بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

کارشناسی ارشد ریاضی محض(گرایش جبر)

بررسی درجه‌ی آبلی گروه‌های حل‌پذیر و درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته در گروه‌های متناهی

پژوهشگر

مهدیه قنبری

استاد راهنما

دکتر عزیزاله آزاد

استاد مشاور

دکتر ولی‌اله خلیلی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

بررسی درجه‌ی آبلی گروه‌های حل‌پذیر و درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته در گروه‌های متناهی

توسط:

مهدیه قنبری

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض –گرایش جبر

دانشگاه اراک

اراک – ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: ...بسیار خوب

دکتر عزیزاله آزاد (استاد راهنما و رئیس کمیته)..استادیار

دکتر ولی‌اله خلیلی (استاد مشاور) ....استادیار

دکتر رضا عرفی (داور) ....استادیار

رضا عرفی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا درجه‌ی آبلی گروه‌های حل‌پذیر را بررسی می‌کنیم. درجه‌ی آبلی گروه G، احتمال جابجایی دو عضو از گروه است که با نماد $Pr(G)$ نمایش داده می‌شود. فرض کنیم H و K زیرگروه‌های غیربدیهی G باشند و g عضو دلخواهی از G باشد. احتمال این‌که جابجاگر دو عضو دلخواه G که یکی از H و دیگری از K انتخاب می‌شود، برابر g شود را درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته می‌نامیم و با نماد $Pr_g(H,K)$ نشان می‌دهیم. کران‌هایی برای $Pr_g(H,K)$ بر حسب $\mid C_H(K) \mid$، $\mid C_K(H) \mid$ و $\mid Z(G) \mid$ به‌دست می‌آوریم. همچنین روابطی برای محاسبه‌ی $Pr_g(H,G)$ بر حسب سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه ارائه می‌دهیم. در پایان، با در نظر گرفتن $H=K=G$، $Pr_g(G)$ را برای برخی گروه‌های خاص محاسبه می‌کنیم.

واژگان کلیدی

درجه‌ی آبلی، جابجاگر، درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته، سرشت تحویل‌ناپذیر.

پیش‌گفتار

هدف اصلی ما در این پایان‌نامه، بررسی تعمیمی از درجه‌ی آبلی در گروه‌های متناهی است. درجه‌ی آبلی، احتمال جابجایی دو عضو از گروه G است که با نماد $Pr(G)$ نمایش داده می‌شود. درجه‌ی آبلی نخستین بار توسط گوستافسون [2] [۱۲] مطالعه شد و نشان داد به ازای هر گروه متناهی ناآبلی G، $Pr(G) \leq \frac{5}{8}$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong Z_2 \times Z_2$.

این پایان‌نامه شامل سه فصل است.

فصل اول خود شامل ۴ بخش می‌باشد.

بخش اول به مطالب مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها اختصاص دارد.

بخش دوم شامل مطالبی درباره‌ی نمایش گروه و FG-مدول‌ها می‌باشد.

در بخش سوم سرشت نمایش را تعریف کرده و سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه را معرفی می‌کنیم.

در بخش چهارم درجه‌ی آبلی گروه را تعریف کرده و قضایای اصلی مربوط به آن را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، درجه‌ی آبلی گروه‌های حل‌پذیر را بررسی می‌کنیم و کران بالایی برای درجه‌ی آبلی گروه‌های حل‌ناپذیر به‌دست می‌آوریم. فرض کنیم H و K زیرگروه‌های غیربدیهی G باشند و g عضو دلخواهی از G باشد. احتمال این‌که جابجاگر دو عضو دلخواه G که یکی از H و دیگری از K انتخاب می‌شود، برابر g شود را درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته می‌نامیم و با نماد $Pr_g(H, K)$ نشان می‌دهیم.

فصل سوم نیز شامل ۴ بخش می‌باشد.

در بخش اول درجه‌ی آبلی تعمیم‌یافته را تعریف کرده و ویژگی‌های اساسی آن را بیان می‌کنیم.

بخش دوم به یافتن کران‌هایی برای $Pr_g(H, K)$ اختصاص داده شده است.

در بخش سوم روابطی برای محاسبه‌ی $Pr_g(H, G)$ بر حسب سرشت‌های تحویل ناپذیر گروه ارائه می‌دهیم.

برای گروه متناهی G، مجموعه‌ی درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$cd(G) = \{\chi(1) : \chi \in Irr(G)\}$$

که $Irr(G)$ مجموعه‌ی همه‌ی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G است. در بخش آخر فصل سوم، $Pr_g(G)$ را برای گروه‌هایی که مجموعه‌ی درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن‌ها تنها دارای دو مقدار متمایز هستند، به‌دست می‌آوریم.

همچنین $Pr_g(G)$ را برای گروه‌هایی که $\mid G' \mid = p$ و $G' \leq Z(G)$ محاسبه می‌کنیم.

فصل‌های دوم و سوم این پایان‌نامه شرح تفصیلی مقالات [۳]، [۷] و [۱۹] می‌باشد.

---

[2] W. H. Gustafson

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱ مطالب مقدماتی

در این بخش مفاهیم مقدماتی نظریه‌ی گروه‌ها را مرور خواهیم کرد. فرض بر این است که خواننده با این مفاهیم آشنایی دارد. هدف ما علاوه بر یادآوری، فراهم آوردن اصطلاحات، علامات، و مقدماتی است که در بخش‌های آتی مورد نیاز خواهد بود.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری نرمال G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq ..... \leq G_r = G.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. یک سری زیرنرمال G، زنجیری است متناهی از زیر گروه‌های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq ..... \leq G_r = G,$$

به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$. سری زیرنرمال را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd ..... \lhd G_r = G.$$

در هر دو تعریف فوق، هر G_i را یک جمله‌ی سری و r را طول سری می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و سری

$$۱ = G_۰ \lhd G_۱ \lhd ..... \lhd G_{r-۱} \lhd G_r = G$$

یک سری زیرنرمال G باشد. این سری را یک سری ترکیبی G می‌نامیم در صورتی‌که به ازای هر i طبیعی که $۱ \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ یک گروه ساده‌ی غیربدیهی باشد. در سری ترکیبی فوق هر گروه خارج قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ را یک عامل ترکیبی می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. گروه G را حل‌پذیر می‌نامیم در صورتی که یک سری زیر نرمال مانند

$$۱ = G_۰ \lhd G_۱ \lhd ..... \lhd G_{r-۱} \lhd G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$، گروه خارج قسمتی $\frac{G_i}{G_{i-۱}}$ آبلی باشد. اگر G حل‌پذیر باشد، طول کوتاه‌ترین سری با خاصیت مذکور را طول حل‌پذیری G می‌نامیم.

قضیه ۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفیی مانند r موجود باشد به طوری که $G^{(r)} = ۱$.

برهان. به قضیه‌ی ۱۱.۱.۱۱ از [۲۲] رجوع کنید.

□

مثال ۶.۱.۱. هر گروه ساده‌ی متناهی ناآبلی حل‌ناپذیر است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. سری نرمال

$$۱ = G_۰ \leq G_۱ \leq ..... \leq G_{r-۱} \leq G_r = G$$

را یک سری مرکزی گوییم در صورتی که به ازای هر i که $۱ \leq i \leq r$،

$$\frac{G_i}{G_{i-۱}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-۱}}).$$

تعریف ۸.۱.۱. گروه G را پوچ‌توان می‌نامیم در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچ‌توانی G گوییم و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۱.۱. (برنساید) فرض کنیم p، q، و r اعداد اول متمایزی باشند و α عددی طبیعی باشد. در این صورت هر گروه از مرتبه‌های p^{α} ، $p^{\alpha}q$ ، $p^{۲}q^{۲}$، و pqr حل‌پذیر است.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۲.۱۱ از [۲۲] رجوع کنید.

□

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G گروه باشد و G' زیرگروهی از G باشد که توسط تمام عناصر به شکل

$$ghg^{-۱}h^{-۱} \qquad (g, h \in G)$$

تولید می‌شود. در این صورت G' را زیرگروه مشتق G گویند. عبارت $ghg^{-۱}h^{-۱}$ را به اختصار با $[g, h]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$G' = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle.$$

گزاره ۱۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

۱) $G' \lhd G$،

۲) $\frac{G}{G'}$ آبلی است.

برهان. به گزاره‌ی ۱۰.۱۷ از [۲۳] رجوع کنید.

□

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه غیربدیهی و M زیرگروهی واقعی از آن باشد. M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌نامیم در صورتی که از $M \leq H \leq G$ نتیجه شود که $M = H$ یا $H = G$. گروه‌های متناهی غیربدیهی G همواره دارای زیرگروه‌های ماکسیمال هستند و هر زیرگروه واقعی G جزء حداقل یک زیرگروه ماکسیمال G است.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم G یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه H را یک زیرگروه مشخّص G می‌نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی G مانند τ، $H\tau \leq H$ که $H\tau = \{h\tau : h \in H\}$. هرگاه H زیرگروه مشخّص G باشد، می‌نویسیم $HchG$.

تعریف ۱.۱.۱۴. گروه غیر بدیهی G را مشخصاً ساده گوییم در صورتی که زیر گروه‌های مشخّص آن ۱ و G باشند.

تعریف ۱.۱.۱۵. H را یک توسیع مرکزی از G می‌نامیم اگر دارای زیر گروه نرمالی مانند M باشد به طوری که $M \leq Z(H)$ و $\frac{H}{M} \cong G$.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیر گروه نرمال غیر بدیهی H را یک زیر گروه نرمال مینیمال G می‌نامیم هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به‌جز خود و ۱ نباشد. به عبارت دیگر هرگاه $N \lhd G$ و $N \subseteq H$ آن‌گاه $N = H$ یا $N = ۱$. واضح است که هر گروه متناهی غیربدیهی، یک زیرگروه نرمال مینیمال دارد. به‌خصوص، زیرگروه نرمال مینیمال هر گروه ساده متناهی G، خود G است.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم G یک گروه باشد و H و K زیر گروه‌های G باشند. زیرگروه

$$\langle [h,k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

از G را زیرگروه جابجاگر H و K می‌نامیم و آن را با علامت $[H \text{ ، } K]$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x \cdot g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که

۱) به ازای هر x از X، $x \cdot ۱ = x$، و

۲) به ازای هر $g_۱, g_۲$ از G و هر x از X، $(x \cdot g_۱) \cdot g_۲ = x \cdot (g_۱ g_۲)$.

در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی ناتهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه‌ی

$$\{g \in G : xg = x\}$$

را پایدارساز x در G می‌نامیم و آن را با نماد $Stab_G(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را در X چنین تعریف می‌کنیم: گوییم $x_2 \sim x_1$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $x_1 g = x_2$. رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در X است. هر رده‌ی هم‌ارزی را یک مدار عمل می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Orb_G(x) = \{xg : g \in G\}.$$

قضیه ۲۱.۱.۱. (مدار-پایدارساز) فرض کنیم گروه G بر مجموعه‌ی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت، تناظری یک‌به‌یک بین $Orb(x)$ و مجموعه‌ی همه‌ی هم‌رده‌های راست $Stab(x)$ در G وجود دارد. بالاخص، اگر $Orb_G(x)$ متناهی باشد، آن‌گاه

$$\mid G : Stab_G(x) \mid = \mid Orb_G(x) \mid .$$

برهان. به قضیه ۲.۳.۲ از [۲۲] رجوع کنید.

□

مثال ۲۲.۱.۱. فرض کنیم G بر خودش با تزویج عمل کند. در این صورت

۱) $Orb_G(x) = Cl_G(x) = \{g^{-1}xg : g \in G\}$،

۲) $Stab_G(x) = C_G(x)$.

تعریف ۲۳.۱.۱. (معادله رده‌ای) فرض کنیم $x_1, \ldots, x_l$ نماینده‌های رده‌های مزدوجی G باشند. در این صورت

$$\mid G \mid = \mid Z(G) \mid + \sum_{x_i \notin Z(G)} \mid x_i^G \mid .$$

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان، و n عددی طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های وارون‌پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آن‌ها در F اند، با $GL(n, F)$ نمایش می‌دهیم. به آسانی ملاحظه می‌شود که $GL(n, F)$ با عمل ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک گروه می‌دهد. $GL(n, F)$ را گروه خطی عام (از درجه‌ی n بر F) می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. مجموعه‌ی همه‌ی اعضایی از $GL(n, F)$ که دترمینان هریک از آن‌ها برابر ۱ است زیرگروهی از $GL(n, F)$ است. این زیرگروه را با $SL(n, F)$ نشان می‌دهیم. $SL(n, F)$ را گروه خطی خاص (از درجه‌ی n بر F) می‌نامیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم n عددی طبیعی، و F میدان دلخواهی باشد. گروه خطی خاص تصویری (از درجه‌ی n بر F) را به صورت $\frac{SL(n, F)}{Z(SL(n, F))}$ تعریف کرده و آن را با $PSL(n, F)$ نمایش می‌دهیم. به ازای هر میدان متناهی مانند F، و هر عدد طبیعی n که $n \geq ۳$ گروه $PSL(n, F)$ ساده است.

مثال ۲۷.۱.۱.

۱) $SL(۲, ۲) \cong PSL(۲, ۲) \cong S_۳$.

۲) $PSL(۲, ۳) \cong A_۴$.

۳) $SL(۲, ۴) \cong PSL(۲, ۴) \cong PSL(۲, ۵) \cong A_۵$.

۴) $PSL(۲, ۹) \cong A_۶$.

برهان. به مثال صفحه‌ی ۶۵ از [۲۲] رجوع کنید.

□

قضیه ۲۸.۱.۱. (ژوردان) اگر $n \geq ۵$، آن‌گاه A_n ساده است.

برهان. به قضیه ۸.۱.۳ از [۲۲] رجوع کنید.

□

۲.۱ نمایش گروه

از طریق نمایش گروه G می‌توان G را به عنوان گروهی از ماتریس‌ها تصور کرد. فرض کنیم G یک گروه باشد و F میدان R یا C.

تعریف ۱.۲.۱. نمایش G روی میدان F عبارت است از همریختی‌ای چون ρ از G به $GL(n, F)$ به ازای عدد صحیحی چون n. n را درجه‌ی نمایش گویند. از این رو اگر ρ تابعی از G به $GL(n, F)$ باشد، آن‌گاه ρ نمایش G است اگر و تنها اگر به ازای هر $g, h \in G$،

$$(gh)\rho = (g\rho)(h\rho).$$

چون هر نمایش همریختی است، پس به ازای هر نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ داریم

$$1\rho = I_n,$$
$$(g^{-1})\rho = (g\rho)^{-1} \qquad (\forall g \in G),$$

که I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم G گروه دووجهی $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ باشد. ماتریس‌های A و B را چنین تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

در این صورت مشاهده می‌کنیم که $A^4 = B^2 = I$ و $B^{-1}AB = A^{-1}$. نتیجه می‌شود که تابع $\rho : G \longrightarrow GL(2, F)$ با ضابطه‌ی

$$\rho : a^i b^j \longmapsto A^i B^j \qquad (0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1),$$

نمایش D_8 روی F است و درجه‌ی ρ مساوی ۲ است.

۱.۲.۱ نمایش‌های هم‌ارز

با استفاده از نمایش‌های هم‌ارز می‌توان نمایش مفروضی را به نمایشی دیگر تبدیل کرد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(m,F)$ و $\sigma : G \longrightarrow GL(n,F)$ نمایش‌هایی از G روی F باشند. گوییم ρ هم‌ارز با σ است اگر $n=m$ و ماتریس وارون‌پذیر $n\times n$ای مانند T وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $g\in G$،

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T.$$

به آسانی ثابت می‌شود که هم‌ارزی نمایش‌ها یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

تعریف ۴.۲.۱. هسته‌ی نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ شامل عناصری چون g از گروه G است که به ازای آن‌ها $g\rho$ ماتریس همانی باشد. از این رو

$$Ker\rho = \{g\in G : g\rho = I_n\}.$$

$Ker\rho$ زیرگروه نرمال G است.

تعریف ۵.۲.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ را نمایش صادق می‌نامیم اگر $Ker\rho = \{1\}$. یعنی عضو همانی G تنها عضوی باشد که به ازای آن، $g\rho = I_n$.

تعریف ۶.۲.۱. نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(1,F)$ با تعریف زیر

$$g\rho = (1) \qquad (\forall g\in G),$$

نمایش بدیهی G نامیده می‌شود. به عبارت دیگر نمایش بدیهی G عبارت است از نمایشی که به هر عضو گروه، ماتریس همانی 1×1 را نسبت می‌دهد.

۲.۲.۱ FG-مدول

در این بخش FG-مدول را تعریف کرده و ارتباط نزدیک میان FG-مدول‌ها و نمایش‌های G روی F را بیان می‌کنیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم V فضای برداری روی میدان F و G گروه باشد. در این صورت V را یک FG-مدول می‌نامیم اگر به ازای هر $v \in V$ و هر $g \in G$، حاصل‌ضرب vg تعریف شده باشد و به ازای هر $u, v \in V$ و $\lambda \in F$ و $g, h \in G$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $vg \in V$،

۲) $v(gh) = (vg)h$،

۳) $v1 = v$،

۴) $(\lambda v)g = \lambda(vg)$،

۵) $(u+v)g = ug + vg$.

از شرایط (۱) و (۴) و (۵) این تعریف نتیجه می‌شود که به ازای هر $g \in G$، تابع $\tau_g : V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $v \longmapsto vg$ درون‌ریختی V است. از حروف F و G در نام FG-مدول استفاده می‌کنیم و نشان دهنده این است که V فضای برداری روی F است و G گروهی است که عناصر g را برای تشکیل حاصلضرب vg $(v \in V)$ از آن اتخاذ می‌کنیم.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ نمایش G باشد. فضای برداری تمام بردارهای سطری $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ را که $\lambda_i \in F$، با $V = F^n$ نشان می‌دهیم. به ازای هر $v \in V$ و $g \in G$، حاصل‌ضرب ماتریسی بردار سطری v و ماتریس $n \times n$ $g\rho$ ، یعنی $v(g\rho)$، بردار سطری از V است. به راحتی ثابت می‌شود که خواص اساسی حاصل‌ضرب $v(g\rho)$ در شرایط پنج‌گانه تعریف ۷.۲.۱ صدق می‌کند. لذا V یک FG-مدول است.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم V یک FG-مدول و β پایه‌ی V باشد. به ازای هر $g \in G$، نماد $[g]_\beta$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس درون‌ریختی τ_g نسبت به پایه‌ی β است.

ارتباط بین FG-مدول‌ها و نمایش‌های G روی F در قضیه‌ی اساسی زیر آمده است.

قضیه ۱۰.۲.۱. ۱) اگر $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ نمایش G روی F باشد و $V = F^n$، آن‌گاه با تعریف حاصل‌ضرب vg به صورت زیر، V تبدیل به FG-مدول می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in V, g \in G),$$

به‌علاوه V پایه‌ای چون β دارد به قسمی که

$$g\rho = [g]_\beta \qquad (\forall g \in G).$$

۲) فرض کنیم V یک FG-مدول است و β پایه‌ی V. در این صورت تابع

$$g \longrightarrow [g]_\beta \qquad (g \in G),$$

نمایش G روی F است.

برهان. به قضیه‌ی ۴.۴ از [۲۳] رجوع کنید.

□

تعریف ۱.۲.۱۱. ۱) FG-مدول بدیهی عبارت است از فضای برداری یک بعدی V روی F با خاصیت

$$vg = v \qquad (\forall v \in V, g \in G).$$

۲) FG -مدول V صادق است اگر عضو همانی G تنها عنصری از G باشد که به ازای آن

$$vg = v \qquad (\forall v \in V).$$

۱.۲.۳ FG-زیرمدول و تحویل‌پذیری

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنیم V یک FG-مدول است. زیرمجموعه‌ی W از V را FG-زیرمدول V می‌نامیم هرگاه W زیرفضا باشد و به ازای هر $w \in W$ و هر $g \in G$ داشته باشیم $wg \in W$. بنابراین FG-زیرمدول V زیرفضایی است که FG-مدول نیز باشد.

مثال ۱.۲.۱۳. اگر V یک FG-مدول باشد، زیرفضای صفر V، یعنی $\{0\}$ و خود V، FG-زیرمدول‌های V هستند.

تعریف ۱۴.۲.۱. FG-مدول V را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه مخالف صفر باشد و FG-زیرمدولی به‌جز $\{0\}$ و V نداشته باشد. اگر V دارای FG-زیرمدول W باشد و W مساوی $\{0\}$ یا V نباشد آن‌گاه V را تحویل‌پذیر می‌نامیم. به همین ترتیب، نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n, F)$ را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه F^n، یعنی FG-مدول متناظر با آن که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$vg = v(g\rho) \qquad (v \in F^n, g \in G),$$

تحویل‌ناپذیر باشد و ρ را تحویل‌پذیر می‌نامیم هرگاه F^n تحویل‌پذیر باشد.

قضیه ۱۵.۲.۱. اگر G گروه آبلی متناهی باشد، هر نمایش G تحویل‌ناپذیر و از درجه‌ی ۱ است و تعداد این نمایش‌ها برابر با $| G |$ است.

برهان. به قضیه‌ی ۸.۹ از [۲۳] رجوع کنید.

□

قضیه ۱۶.۲.۱. فرض کنیم V یک FG-مدول با پایه‌ی β و W، FG-مدولی با پایه‌ی β' باشد. در این صورت V و W یکریخت هستند اگر و تنها اگر نمایش‌های

$$\rho : g \longrightarrow [g]_\beta \qquad \text{و} \qquad \sigma : g \longrightarrow [g]_{\beta'}$$

هم ارز باشند.

برهان. به قضیه‌ی ۶.۷ از [۲۳] رجوع کنید.

□

۴.۲.۱ گروه جبر

فرض کنیم G گروهی متناهی با عناصر $g_1, ..., g_n$ و F میدان R یا C باشد. فضایی برداری روی F با پایه‌ی $g_1, ..., g_n$ تعریف می‌کنیم و این فضای برداری را FG می‌نامیم. عناصر FG را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda_1 g_1 + ... + \lambda_n g_n \qquad (\lambda_i \in F).$$

قاعده‌ی جمع و قاعده‌ی ضرب در اسکالر برای عناصر FG به این صورت تعریف می‌شوند: اگر عناصر u و v از FG به شکل

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \qquad \text{و} \qquad v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$$

باشند و $\lambda \in F$، آن‌گاه

$$\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i) g_i \quad \text{و} \quad u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i$$

با تعاریف فوق، FG فضایی برداری روی F با بعد n و پایه‌ی $g_1, \ldots, g_n$ است که این پایه را پایه‌ی طبیعی FG می‌نامیم. حال FG را مجهز به عمل ضربی می‌کنیم که فضای برداری فاقد آن است. به این ترتیب ضرب عناصر FG به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) \qquad (\lambda_g, \mu_h \in F).$$

فضای برداری FG با عمل ضرب تعریف شده را گروه جبر G روی F می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنیم G گروهی متناهی باشد. مرکز گروه جبر CG را با $Z(CG)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z(CG) = \{z \in CG : zr = rz, \forall r \in CG\}.$$

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم $C_1, \ldots, C_l$ رده‌های مزدوجی متمایز G باشند. به ازای $1 \leq i \leq l$ تعریف می‌کنیم

$$\overline{C_i} = \sum_{g\in C_i} g \in CG.$$

هریک از عناصر $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_l}$ از CG را مجموع رده‌ای می‌نامیم.

گزاره ۱.۲.۱۹. مجموع‌های رده‌ای $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_l}$ پایه‌ای برای $Z(CG)$ تشکیل می‌دهند.

برهان. به گزاره‌ی ۲۲.۱۲ از [۲۳] رجوع کنید.

□

تعریف ۲۰.۲.۱. گوییم $V_۱, ..., V_k$ تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از CG-مدول‌های تحویل‌ناپذیر نایکریخت هستند اگر هر CG-مدول تحویل‌ناپذیر با یکی از V_iها یکریخت باشد و هیچ یک از آن‌ها با دیگری یکریخت نباشد. به ازای هر گروه متناهی G، مجموعه‌ی کاملی از CG-مدول‌های تحویل‌ناپذیر نایکریخت وجود دارد.

قضیه ۲۱.۲.۱. فرض کنیم $V_۱, ..., V_k$ تشکیل دهنده‌ی مجموعه‌ی کاملی از CG-مدول‌های تحویل‌ناپذیر نایکریخت باشند. در این صورت

$$\sum_{i=۱}^{k}(dimV_i)^۲ =| G | .$$

برهان. به قضیه‌ی ۱۲.۱۱ از [۲۳] رجوع کنید.

□

۳.۱ سرشت

فرض کنیم $\rho : G \longrightarrow GL(n, C)$ نمایش گروه متناهی G باشد. به هر ماتریس $n \times n$ مانند $g\rho$ $(g \in G)$ عدد مختلطی که با جمع کردن تمام عناصر قطر اصلی حاصل می‌شود نسبت می‌دهیم و آن را $\chi(g)$ می‌نامیم. تابع $\chi : G \longrightarrow C$ را سرشت نمایش ρ می‌نامیم. دو نمایش دارای سرشت یکسان هستند اگر و تنها اگر هم‌ارز باشند. همچنین تعیین این‌که نمایش مفروضی تحویل‌ناپذیر است یا نه، با محاسبه‌ی ساده‌ای با سرشت نمایش قابل حل هستند.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم V یک CG-مدول با پایه‌ی β باشد. در این صورت سرشت V عبارت است از تابع $\chi : G \longrightarrow C$ با ضابطه‌ی

$$\chi(g) = tr[g]_{\beta}.$$

طبیعی است که سرشت نمایش $\rho : G \longrightarrow GL(n,C)$ را سرشت CG-مدول C^n متناظر با آن تعریف کنیم. یعنی χ، سرشت نمایش ρ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi(g) = tr(g\rho) \qquad (g \in G).$$

تعریف ۱.۳.۲. گوییم χ سرشت G است اگر χ سرشت یک CG-مدول باشد. به‌علاوه می‌گوییم χ سرشت تحویل‌ناپذیر G است هرگاه χ سرشت CG-مدولی تحویل‌ناپذیر باشد. همچنین گوییم χ سرشت تحویل‌پذیر G است هرگاه χ سرشت CG-مدولی تحویل‌پذیر باشد. مجموعه‌ی همه‌ی سرشت‌های تحویل‌ناپذیر G را با $Irr(G)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۳.۳.

۱) CG-مدول‌های یکریخت دارای سرشت‌های مساوی‌اند.

۲) فرض کنیم x و y دو عنصر مزدوج گروه G باشند. در این صورت به ازای تمام سرشت‌های χ از G، $\chi(x) = \chi(y)$.

برهان. به گزاره‌ی ۱۳.۵ از [۲۳] رجوع کنید.

□

تعریف ۱.۳.۴. اگر χ سرشت CG-مدول V باشد، بعد V را درجه‌ی χ می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۵. سرشت درجه‌ی ۱ را سرشت خطی می‌نامیم و چنین سرشتی تحویل‌ناپذیر است.

هر سرشت خطی یک همریختی از G به گروه ضربی اعداد مختلط مخالف صفر است. در واقع سرشت‌های خطی تنها سرشت‌های مخالف صفر G هستند که همریختی‌اند. همچنین سرشت CG-مدول بدیهی، سرشتی خطی است که آن را سرشت بدیهی می‌نامیم و آن را با 1_G نمایش می‌دهیم. از این رو

$$1_G : g \longrightarrow 1 \qquad (\forall g \in G).$$