بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه
مرکز تبریز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی

گروه کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان پایان‌نامه:

حل معادلات انتگرال با هسته‌های لگاریتمی بوسیله چندجمله‌ای‌های چبیشف

کبری طاهرخانی

استاد راهنما: دکتر صداقت شهمراد

استاد مشاور: دکتر مهدی صحت‌خواه

آبان ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

فهرست جدول‌ها

صفحه

تقدیم به

آستان پر مهر امام منتظرم

که حضورش را تشنه‌ایم.

تقدیر و تشکر

می‌گویند هر وقت خواستی جاده‌ای را برای رفتن انتخاب کنی تمام خواستنت را به کسی بگو که می‌داند بهار قدمهایت در کدام کوچه شروع می‌شود.

امروز که من اندکی از بی‌کران علم خدا یاد گرفته‌ام، دستانم را بلند می‌کنم و مهربانی خدای خوبم را ربنا می‌شوم.

بر دستان زحمت کش پدرم و قدمهای همراه مادرم بوسه می‌زنم که یادم دادند چگونه زندگی کردن را.

از استاد راهنمای عالمم، جناب آقای دکتر صداقت شهمراد، که صبورانه زکات دانایی‌شان را برایم کنار گذاشتند تا یاد بگیرم آنچه را که نمی‌دانم، بی‌حساب ممنونم.

همچنین از استاد مشاور ارجمندم، جناب آقای دکتر مهدی صحت خواه که قبول زحمت فرمودند، سپاسگزارم.

همچنین از مدیر گروه محترم، جناب آقای دکتر محمد چایچی کمال تشکر را دارم.

مراتب قدردانی خود را از داور محترم این پایان نامه و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، اعلام می‌کنم.

در آخر برای تمام کسانی که در این مسیر یاد گرفتن همراهم شدند تا خسته نشوم از رفتن، از خداوند یگانه‌ام، باران باران خوبی طلب می‌کنم.

چکیده فارسی

در این پایان‌نامه که بر اساس مرجع [۹] تدوین شده است، حل عددی معادلات انتگرال با هسته‌های لگاریتمی بوسیله چندجمله‌ای‌های چبیشف مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین خطای روش و همگرایی آن مورد بحث قرار می‌گیرد. در پایان وضعیت روش ارائه شده در مقایسه با روش هم‌محلی با ارائه چند مثال ارزیابی می‌شود.

واژگان کلیدی

معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال با هسته‌های لگاریتمی، چندجمله‌ای‌های چبیشف، تقریب عددی جواب‌ها.

مقدمه

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های لگاریتمی بوسیله بسط چندجمله‌ای‌های چبیشف مورد بررسی قرار گرفته است. این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد که در فصل اول با معادلات انتگرال آشنا می‌شویم و در فصل دوم در مورد چندجمله‌ای‌های چبیشف و خواص آنها بحث می‌کنیم. هدف اصلی پایان‌نامه که روش بسط چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های لگاریتمی است، در فصل سوم بیان شده است و در پیوست برنامه‌های کامپیوتری برای چند مثال عددی ارائه شده است.

حل عددی معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های منفرد با روش بسط چندجمله‌ای‌های چبیشف در [۱۰] بررسی شده است. در [۴] تحلیل مقدماتی برای حل معادله انتگرال فردهلم منفرد به طور ضعیف بیان شده و بحث کاملی از مرتبه همگرایی روش چندجمله‌ای‌های تکه‌ای روی شبکه مدرج برای معادلات انتگرال ولترا با هسته‌های لگاریتمی منفرد مورد بررسی قرار گرفته است.

در این پایان‌نامه، روش بسط چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی نوع دوم ولترا با هسته‌های لگاریتمی به شکل

$$y(t) = g(t) + \int_{0}^{t} \ln(t-s) f(t,s,y(s))\, ds$$

بکار برده شده است که در آن تابع $f(t,s,y(s))$ نسبت به متغیرهای $t \in I = [0,T]$ و $s \in [0,t)$ و $y \in R$ به طور پیوسته مشتق پذیر است و تابع g نسبت به متغیر $t \in (0,T]$، به طور پیوسته مشتق پذیر است.

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ مقدمه

در این فصل انواع معادلات انتگرال و ویژگی‌های آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم ([۱] و [۱۲]).

۲.۱ آشنایی با معادلات انتگرال

تعریف ۱.۲.۱ معادله انتگرال: هر معادله‌ای که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود یک معادله انتگرال است. شکل کلی معادلات انتگرال به صورت

$$F\Big(x, y(x), \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} G(x,t,y(t))dt\Big) = \circ,$$

است به‌طوری که y تابع مجهول است.

- معادلات انتگرال به دو دسته‌ی خطی و غیر خطی تقسیم می‌شوند

  ۱) معادلات انتگرال خطی دارای شکل

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt = f(x),$$

  می‌باشند

  ۲) معادلات انتگرال غیر خطی نیز به صورت

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t,y(t))dt = f(x),$$

  یا به شکل

$$y(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(y(t))dt = f(x),$$

  می‌باشند.

  $K(x,t)$ هسته‌ی معادله انتگرال نامیده می‌شود.

۲.۲.۱ طبقه‌بندی معادلات انتگرال خطی

- معادله انتگرال فردهلم نوع دوم:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad a \le t \le b.$$

- معادله انتگرال فردهلم نوع اول:

$$g(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad a \le t \le b.$$

- معادله انتگرال ولترا نوع دوم:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad a \le x,$$

- معادله انتگرال ولترا نوع اول:

$$g(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \quad a \le x,$$

تعریف ۳.۲.۱ معادله انتگرال منفرد: معادله انتگرالی که در آن حداقل یکی از حدود انتگرال نامتناهی است و یا هسته‌ی معادله انتگرال در نقطه یا نقاطی از بازه‌ی انتگرالگیری نامتناهی می‌گردد.

۳.۱ حل تکراری معادله انتگرال ولترای نوع دوم

معادله انتگرال ولترای نوع دوم را در نظر می‌گیریم

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_{\circ}^x K(x,y)\phi(y)\,dy, \qquad \circ \le x, \quad y \le h \qquad (۱.۱)$$

به‌طوری‌که $f(x)$ و $K(x,y)$ مربع انتگرال‌پذیرند.

$$
\begin{aligned}
||f||^{۲} &= \int_{۰}^{h} |f(x)|^{۲}\, dx < \infty, \\
||K||^{۲} &= \int_{۰}^{h} dx \int_{۰}^{x} dy |K(x,y)|^{۲} < \infty.
\end{aligned}
$$

تعریف می‌کنیم

$$A(x) = \int_{۰}^{x} |K(x,y|^{۲}\, dy.$$

توجه کنیم که معادله انتگرال ولترا حالت خاصی از معادله انتگرال فردهلم با هسته $K(x,y) = ۰$ برای $x < y < h$ می‌باشد.

برای معادله انتگرال ولترا (۱.۱) ثابت می‌کنیم

۱) $\forall\lambda$ معادله (۱.۱) دارای جواب است.

۲) $\forall\lambda$ جواب منحصربفرد است.

۳) $\forall\lambda$ جواب تکراری همگراست.

جواب را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\phi(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} \lambda^k \phi_k(x) \tag{۲.۱}$$

با جایگذاری (۲.۱) در معادله انتگرال (۱.۱) داریم

$$\sum_{k=۰}^{\infty} \lambda^k \phi_k(x) = f(x) + \lambda \int_{۰}^{x} K(x,y) \sum_{j=۰}^{\infty} \lambda^j \phi_j(y)\, dy$$

با برابر هم قرار دادن ضرایب توان‌های λ در طرفین معادله داریم

$$
\begin{aligned}
\phi_{۰}(x) &= f(x), \\
\phi_{۱}(x) &= \int_{۰}^{x} K(x,y) \phi_{۰}(y)\, dy
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$\phi_n(x) = \int_0^x K(x,y)\phi_{n-1}(y)\,dy, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

(۳.۱)

لذا جواب موجود است.

برای همگرایی (۲.۱) نامساوی کوشی شوارتز را به کار می‌بریم، از معادله (۳.۱) داریم

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) = & \int_0^x K(x,y) f(y)\,dy \\
\Rightarrow \quad & |\phi_1(x)|^2 \le A(x)\int_0^x |f(y)|^2\,dy \le A(x)||f||^2, \\
\phi_2(x) = & \int_0^x K(x,y)\phi_1(y)\,dy \\
\Rightarrow \quad & |\phi_2(x)|^2 \le A(x)\int_0^x |\phi_1(y)|^2\,dy \le A(x)\int_0^x A(x_1)\,dx_1||f||^2, \\
\phi_3(x) = & \int_0^x K(x,y)\phi_2(y)\,dy \\
\Rightarrow \quad & |\phi_3(x)|^2 \le A(x)\int_0^x \phi_2(x_2)|^2\,dx_2| \le \frac{1}{2}A(x)\Big[\int_0^x A(x_1)\,dx_1\Big]^2||f||^2.
\end{aligned}$$

در حالت کلی داریم

$$|\phi_n(x)|^2 \le \frac{1}{(n-1)!}A(x)\Big[\int_0^x A(y)\,dy\Big]^{n-1}||f||^2, \qquad n = 1,2,3,\ldots. \tag{۴.۱}$$

تعریف می‌کنیم

$$B(x) \equiv \int_0^x A(y)\,dy. \tag{۵.۱}$$

از (۴.۱) و (۵.۱) کرانی برای $\phi_n(x)$ بدست می‌آوریم

$$|\phi_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\sqrt{A(x)}\Big[B(x)\Big]^{\frac{n-1}{2}}||f||, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

برای همگرایی جواب معادله داریم

$$\begin{aligned}
|\phi(x) - f(x)| &= \Big|\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^n\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\sqrt{A(x)}\Big[B(x)\Big]^{\frac{(n-1)}{2}}||f|| \\
&= \sqrt{A(x)}||f||\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^n\frac{1}{\sqrt{(n-1)!}}\Big[B(x)\Big]^{\frac{(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $a_n = |\lambda|^n \frac{1}{\sqrt{(n-1)!}} \Big[B(x)\Big]^{\frac{(n-1)}{2}}$ و آزمون نسبت را بکار می‌بریم

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad &= \frac{|\lambda|^{n+1}\sqrt{(n-1)!}\Big[B(x)\Big]^{\frac{(n)}{2}}}{|\lambda|^n\sqrt{n!}\Big[B(x)\Big]^{\frac{(n-1)}{2}}} \\
&= |\lambda|\frac{\sqrt{B(x)}}{\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \qquad \forall\lambda.$$

برای منحصربفردی جواب، از

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \phi_k(x)$$

داریم

$$\lambda^{n+1} R_{n+1}(x) \equiv \phi(x) - \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \phi_k(x),$$

کافی است نشان دهیم $R_n(x) \to 0$ وقتی $n \to \infty$.

نکته: با توجه به‌این‌که $R_n(x)$ها جملات بعد از جمله nام تا∞ این سری می‌باشند لذا $R_n(x)$ها از روابط $\phi_n(x)$ها تبعیت می‌کنند. لذا داریم

$$R_0(x) = \phi_0(x), \qquad\qquad R_n(x) = \int_0^x K(x,y)R_{n-1}(y)\,dy.$$

به‌طور مشابه داریم

$$\Big[R_n(x)\Big]^2 \leq \frac{||\phi||^2 A(x)\Big[B(x)\Big]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}=0$$

لذا معادله انتگرال ولترا به ازای هر λ دارای جواب منحصربفرد است.

۴.۱ مساله آبل

آبل در سال ۱۸۲۳ حرکت یک ذره را که به سمت پایین در طول یک منحنی هموار نامعلوم، در یک صفحه قائم، تحت تاثیر نیروی جاذبه لغزیده می‌شد، را مطالعه کرد. فرض می‌شود که ذره از حالت سکون در یک نقطه نظیر p ارتفاع x، در طول منحنی مجهول به سمت پایین‌ترین نقطه روی منحنی نظیر نقطه o که فاصله عمودی آن صفر فرض می‌شود، لغزیده می‌شود. کل زمان T زمان نزول از مرتفع‌ترین نقطه به پایین‌ترین نقطه روی منحنی یعنی T از قبل معلوم است و به ارتفاع x بستگی دارد و لذا آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$T=h(x) \tag{۶.۱}$$

فرض می‌کنیم که منحنی حرکت بین نقاط p و o طول برابر s داشته باشد لذا سرعت در یک نقطه نظیر q روی منحنی بین p و o بوسیله رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{ds}{dT}=-\sqrt{2g(x-t)}, \tag{۷.۱}$$

که در آن t یک متغیر است که فاصله عمودی نقطه q را تعریف می‌کند و g شتاب جاذبه را مشخص می‌کند. با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه (۷.۱) خواهیم داشت

$$T=-\int_0^p\frac{ds}{\sqrt{2g(x-t)}}.$$

قرار می‌دهیم $ds=\phi(t)dt$. همچنین رابطه (۶.۱) را به‌کار می‌بریم تا معادله حرکت ذره لغزنده به‌صورت زیر به‌دست آید.

$$f(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x-t}}\phi(t)\,dt. \tag{۸.۱}$$

اشاره می‌کنیم $f(x)$ یک تابع معلوم است و مقدار آن بستگی به ارتفاع x دارد و به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$f(x) = \sqrt{۲gh(x)}$$

که در آن g ثابت جاذبه است و $h(x)$ زمان نزول از بالاترین نقطه روی آن به سمت پایین‌ترین نقطه روی منحنی است. هدف اصلی مساله آبل تعیین تابع مجهول $\phi(x)$ زیر علامت انتگرال است که معادله منحنی فوق را مشخص می‌کند.

توجه کنیم که معادله انتگرال آبل به معادله انتگرال ولترای نوع اول هم شهرت دارد. به‌علاوه هسته $K(x,t)$ در معادله (۸.۱) به صورت زیر خواهد بود.

$$K(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{x-t}}.$$

مساله جالب آبل با روش‌های مختلفی حل شده است. در ادامه این مطالب تبدیلات لاپلاس را تنها برای تعیین یک فرمول مناسب برای حل مساله آبل یعنی معادله انتگرال (۸.۱) به‌کار می‌بریم. تبدیل لاپلاس گرفتن از طرفین معادله انتگرال (۸.۱) منجر به رابطه زیر می‌شود که در آن نماد Γ تابع گاما را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} L[f(x)] &= L[\phi(x)]L[x^{\frac{-۱}{۲}}] \\ &= L[\phi(x)]\frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{z^{\frac{۱}{۲}}} \end{aligned} \tag{۹.۱}$$

با توجه به‌این‌که $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ معادله (۹.۱) تبدیل می‌شود به

$$L[\phi(x)] = \frac{z^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{\pi}}L[f(x)],$$

می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$L[\phi(x)] = \frac{z}{\pi}(\sqrt{\pi}z^{\frac{-۱}{۲}}L[f(x)]). \tag{۱۰.۱}$$

با قرار دادن

$$h(x) = \int_{۰}^{x}(x-t)^{\frac{-۱}{۲}}f(t)\,dt$$

در رابطه (۱۰.۱) خواهیم داشت

$$L[\phi(x)] = \frac{z}{n} L[h(x)]$$

که نتیجه می دهد

$$L[\phi(x)] = \frac{۱}{\pi} L[h'(x)] \qquad (۱۱.۱)$$

البته با استفاده از این حقیقت که

$$L[h'(x)] = zL[h(x)].$$

با اعمال $L^{-۱}$ روی دو طرف رابطه (۱۱.۱) و انجام محاسبات ساده رابطه زیر را که برای تعیین جواب به‌کار خواهد رفت، به‌دست می آوریم.

$$\phi(x) = \frac{۱}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt \qquad (۱۲.۱)$$

توجه کنیم که قاعده لیب‌نیتز برای رابطه (۱۲.۱) قابل اعمال نیست، زیرا انتگرالده در فاصله انتگرال‌گیری پیوسته نیست. تعیین $\phi(x)$ منجر به تعیین منحنی که ذره در طول آن می‌لغزید، می‌شود.

مثال ۱.۴.۱ مساله آبل زیر را حل کنید.

$$\frac{\pi}{۲} x = \int_{\circ}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} \phi(t)\, dt$$

حل: با قراردادن $f(x) = \frac{\pi}{۲} x$ در معادله (۱۲.۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{۱}{\pi} \frac{d}{dx} \int_{\circ}^{x} \frac{\frac{\pi}{۲} t}{\sqrt{x-t}}\, dt \\ &= \frac{۱}{۲} \frac{d}{dx} \int_{\circ}^{x} \frac{t}{\sqrt{x-t}}\, dt \end{aligned}$$