دانشگاه تربیت معلم

دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه‌ی کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (شاخه‌ی جبر)

عنوان

خودریختی‌های حافظ رده‌های مزدوجی p-گروه‌های متناهی

تدوین

کبری رجوانی

استادراهنما

دکتر علیرضا جمالی

بهمن ۱۳۸۷

چکیده

فرض کنیم G یک pـگروه متناهی باشد. خودریختی α از G را حافظ رده‌های مزدوجی G گویند هرگاه به‌ازای هر x از G داشته باشیم $\alpha(x) \in x^G$. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های حافظ رده‌های مزدوجی G را که زیرگروه نرمالی از $\mathrm{Aut}(G)$ است با $\mathrm{Aut}_c(G)$ نشان می‌دهند. واضح است که $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}_c(G)$. برنساید در سال **۱۹۱۳** با ساختن گروهی مانند G از مرتبه‌ی p^6 که در آن p یک عدد اول فرد است، نشان داد که $\mathrm{Inn}(G) < \mathrm{Aut}_c(G)$. در این پایان‌نامه کران بالای بسیار مناسبی مانند $f(p,n)$ برای $|\mathrm{Aut}_c(G)|$، که در آن G یک pـ گروه متناهی نابدیهی از مرتبه‌ی p^n است، به دست می‌دهیم. سپس همه‌ی pـگروه‌های متناهی مانند G از مرتبه‌ی p^n را رده‌بندی می‌کنیم که به‌ازای آنها $|\mathrm{Aut}_c(G)| = f(p,n)$.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰: 20D15، 20D45.

واژه‌های کلیدی: pـگروه، زوج کامینا، گروه کامینا، خودریختی حافظ رده‌های مزدوجی، گروه‌های همبر، گروه ناآبلی محض.

پیش‌گفتار

فرض کنیم G یک pـگروه متناهی باشد. خودریختی α از G را حافظ رده‌های مزدوجی G گویند هرگاه به‌ازای هر x از G داشته باشیم $\alpha(x) \in x^G$. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های حافظ رده‌های مزدوجی G را که زیرگروه نرمالی از $\mathrm{Aut}(G)$ است با $\mathrm{Aut}_c(G)$ نشان می‌دهند. واضح است که خودریختی‌های داخلیِ G، حافظ رده‌های مزدوجی G می‌باشند، به عبارت دیگر $\mathrm{Inn}(G) \leq \mathrm{Aut}_c(G)$. اینک این سئوال مطرح می‌شود که آیا pـگروهی متناهی مانند G با این ویژگی وجود دارد که دارای یک خودریختی خارجی حافظ رده‌های مزدوجی G باشد.

این پرسشی است که در سال ۱۹۱۱ توسط برنساید مطرح شد و در سال ۱۹۱۳ خود او پاسخ مثبتی به این سئوال داد. وی به‌ازای هر عدد اول فرد p، یک گروه مانند G از مرتبه‌ی p^6 ساخت که با گروه W شامل همه‌ی ماتریس‌های 3×3 به صورت $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix}$ که در آن x، y و z عناصری از میدان $\mathbb{F}_{p^2}$ با p^2 عضو می‌باشند یکریخت است. او ثابت کرد که گروه ساخته شده‌ی G دارای این ویژگی است که $\mathrm{Inn}(G) < \mathrm{Aut}_c(G)$، که در آن $\mathrm{Inn}(G)$، گروه همه‌ی خودریختی‌های داخلی G است. همچنین ثابت کرد که $\mathrm{Aut}_c(G)$ یک pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^8 است. در سراسر این پایان‌نامه، این گروه را با W نشان خواهیم داد.

این پایان‌نامه شامل دو قضیه‌ی اساسی زیر است.

قضیه‌ی ۱. فرض کنیم G یک pـگروه نابدیهی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت

$$|\mathrm{Aut}_c(G)| \leq \begin{cases} p^{\frac{(n^2-4)}{4}} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ p^{\frac{(n^2-1)}{4}} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \qquad (*)$$

قضیه‌ی فوق از این نظر که کران بالای بسیار مناسبی را برای $|\mathrm{Aut}_c(G)|$ به دست می‌دهد، اهمیت دارد. این قضیه در فصل سوم با عنوان قضیه‌ی ۳.۱.۶، ثابت می‌شود.

با توضیحات فوق واضح است که برای گروه ساخته شده توسط برنساید، تساوی در $(*)$ برقرار است. بنابراین مسئله‌ی زیر به طور طبیعی مطرح می‌شود.

مسئله. همه‌ی pـگروه‌های متناهی نابدیهی مانند G را که برای آنها تساوی در $(*)$ برقرار است، رده‌بندی کنید.

در فصل سوم این مسئله را به طور کامل حل خواهیم کرد.

برای بیان قضیه‌ی اصلی مربوط به این مسئله به تعریف pـگروه‌های کامینا[1] و مفهوم رابطه‌ی همبری بین دو گروه نیاز داریم. در واقع pـگروه متناهی G را کامینا گویند در صورتی که هر همدست چپ نابدیهی G' مانند xG' جزء x^G (رده‌ی مزدوجیِ شامل x) باشد. در فصل دوم به pـگروه‌های کامینا و خواص اساسی آنها خواهیم پرداخت.

مفهوم رابطه‌ی همبری و خواص آن در فصل سوم بیان خواهد شد.

فرض کنیم G و H دو گروه باشند. قرار می‌دهیم $\bar{G} = \dfrac{G}{Z(G)}$ و $\bar{H} = \dfrac{H}{Z(H)}$. در این صورت G و H را همبر گوییم هرگاه دو یکریختی مانند $\phi : \bar{G} \longrightarrow \bar{H}$ و $\theta : \Gamma_۲(G) \longrightarrow \Gamma_۲(H)$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار زیر تعویض‌پذیر باشد:

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{G} & \xrightarrow{\alpha_G} & \Gamma_۲(G) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \phi\times\phi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} \\ \bar{H} \times \bar{H} & \xrightarrow{\alpha_H} & \Gamma_۲(H) \end{array}$$

یعنی $\theta \circ \alpha_G = \alpha_H \circ (\phi \times \phi)$.

اینک قضیه‌ی اصلی رده‌بندی را بیان می‌کنیم که با عنوان قضیه‌ی ۱.۳.۳ در فصل سوم ثابت خواهد شد.

قضیه‌ی ۲. فرض کنیم G یک pـگروه ناآبلی متناهی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت تساوی در $(*)$ برای G برقرار است اگر و تنها اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:

(i) G یک pـگروه خیلی خاص از مرتبه‌ی $p^۳$ باشد؛

(ii) G یک pـگروه از مرتبه‌ی $p^۴$ و رده‌ی پوچتوانی ۳ باشد؛

(iii) G یک pـگروه کامینای خاص باشد که با W همبر است و $|G| = p^۶$؛

(iv) G و R همبر باشند و $|G| = p^۶$؛

که در آن گروه R یک pـگروه متناهی از مرتبه‌ی $p^۶$ است که در فصل سوم به طور کامل معرفی می‌شود.

فصل اول این پایان‌نامه به بیان پیش‌نیازها و بعضی مفاهیم از جبر خطی اختصاص دارد.

---

۱) Camina

فصل دوم و سوم این پایان‌نامه، تفصیل مقاله‌ی زیر است:

Manoj K. Yadav, "Class Preserving Automorphisms of Finite p-Groups", *J. London Math. Soc. (2007), 1-18.*

فهرست مطالب

فصل اول

پیش‌نیازها

۱.۱ تعریف‌ها و قضیه‌های بنیادی

از همه‌ی قضیه‌ها و لم‌های بیان شده در این فصل، در فصل‌های بعد استفاده خواهیم کرد.

۱.۱.۱ قرارداد. در این فصل و فصل‌های دیگر، عضو همانی گروه مفروض G و زیرگروه بدیهی $\{1\}$ از G را با ۱ نشان می‌دهیم. همچنین مرتبه‌ی G را با $|G|$ و مرتبه‌ی هر عضو از G مانند g را با $|g|$ نشان می‌دهیم. از نماد $\langle g\rangle$ برای نشان دادن گروه دوری G تولید شده به وسیله‌ی عضو مفروض g از G استفاده می‌کنیم.

۲.۱.۱ قضیه (قضیه‌ی اول همریختی). فرض کنیم G و H دو گروه باشند. اگر $f : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد، آنگاه نگاشت $\theta : \dfrac{G}{\ker f} \longrightarrow H$ با ضابطه‌ی $\theta(x(\ker f)) = f(x)$ یک تکریختی است. در نتیجه، $\dfrac{G}{\ker f} \cong \operatorname{Im} f$.

۳.۱.۱ قضیه (قضیه‌ی دوم همریختی). فرض کنیم G یک گروه باشد و $M \le G$ و $N \lhd G$. در این صورت $M \cap N \lhd M$ و $\dfrac{MN}{N} \cong \dfrac{M}{M \cap N}$.

۴.۱.۱ قضیه (قضیه‌ی سوم همریختی). فرض کنیم G یک گروه و M و N زیرگروه‌های نرمالی از آن باشند به طوری که $N \leq M$. در این صورت $\frac{G}{N} \lhd \frac{M}{N}$ و $\frac{G}{M} \cong (\frac{G}{N})/(\frac{M}{N})$.

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H از G را زیرگروه مشخص گویند در صورتی که به‌ازای هر خودریختی از G مانند σ، $\sigma(H) = H$ و می‌نویسیم $H \operatorname{ch} G$.

۶.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و $K \leq H \leq G$. در این صورت

(i) اگر $K \operatorname{ch} H$ و $H \operatorname{ch} G$، آنگاه $K \operatorname{ch} G$.

(ii) اگر $H \lhd G$ و $K \operatorname{ch} H$، آنگاه $K \lhd G$.

(iii) اگر $H \operatorname{ch} G$ آنگاه $H \lhd G$.

۷.۱.۱ (قانون مدولی ددکیند). فرض کنیم H، K و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری که $K \leq L$. در این صورت $(H \cap L)K = HK \cap L$.

۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت $x^y = y^{-1}xy$ را مزدوج x با y می‌نامیم.

فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$. رده‌ی مزدوجی x در G را با x^G نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x^G = \{x^g | g \in G\}.$$

۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y \in G$. در این صورت $[x, y] = x^{-1}x^y$ را جابجاگر x و y می‌نامیم. زیرگروه تولید شده به وسیله‌ی جابجاگرها را زیرگروه جابجاگر یا زیرگروه مشتق گوییم و با G' نشان می‌دهیم.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و A و B زیرگروه‌هایی از آن باشند. در این صورت جابجاگر A و B را با علامت $[A,B]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A,B] = \langle [a,b] | a \in A, b \in B \rangle.$$

قرارداد. فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$. در این صورت بنابر قرارداد $[x,G]$ یعنی

$$\{[x,g] | g \in G\} = x^{-۱} x^G.$$

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $G_۱$، ...، G_t زیرگروه‌هایی از گروه G باشند. زیرگروه جابجاگر تعمیم یافته‌ی $[G_۱,\ldots,G_t]$ را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$[G_۱] = G_۱, \qquad [G_۱,\ldots,G_t] = [[G_۱,\ldots,G_{t-۱}],G_t] \qquad (t > ۱).$$

۱۲.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

(i) $G' \lhd G$.

(ii) اگر $N \lhd G$ آنگاه $\dfrac{G}{N}$ آبلی است، اگر و تنها اگر $G' \leq N$.

۱۳.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه و x، y و z اعضایی از آن باشند. در این صورت

(i) $[x,y]^{-۱} = [y,x]$.

(ii) $[xy,z] = [x,z]^y[y,z] = [x,z][x,z,y][y,z]$.

(iii) $[x,yz] = [x,z][x,y]^z = [x,z][x,y][x,y,z]$.

۱۴.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه و a و b اعضایی از آن باشند به طوری که a با $[a,b]$ تعویض‌پذیر باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد طبیعی n، $[a^n,b] = [a,b]^n$.

برهان. [۶] صفحه‌ی ۲۵۳. ■

۱۵.۱.۱ لم. فرض کنیم $A, B \leq G$، که در آن G یک گروه دلخواه است. در این صورت

(i) $[A, B] = [B, A]$؛

(ii) اگر $A_1 \leq A$ و $B_1 \leq B$، آنگاه $[A_1, B_1] \leq [A, B]$؛

(iii) اگر $A \lhd G$ آنگاه $[A, B] \leq A$؛

(iv) اگر $A \lhd G$ و $B \lhd G$، آنگاه $[A, B] \lhd G$؛

(v) $[A, B] \leq B$ اگر و تنها اگر $A \leq \mathcal{N}(B)$؛

(vi) اگر $A \leq B$ و $A \lhd G$ آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که $\frac{B}{A} \leq Z(\frac{G}{A})$ آن است که $[G, B] \leq A$؛

(vii) اگر K گروه دلخواهی باشد و $C \leq K$، آنگاه

$$[G \times K, A \times C] = [G, A] \times [K, C].$$

(viii) اگر θ یک همریختی گروه G باشد، آنگاه $\theta([A, B]) = [\theta(A), \theta(B)]$.

۱۶.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه و H و K زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که $H \leq K$. در این صورت اگر $|G : H|$ متناهی باشد، آنگاه $|G : K|$ متناهی است و $|G : H| = |G : K||K : H|$.

۱۷.۱.۱ لم. فرض کنیم H و K زیرگروه‌های گروهی مانند G باشند به طوری که $|G : H|$ و $|G : K|$ متناهی باشند. در این صورت $|G : H \cap K|$ متناهی است و داریم $|G : H \cap K| \leq |G : H||G : K|$.

۱۸.۱.۱ تعریف. گروه G را متناهی مولد گویند در صورتی که زیرمجموعه‌ای متناهی مانند X داشته باشد به طوری که $G = \langle X \rangle$. زیرمجموعه‌ی X در تعریف فوق را مجموعه مولد G می‌نامند.

۱۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه متناهی مولد باشد. در این صورت کوچکترین عدد طبیعی r را که G با r عضو تولید می‌شود با $d(G)$ نشان می‌دهند.

۲۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت $C_G(H)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_G(H) = \{x \in G | xh = hx \text{ ،}H \text{ در } h \text{ به‌ازای هر}\}.$$

اگر $x \in G$ آنگاه قرار می‌دهیم: $C_G(x) = C_G(\langle x \rangle)$.

۲۱.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی غیرآبلی باشد. در این صورت به ازای هر x از G، $Z(G) < C_G(x)$.

۲۲.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $x \in G$. در این صورت

(i) $|x^G| = |[x, G]|$؛

(ii) $|C_G(x)| \geq |\frac{G}{G'}|$.

برهان. نگاشت $\varphi : x^G \longrightarrow [x, G]$ را با ضابطه‌ی $g^{-۱}xg \longrightarrow [x, g]$ تعریف می‌کنیم که در آن $g \in G$. به آسانی ثابت می‌شود که φ تناظر ۱ـ۱ است. بنابراین $|x^G| = |[x, G]|$. لذا (i) ثابت شد. از طرفی داریم:

$$|C_G(x)| = |G : x^G| = \frac{|G|}{|x^G|} = \frac{|G|}{|[x, G]|}.$$

چون $[x, G] \subseteq G'$، قسمت (ii) نیز نتیجه می‌شود.■

۲۳.۱.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$. همچنین فرض کنیم $x \in G$ به طوری که $|x| = p^\alpha$ که در آن p یک عدد اول و α یک عدد طبیعی است. در این صورت اگر t عددی طبیعی باشد به طوری که $x^t \in H$ و $p \nmid t$، آنگاه $x \in H$.

برهان. از اینکه $p \nmid t$، داریم $(p, t) = ۱$ و از آنجا $(p^\alpha, t) = ۱$. بنابراین دو عدد صحیح مثبت مانند μ و λ وجود دارند به طوری که $\lambda p^\alpha + \mu t = ۱$. اکنون با توجه به اینکه $|x| = p^\alpha$ و $x^t \in H$، خواهیم داشت:

$$x = x^{\lambda p^\alpha + \mu t} = x^{\lambda p^\alpha} . x^{\mu t} = x^{\mu t} \in H$$

۲۴.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G_1، ...، G_n، n گروه باشند. در مجموعه‌ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_1, \ldots, g_n)(g'_1, \ldots, g'_n) = (g_1 g'_1, \ldots, g_n g'_n),$$

که در آن به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، g_i و g'_i عضو G_i می‌باشند.

به سادگی دیده می‌شود که مجموعه‌ی $G_1 \times \ldots \times G_n$ همراه با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم خارجی گروه‌های G_1، ...، G_n می‌نامند و آن را با همان علامت $G_1 \times \ldots \times G_n$ یا علامت $\times_{i=1}^{n} G_i$ نشان می‌دهند.

۲۵.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G_1، ...، G_n، n گروه باشند و $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. در این صورت G زیرگروه‌هایی مانند H_1، ...، H_n دارد به طوری که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cong G_i$، و

(i) به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \lhd G_i$؛

(ii) $G = H_1, \ldots, H_n$؛

(iii) به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n = 1$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۱.■

۲۶.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد و G_1، ...، G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که

(i) به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \lhd G$؛

(ii) $G = G_1 \ldots G_n$؛

(iii) به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 \ldots G_{i-1} G_{i+1} \ldots G_n = 1$.

در این صورت $G \cong G_1 \times \ldots \times G_n$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۱.■

۲۷.۱.۱ قضیه. فرض کنیم G_1، G_2، ...، G_n، n گروه باشند. در این صورت

(i) $Z(G_1 \times \ldots \times G_n) = Z(G_1) \times \ldots \times Z(G_n)$؛

(ii) $(G_1 \times \ldots \times G_n)' = G'_1 \times \ldots \times G'_n$.

۲۸.۱.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای غیرخالی باشد. همچنین فرض کنیم به‌ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x.g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که

(i) به‌ازای هر x از X، $x \cdot 1 = x$، و

(ii) به‌ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، $x.(g_1g_2) = (x.g_1).g_2$.

در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و . را عمل G بر X گویند. برای سهولت در نوشتن، به جای $x.g$ معمولاً خواهیم نوشت xg.

۲۹.۱.۱ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_1 \sim x_2$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل، یا گاهی از اوقات یک Gـمدار می‌نامیم. اگر $x \in X$ آنگاه رده‌ی هم‌ارزی شامل x را مدار x در G می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{Orb}_G(x)$ نشان می‌دهیم. با توجه به تعریف فوق واضح است که $\mathrm{Orb}_G(x) = \{xg | g \in G\}$. در صورتی که $\mathrm{Orb}_G(x)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، عده‌ی اعضای آن را طول مدار x در G می‌نامیم.

۳۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی غیرخالی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه‌ی $\{g \in G | xg = x\}$ را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با علامت $\mathrm{St}_G(x)$ نشان می‌دهیم.

۳۱.۱.۱ قضیه (قضیه‌ی مدار ـ پایدار ساز). فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت، تناظری ۱ـ۱ بین $\mathrm{Orb}_G(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی همدست‌های راست $\mathrm{St}_G(x)$ در G وجود دارد. بالاخص، اگر $\mathrm{Orb}_G(x)$ متناهی باشد، آنگاه

$$|G : \mathrm{St}_G(x)| = |\,\mathrm{Orb}_G(x)|.$$

برهان. [۱] صفحه‌ی ۳۴.■

۳۲.۱.۱ نتیجه. اگر گروه متناهیِ G بر مجموعه‌ی X عمل کند، آنگاه به‌ازای هر x از X، مجموعه‌ی $\mathrm{Orb}_G(x)$ متناهی است و $|G||\,|\mathrm{Orb}_G(x)|$.

۲.۱ pـگروه‌ها و گروه‌های پوچتوان

۱.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی باشد و $H < G$. در این صورت $H < \mathcal{N}_G(H)$. به عبارت دیگر در pـگروه‌های متناهی، زیرگروه‌های واقعی نمی‌توانند خود نرمالگر باشند.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۱.■

۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی نابدیهی باشد و $H \leq G$. در این صورت H زیرگروه ماکسیمال G است اگر و تنها اگر $H \lhd G$ و $|\dfrac{G}{H}| = p$.

۳.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی نابدیهی باشد و $N \lhd G$. در این صورت اگر $N \neq 1$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq 1$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۷۰.■

۴.۲.۱ نتیجه. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی باشد و $N \lhd G$. در این صورت اگر $|N| = p$ آنگاه $N \leq Z(G)$.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک pـگروه آبلی متناهی باشد. گروه G را آبلی مقدماتی (یا مختصراً مقدماتی) گوییم در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو نابدیهی G، عدد اول p باشد.

۶.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت G اعضایی نابدیهی مانند a_1، ...، a_n دارد به طوری که $G = \langle a_1 \rangle \times \ldots \times \langle a_n \rangle$. در نتیجه

$$G \cong \underbrace{Z_p \times \ldots \times Z_p}_{n \text{ بار}}$$

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۳.■

۷.۲.۱ لم. فرض کنیم G یک pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری مانند V روی $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد به طوری که $G \cong V^+$، که در آن V^+ گروه جمعی فضای برداری V است. به علاوه $\mathrm{Aut}(G) \cong GL(V)$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۱۰۶.■

۸.۲.۱ لم. با تقریب یکریختی تنها یک pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی مفروضی وجود دارد.

برهان. فرض کنیم G و H دو pـگروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشند. در این صورت بنابر لم ۷.۲.۱، G و H دو فضای برداری همبعد روی میدان $\mathbb{Z}_p$ هستند و از جبر خطی می‌دانیم که هر دو فضای برداری همبعد بر روی یک میدان، یکریخت‌اند. بنابراین $G \cong H$.■

۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. مقطع همه‌ی زیرگروه‌های ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G گویند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهند. هرگاه که G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، بر طبق قرارداد، $\Phi(G) = G$. در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه پیش نیاید، در برخی موارد به جای $\Phi(G)$ مختصراً می‌نویسیم Φ. به آسانی دیده می‌شود که $\Phi(G) \operatorname{ch} G$.

۱۰.۲.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $C \subseteq G$، $D \subseteq \Phi(G)$. در این صورت اگر $G = \langle C, D \rangle$ آنگاه $G = \langle C \rangle$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۳۳.■

تبصره. از لم فوق معلوم می‌شود که مولدهایی از یک گروه متناهی را که در زیرگروه فراتینی قرار دارند، می‌توان از مجموعه‌ی مولدها حذف کرد. به این جهت، چنین اعضایی را نامولد گروه می‌نامند.

۱۱.۲.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و $N \lhd G$. در این صورت $\Phi(\frac{G}{N}) \geq \frac{\Phi(G)N}{N}$ و اگر $N \leq \Phi(G)$ آنگاه $\Phi(\frac{G}{N}) = \frac{\Phi(G)}{N}$.

برهان. [۱۱] صفحه‌ی ۱۳۵.■

۱۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه دلخواه و n عددی طبیعی باشد. در این صورت زیرگروه G^n از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G^n = \langle g^n | g \in G \rangle.$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که $G^n \operatorname{ch} G$. اگر G آبلی باشد آنگاه

$$G^n = \{g^n | g \in G\}.$$

۱۳.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه متناهی باشد. در این صورت $\Phi(G) = G'G^p$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۳۴.■

۱۴.۲.۱ نتیجه. اگر G یک pـگروه متناهی باشد، آنگاه pـگروه خارج قسمتی $\frac{G}{\Phi}$ آبلی مقدماتی است. به علاوه اگر N زیرگروه نرمالی از G باشد به طوری که $\frac{G}{N}$ آبلی مقدماتی باشد، آنگاه $\Phi(G) \leq N$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۳۵.■

۱۵.۲.۱ قضیه (قضیه‌ی پایه‌ی برنساید). فرض کنیم G یک pـگروه متناهی و $|\frac{G}{\Phi}| = p^r$. در این صورت هر مجموعه مولد G با t عضو، زیرمجموعه‌ای با r عضو دارد که G را تولید می‌کند و $d(G) = r$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۳۵.■

۱۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک pـگروه باشد. در این صورت G را pـگروه‌خاص می‌نامند، هرگاه G، آبلی مقدماتی باشد یا داشته باشیم $\Phi(G) = Z(G) = G'$ و G' آبلی مقدماتی باشد.

۱۷.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک pـگروه خاص ناآبلی باشد. در این صورت pـگروه G را خیلی خاص می‌گوییم اگر $|Z(G)| = p$. بدیهی است در این حالت $\Phi(G) = Z(G) = \Gamma_۲(G) \cong \mathbb{Z}_p$.

۱۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد و $G_۱$، ...، G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند. در واقع G را یک حاصل‌ضرب مرکزی $G_۱$، ...، G_n می‌نامیم در صورتی که

(i) $G = G_۱ \dots G_n$؛

(ii) به ازای هر i و j که $۱ \leq i < j \leq n$، $[G_i, G_j] = ۱$.

۱۹.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک pـگروه خیلی خاص باشد. در این صورت G، حاصل‌ضرب مرکزی n زیرگروه ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۳$ است و $|G| = p^{۲n+۱}$. برعکس، هر حاصل‌ضرب مرکزی متناهی از گروه‌های ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۳$، یک pـگروه خیلی خاص است.

برهان. [۱۱] صفحه‌ی ۱۴۶.■

۲۰.۲.۱ مثال. هر pـگروه ناآبلی از مرتبه‌ی $p^۳$، خیلی خاص است.

۲۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند $۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \dots \leq G_r = G$. سری نرمال $۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq \dots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی G گوییم در صورتی که به‌ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-۱}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-۱}}).$$

۲۲.۲.۱ تعریف. گروه G را پوچتوان می‌گوییم در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچتوانی G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

۲۳.۲.۱ چند مثال.

(آ) واضح است که هر گروه آبلی نابدیهی یک گروه پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۱ است.

(ب) هر pـگروه متناهی پوچتوان است.

۲۴.۲.۱ لم. فرض کنیم G یک گروه پوچتوان نابدیهی باشد. در این صورت $Z(G) \neq 1$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۱۹.■

۲۵.۲.۱ لم. گروه G پوچتوان است اگر و تنها اگر سری نرمالی مانند $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$ داشته باشد به طوری که به‌ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $[G, G_i] \leq G_{i-1}$.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۲۰.■

۲۶.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه پوچتوان از رده‌ی r باشد. در این صورت هر زیرگروه G پوچتوان از رده‌ی حداکثر r است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۲۰.■

۲۷.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه نابدیهی متناهی باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(i) G پوچتوان است؛

(ii) هر زیرگروه ماکسیمال G نرمال است.

برهان. [۱] صفحه‌ی ۲۲۳.■

۲۸.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{\Gamma_n(G)\}_{n=1}$ از زیرگروه‌های G را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma_1(G) = G, \qquad \Gamma_n(G) = [G, \Gamma_{n-1}(G)] \qquad (n > 1).$$

توجه داریم که به‌ازای $n = 2$، $\Gamma_2(G) = [G, G] = G'$.

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه (یعنی G) پیش نیاید، به جای $\Gamma_n(G)$، مختصراً می‌نویسیم Γ_n. به آسانی به استقرا ثابت می‌شود که هر Γ_n یک زیرگروه مشخص G است. در نتیجه به‌ازای هر n طبیعی، $\Gamma_n \lhd G$. بنابر بند (iii) از لم ۱۵.۱.۱، به‌ازای هر n طبیعی که $n > ۱$، $\Gamma_n = [G, \Gamma_{n-۱}] \leq \Gamma_{n-۱}$.

۲۹.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نزولی

$$G = \Gamma_۱(G) \geq \Gamma_۲(G) \geq \ldots \geq \Gamma_n(G) \geq \ldots$$

را سری مرکزی پایینی G می‌نامند.

۳۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. دنباله‌ی $\{Z_n(G)\}_{n=۰}$ از زیرگروه‌های G را به استقرا چنین تعریف می‌کنیم:

$$Z_۰(G) = ۱, \qquad \frac{Z_{n+۱}(G)}{Z_n(G)} = Z(\frac{G}{Z_n(G)}) \qquad (n \geq ۰).$$

توجه داریم که به‌ازای $n = ۰$، $Z_۱(G) = Z(G)$.

در صورتی که ابهامی در مورد گروه زمینه پیش نیاید، به جای $Z_n(G)$، مختصراً می‌نویسیم Z_n. واضح است که $Z_۱(G) = Z(G)$. به آسانی به استقرا ثابت می‌شود که هر Z_n یک زیرگروه مشخص G است. بنابراین به‌ازای هر n صحیح نامنفی، $Z_n \lhd G$ ؛ همچنین معلوم است که $Z_n \leq Z_{n+۱}$.

۳۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری صعودی

$$۱ = Z_۰(G) \leq Z_۱(G) \leq \ldots \leq Z_n(G) \leq \ldots$$

را سری مرکزی بالایی G می‌نامند.

۳۲.۲.۱ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

(i) G پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند r موجود باشد به طوری که $\Gamma_{r+۱}(G) = ۱$؛

(ii) G پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند s موجود باشد به طوری که $Z_s(G) = G$.