادر) به شخصی دیگر (فرزند) ارائه داده و تحلیل ریاضی مربوط به آن را انجام می‌دهیم. این سیستم‌ها از نوع سیستم‌های دینامیکی بوده و با استفاده از مباحث موجود در سیستم های دینامیکی، می‌توان رفتار کیفی آن‌ها را مشخص نمود.

فصل ۱

سیستم‌های‌دینامیکی ومفاهیم اولیه

فضای فاز یک سیستم n بعدی مجموعه‌ی کاملی است از وضعیت‌هایی که می‌تواند برای سیستم اتفاق بیافتد. یک سیستم دینامیکی مجموعه‌ای از همه‌ی مسیرهای ممکن فضای فازی است و در آن با دانستن وضعیت فعلی می‌توان وضعیت آینده سیستم را تعیین کرد.

سیستم دینامیکی، قانون معینی است که موقعیت هر نقطه را در فضای حالت $D \subseteq R^n$ با گذشت زمان شرح می‌دهد. هرگاه زمان با استفاده از مقادیر صحیح سنجیده شود، یعنی$t \in Z$، سیستم دینامیکی را گسسته می‌گویند. اگر زمان به طور پیوسته تغییر کند، یعنی $t \in R$، سیستم دینامیکی را پیوسته می‌گویند. سیستم‌های گسسته به‌طور معمول با نگاشت تکراری به‌صورت

$$x_{n+۱} = f(x_n),$$

توصیف می‌شوند، در حالی‌که سیستم‌های پیوسته به‌طور معمول توسط معادله‌ی دیفرانسیل به‌صورت

$$\frac{dx}{dt} = F(x),$$

توصیف می‌شوند. بیشتر آنچه برای سیستم‌های پیوسته برقرار است با روندی مشابه برای سیستم‌های گسسته به کار برده می‌شوند.

در حالت کلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته تقسیم می‌شوند: سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی. سیستم $\dot{x} = X(x)$، $X : R^n \to R^n$ را سیستم خطی از مرتبه n گویند هرگاه X یک نگاشت خطی باشد. اگر X یک نگاشت غیرخطی باشد، آن‌را سیستم غیر خطی گویند. از آنجایی‌که بیشتر سیستم‌ها را نمی‌توان به‌صورت تحلیلی حل کرد، لذا همواره یافتن جواب صریح سیستم‌ها برای درک رفتار آن‌ها ممکن نیست. بنابراین، لازم است از ترکیب روش‌های تحلیلی و هندسی برای درک رفتار سیستم‌ها استفاده کرد.

۱.۱ روش‌های هندسی برای درک رفتار جواب سیستم دینامیکی

یک روش مناسب برای توصیف جواب یک سیستم دینامیکی، یافتن فرمولی صریح برای جواب آن است. در حالت کلی، پیدا کردن فرمولی صریح برای جواب، همواره امکان‌پذیر نیست. اما روش‌های دیگری جهت توصیف جواب وجود دارند که درک و استفاده از این روش‌ها بسیار آسان است. قبل از اینکه به توصیف جواب سیستم دینامیکی بپردازیم، باید از وجودی و منحصر به فردی جواب آن آگاه باشیم. از این‌رو، لازم است روشی بیان شود که وجودی جواب و منحصربه فردی آن‌را بدون حل سیستم تضمین کند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $D \subseteq R^{n+1}$ باشد. گویند $X \in C(D)$، هرگاه X تابعی پیوسته باشد. همچنین، گویند $X \in C^k(D)$، $k > 0$، هرگاه مشتق‌های X تا مرتبه kام موجود و پیوسته باشند.

قضیه ۲.۱.۱ (قضیه وجودی و منحصر به فردی جواب). *فرض کنید D زیر مجموعه بازی در R^{n+1} شامل x_0 باشد. اگر $X \in C(D)$، آنگاه مسأله مقدار اولیه*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

روی I دارای جواب است. همچنین، اگر $\frac{\partial X}{\partial x} \in C(D)$، آنگاه مسأله دارای جواب منحصر به فرد روی I است.

برهان. رجوع کنید به [۲۱] . □

تذکر ۳.۱.۱. در قضیه ۲.۱.۱ اگر I بزرگترین بازه‌ای باشد که مسأله مقدار اولیه در آن دارای جواب است.بازه I را **بازه ماکزیمال** می‌گویند.

در این بخش، از تکنیک‌های هندسی جهت توصیف جواب معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t, x), \tag{۱.۱}$$

استفاده می‌کنیم.

جواب $x(t)$ از معادله (۱.۱)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad x(\circ) = x_\circ,$$

به طور هندسی با نمودار $x(t)$ نمایش داده می‌شود. همواره رسم دقیق منحنی‌های جواب برای به دست آوردن رفتار کیفی آن‌ها مقدور نبوده و از طرفی، در حالت کلی نیز لازم نیست. در مثال بعدی، نشان می‌دهیم که می‌توان یک طرح کلی از دسته منحنی‌های جواب را به طور مستقیم ازمعادله دیفرانسیل به دست آورد.

مثال ۴.۱.۱. برای رسم منحنی‌های جواب معادله دیفرانسیل

$$\dot{x} = t + \frac{t}{x} \tag{۲.۱}$$

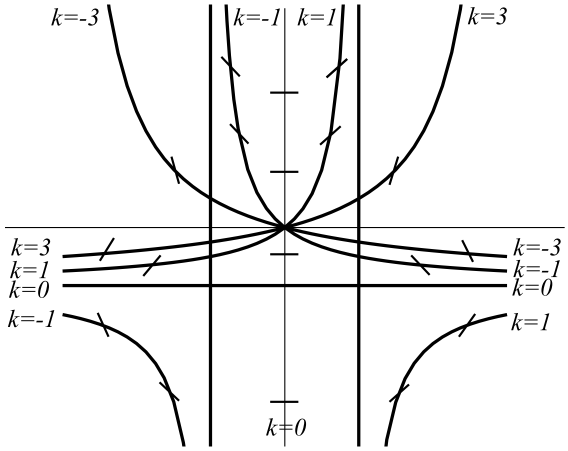
در ناحیه $D = \{(t,x) : x \neq \circ\}$ از صفحه tx، مراحل زیر را در نظر می‌گیریم.

*۱. معادله دیفرانسیل (۲.۱)، شیب منحنی جواب را در تمام نقاط ناحیه D به دست می‌دهد. منحنی‌های جواب مسأله، منحنی $t + \frac{t}{x} = k$ را با شیب ثابت k قطع می‌کنند. این منحنی، **منحنی هم شیب** با شیب k نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای k، هم‌شیب‌ها به دست می‌آید که دسته‌ای از هذلولی‌های*

$$x = \frac{t}{k-t}$$

با مجانب‌های $x = -۱$ و $t = k$ است. یک انتخاب از این هم‌شیب‌ها در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

۲. علامت $\ddot{x}$ در D تعیین می‌کند، که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر هستند. اگر $\ddot{x} > \circ$ ($\ddot{x} < \circ$)، آنگاه $\dot{x}$ با افزایش t، افزایش (کاهش) می‌یابد و منحنی‌های جواب، محدب (مقعر) می‌شوند. لذا می‌توان



شکل ۱.۱: هم‌شیب‌های انتخاب شده برای معادله $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

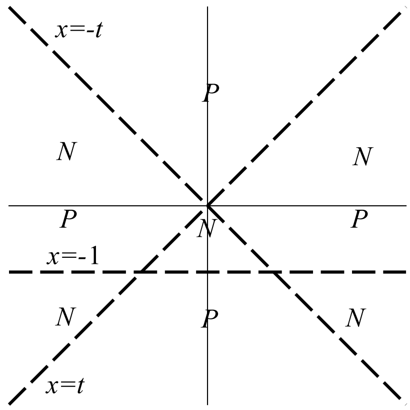
ناحیه D را به زیر مجموعه‌هایی افراز کرد که منحنی‌های جواب، محدب یا مقعر باشند و با مرزهایی که $\ddot{x} = ۰$ است، جدا شوند. برای (۲.۱) داریم

$$\ddot{x} = x^{-۳}(x + ۱)(x - t)(x + t)$$

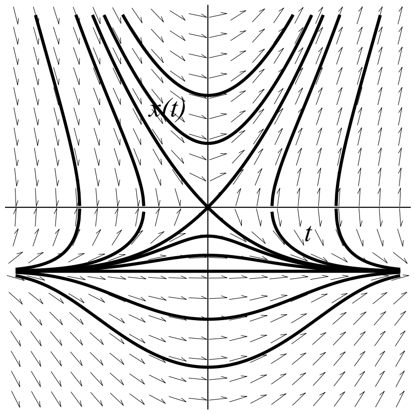
از این رو، همچنان که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است، D به ناحیه‌های P ($\ddot{x} > ۰$) و N ($\ddot{x} < ۰$) افراز می‌شود.

۳. برای معادله دیفرانسیل (۲.۱)، هم‌شیب‌ها نسبت به $t = ۰$، به طور متقارن قرار می‌گیرند و لذا منحنی‌های جواب نیز متقارن هستند. تابع $X(t, x) = t + \frac{t}{x}$ در رابطه $X(-t, x) = -X(t, x)$ صدق می‌کند. بنابراین، اگر $x(t)$ یک جواب برای $\dot{x} = X(t, x)$ باشد، آنگاه $x(-t)$ نیز یک جواب است. درنتیجه، می‌توان یک طرح کلی از منحنی‌های جواب، برای (۲.۱) بدست آورد. شکل (۳.۱) را ببینید. با توجه به اینکه $X(t, x)$ و $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{-t}{x^۲}$ روی D پیوسته هستند، لذا از هر نقطه D دقیقاً یک منحنی جواب می‌گذرد..

بنابراین، یک طرح کلی، با مراحل گفته شده به‌دست می‌آید. همانطور که از مثال روشن است، رفتار کیفی جواب‌ها توسط $X(t, x)$ تعیین می‌شود.



شکل ۲.۱: ناحیه‌های تحدب (P) و تعقر (N) برای جواب‌های $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.



شکل ۳.۱: منحنی‌های جواب معادله دیفراسیل $\dot{x} = t + \frac{t}{x}$.

۲.۱ نقاط ثابت و پایداری

تعریف ۱.۲.۱. سیستم‌هایی به‌صورت

$$\dot{x} = X(x), \qquad x \in D \subseteq R^n \tag{۳.۱}$$

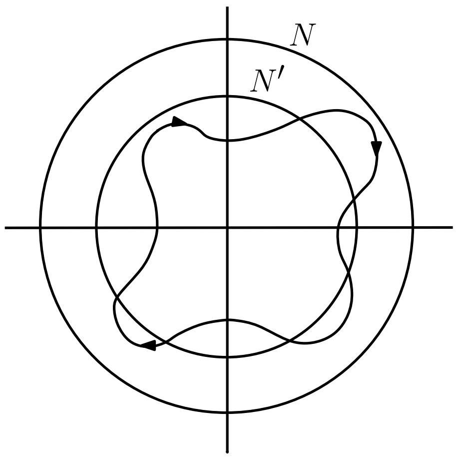
که متغییر مستقل t فقط در دیفرانسیل dt در سمت چپ بوده و به طور صریح در تابع $X(x)$ در سمت راست ظاهر نمی‌گردد، یک **سیستم خودگردان** نامیده می‌شود.
یکی از بهترین روش‌ها برای درک یک سیستم دینامیکی خودگردان پیدا کردن برخی نقاط خاص سیستم و بررسی رفتار سیستم در همسایگی این نقاط است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم خودگردان (۳.۱) را در نظر بگیرید، یک **نقطه بحرانی** (نقطه ثابت، نقطه تعادل)، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = X(x) = 0$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۳.۲.۱. نقطه ثابت x_0 از سیستم (۳.۱) را **منفرد** گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_0 وجود داشته باشد به‌طوری که x_0 تنها نقطه ثابت (۳.۱) در آن همسایگی باشد.

لازم به ذکر است که همواره می‌توان نقطه ثابت $x_{\circ}$ را مبدأ اختیار کرد. این کار به کلیت مسأله هیچ خللی وارد نمی‌کند؛ زیرا با تبدیل مختصات $y = x - x_{\circ}$ می‌توان $x_{\circ}$ را به مبدأ انتقال داد.
نقاط بحرانی در بررسی رفتار سیستم دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و بر اساس آن می‌توان نحوه تحول سیستم را درک کرد. رفتار جواب سیستم (۳.۱) در همسایگی هر نقطه بحرانی فقط و فقط به‌صورت یکی از سه حالت به طور مجانبی پایدار، پایدار خنثی و ناپایدار است.

تعریف ۴.۲.۱. نقطه بحرانی $x_{\circ}$ از (۳.۱) را **پایدار** گویند هرگاه برای هر همسایگی N از $x_{\circ}$ یک همسایگی کوچک‌تر $N' \subseteq N$ از $x_{\circ}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مسیری که وارد N' می‌شود، با افزایش t در N باقی بماند. شکل (۴.۱) را ببینید.



شکل ۴.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۴.۲.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در R^{2}.

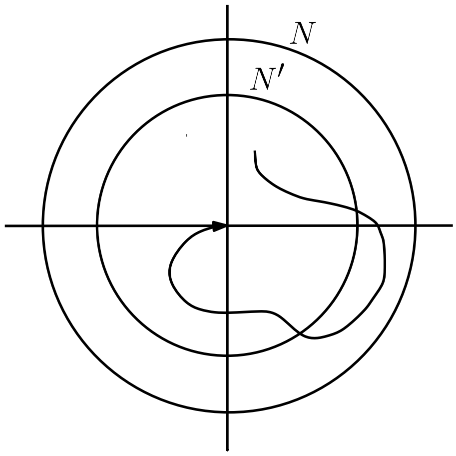
تعریف ۵.۲.۱. نقطه بحرانی $x_{\circ}$ از (۳.۱) را **به طور مجانبی پایدار** گویند هرگاه

۱. پایدار باشد؛

۲. یک همسایگی N از $x_{\circ}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر مسیری که وارد N می‌شود با افزایش t، به $x_{\circ}$ میل کند.

توجه کنید که در تعریف پایداری، هر مسیری اگر به اندازه کافی در نزدیکی $x_{\circ}$ باشد، به اندازه دلخواه در نزدیکی آن باقی می‌ماند. اما پایداری مجانبی، قوی‌تر از پایداری است؛ زیرا علاوه بر پایداری ایجاب

می‌کند که با افزایش t هر مسیری به اندازه کافی به x_0 نزدیک شود. این خاصیت، در شکل (۵.۱) نشان داده شده است.

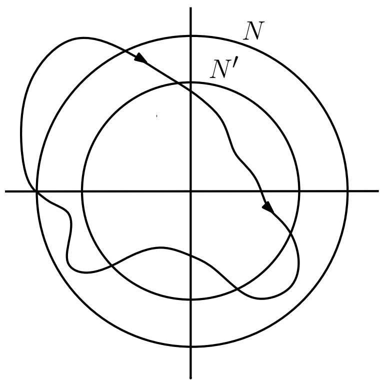


شکل ۵.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۵.۲.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2.

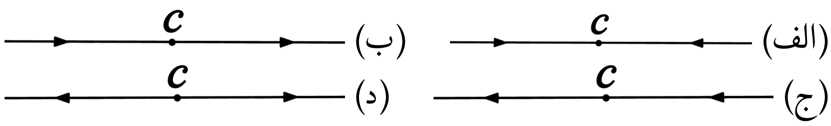
تعریف ۶.۲.۱. نقطه بحرانی x_0 از (۳.۱) را **پایدار خنثی** گویند هرگاه پایدار باشد اما به‌طور مجانبی پایدار نباشد.

تعریف ۷.۲.۱. نقطه بحرانی x_0 از (۳.۱) را **ناپایدار** گویند هرگاه پایدار نباشد.

به‌عبارت دیگر، یک همسایگی N از نقطه بحرانی x_0 وجود دارد به‌طوری‌که برای هر همسایگی $N' \subseteq N$، حداقل یک مسیر وجود دارد که وارد N' می‌شود ولی در N باقی نمی‌ماند. شکل (۶.۱) را ببینید.



شکل ۶.۱: همسایگی‌های N و N' در تعریف ۷.۲.۱ برای نقطه بحرانی مبدأ در R^2.



شکل ۷.۱: چهار خط فاز ممکنِ متناظر با یک نقطه ثابت منفرد. نقطه ثابت مورد نظر در (الف)، جاذب، در (ب) و (ج)، گذر و در (د)، دافع است.

تعریف ۸.۲.۱. نقاط ثابت به‌طور مجانبی پایدار را **جاذب** می‌گویند و نقاط ناپایدار را **دافع** می‌گویند.

نقاط ثابت معادله خودگردان

$$\dot{x} = X(x), \qquad x \in D \subseteq R \tag{۴.۱}$$

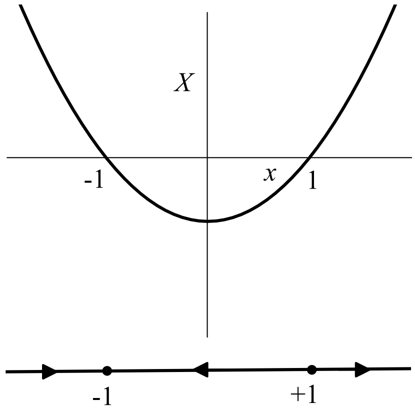
را می‌توان بر اساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع دافع، جذب و گذر دسته بندی کرد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان (۴.۱) باشد. گوییم

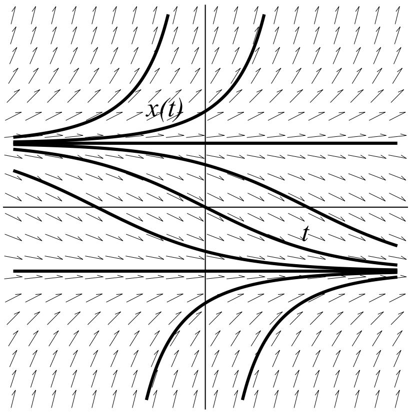
- c **جاذب** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c به آن میل کنند؛
- c **دافع** است هرگاه جواب‌های نزدیک به c از آن دور شوند؛
- c **گذر** است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

شکل (۷.۱) انواع نقاط ثابت در یک معادله دیفرانسیل را نشان می‌دهد. رفتار کیفی هر معادله دیفرانسیل با یک نقطه ثابت، با یکی از شکل‌های نشان داده شده در شکل (۷.۱) متناظر است. رفتار هر معادله خودگردان به‌طور کامل با ماهیت نقاط ثابت آن تعیین می‌شود. این نمایش از رفتار جواب را ***خط فاز*** *می‌گویند.*

برای رسم خط فاز باید نقاط ثابت و بازه‌ای که جواب‌ها در آن افزایش یا کاهش می‌یابند را بدانیم، یعنی باید نقاطی که $X(x) = 0$، بازه‌ای که $X(x) > 0$ و بازه‌ای که $X(x) < 0$ است را پیدا کنیم، بنابراین برای رسم خط فاز، تنها اطلاعات کیفی در مورد $X(x)$ نیاز است. از این‌رو، می‌توان با رسم نمودار



شکل ۸.۱: نمودار تابع $X(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ و خط فاز متناظر با آن.



شکل ۹.۱: منحنی‌های جواب معادله $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

$X(x)$ تمامی این اطلاعات را به‌دست آورد. شکل (۸.۱) را ببینید. با استفاده از خط فاز، می‌توان طرحی کیفی از جواب‌های معادله دیفرانسیل را به‌دست آورد. شکل (۹.۱) را ببینید.

تعریف ۱۰.۲.۱. دو معادله دیفرانسیل خودگردان را **هم‌ارز کیفی** گویند هرگاه تعداد نقاط ثابت یکسان داشته باشند و همچنین ترتیب رفتار کیفی نقاط ثابت یا به‌عبارتی، ماهیت نقاط ثابت یکسان باشد.

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید c یک نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. در این‌صورت*

۱. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) < 0$، آنگاه c از نوع جاذب است؛*

۲. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) > 0$، آنگاه c از نوع دافع است؛*

۳. *اگر $\frac{dX}{dx}(c) = 0$، آنگاه برای تعیین نوع نقطه ثابت باید مشتقات مراتب بالا بررسی شود.*

برهان. فرض کنید c نقطه ثابت معادله خودگردان باشد. یک انحراف کوچک $\xi(t)$ از نقطه ثابت را در نظر بگیرید، لذا $x(t) = c + \xi(t)$ و

$$\dot{\xi} = \dot{x} = X(x) = X(c + \xi).$$

با محاسبه بسط تیلور X حول c، به‌عبارت

$$\dot{\xi} = X(c) + \xi \frac{dX}{dx}(c) + \frac{\xi^{۲}}{۲} \frac{d^{۲}X}{dx^{۲}}(c) + \cdots$$

از آنجایی‌که $X(c) = ۰$ است، لذا با چشم‌پوشی از مقادیر غیر خطی داریم

$$\dot{\xi} = X(c) + \xi \frac{dX}{dx}(c).$$

بنابراین، اگر $\frac{dX}{dx}(c) < ۰$، آنگاه انحراف $\xi(t)$ به صورت نمایی کاهش می‌یابد و اگر $\frac{dX}{dx}(c) > ۰$، آنگاه انحراف $\xi(t)$ به صورت نمایی افزایش می‌یابد. همچنین، اگر $\frac{dX}{dx}(c) = ۰$، آنگاه برای تعیین نوع نقطه ثابت باید مشتق‌های مرتبه بالا بررسی شود. $\square$

مثال ۱.۲.۱۲. یک مدل اولیه برای رشد جمعیت، مبتنی بر این فرض است که

- نرخ رشد جمعیت متناسب با تعداد جمعیت است.

در شرایط خاص، محدودیت فضا و یا منابع، هیچ تاثیری بر روی رشد جمعیت ندارد. این فرض، برای جمعیت‌های کوچک در محیط‌های بزرگ معقول است. در این صورت، معادله رشد جمعیت

$$\dot{x} = ax \tag{۱.۵}$$

است که در آن x بیانگر جمعیت یک گونه خاص در زمان t و پارامتر $a > ۰$، نرخ رشد است. اما اگر محدودیتی در منابع و یا محیط وجود داشته باشد، باید فرض‌های

- *اگر جمعیت کم باشد، نرخ رشد متناسب با اندازه جمعیت است؛*
- *اگر جمعیت زیاد باشد، به دلیل محدودیت منابع و محیط، نرخ مرگ و میر بیشتر از نرخ تولد است. لذا با گذشت زمان، جمعیت کاهش می‌یابد. به عبارتی، نرخ رشد جمعیت منفی می‌شود.*

را در نظر بگیریم. با فرض محدودیت منابع پارامتر N را در نظر می‌گیریم که بیانگر ظرفیت برد محیط است. فرض می‌کنیم که اگر $x < N$، جمعیت افزایش و اگر $x > N$ باشد، جمعیت کاهش می‌یابد.