بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده‌ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد

پرتوهای پارامتری گویا از مجموعه‌ی مولتی برات

علی چمنی

اساتید راهنما:

دکتر احمد زیره

دکتر میرحیدر جعفری

استاد مشاور:

دکتر ابراهیم هاشمی

تیر ماه ۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پرتوهای پارامتری گویا از مجموعه‌ی مولتی برات

دانشجو: **علی چمنی**

اساتید راهنما:
دکتر احمد زیره
دکتر میرحیدر جعفری

استاد مشاور:
دکتر ابراهیم هاشمی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تیرماه ۱۳۸۹

تقدیم خالصانه به پدر، مادر، فرزند ، همسر عزیزم و خانواده محترمش

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است.

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید.

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

قدردانی و تشکر

اگر خزان را امید بهاری نبود، اگر درد را امید شفائی نبود، بی شک تلاش که مهمترین عامل سازندگی و رشد انسان است در گرداب تنبلی هلاک می‌گشت. اما تقدیر این نبود، تا زندگی معنا یابد و آنانکه می‌خواهند همیشه زنده بمانند به تلاشی بزرگ برای رسیدن به امیدی در دوردست واداشته شوند. خداوند متعال را شاکرم که به من توفیق داد تا نگارش این رساله را به پایان برسانم. در به فرجام رسانیدن این مهم، از گنجینه علم و حکمت و سرچشمه بذل و معرفت بزرگانی بهره برده‌ام که بر خود واجب می‌دانم از تمامی آن بزرگواران کمال تشکر و قدردانی را بنمایم. لذا بر خود می‌دانم از استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر احمد زیره** به خاطر زحمات فراوان و راهنمائی‌های ایشان و جناب آقایان **دکتر میرحیدر جعفری و دکتر ابراهیم هاشمی** که در انجام این مهم مرا یاری نمودند تشکر و قدردانی نمایم و برایشان سلامتی و موفقیت را از خداوند منان خواستارم. همچنین از آقایان **دکترمحمود بیدخام** و **دکتر مهدی ایرانمنش** که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را به عهده گرفته‌اند تشکر می‌نمایم. در پایان از خانوادهٔ عزیزم که همیشه و در تمامی مراحل زندگی راهنما و مشوق من بوده‌اند و تمامی موفقیّت‌های من مرهون زحمات و فداکاری ایشان می‌باشد، سپاسگزارم. امیدوارم این پایان نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود.

چکیده

این پایان‌نامه تشکیل شده از ۸ فصل که در فصل ۲مفاهیم،تعاریف و قضیه‌هائی مهم از دینامیک مختلط را یادآوری می‌کنیم، مجموعه‌های مولتی‌برات [1] را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها رانشان می‌دهیم.

در فصل ۳،پیرو میلنور [2] توصیف‌های روشن مدار را معرفی می‌کنیم و تعدادی از ویژگی‌های آن‌ها را در بخش‌هایی از فصل ۲ نشان می‌دهیم که برای فصل‌های بعدی مفید خواهند بود.در ادامه،بحث پایداری توصیف‌های روشن مدار تحت آشفتگی پارامترها را شروع می‌کنیم، که‌در چندین برهان ایده‌ی اصلی‌است.بعلاوه همانند برهان حالت درجه‌ی دوم ،این مفهوم را برای اثبات اولین عبارت در قضیه‌ی ساختار بکار می‌بریم(قضیه‌ی ۳.۳) سپس با توجه‌به این حقیقت که برای $d > ۲$ بعضی از پرتوهای پارامتری جفت جفت ختم می‌شوند و دیگر پرتوهای پارامتری بصورت تنها، برای شروع پارامترهای معین مختلفی داریم: بویژه در قضیه‌ی ۵.۳ نشان می‌دهیم که در هر پارامتر غیر اساسی حداقل یک پرتو ختم می‌شود و در قضیه‌ی ۴.۳ نشان می‌دهیم که بعضی از پرتوها دوبه‌دو ختم می‌شوند.

دوباره همانند یک باج به این حقیقت که در کل همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم می‌شوند بلکه دوباره همیشه یک تعداد معین از آن‌ها در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند، ما این موضوعات را در فصل۵ معرفی می‌کنیم. در برهان‌های شلچر [3] و میلنور فصلِ مولفه‌های هیپربولیک بعد از پایان یافتن قضیه‌ی ساختار شروع می‌شود.

از جمله موضوعاتی که در فصل ۴ معرفی می‌شوند این حقیقت است که نه‌تنها درحالت کلی همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم نمی‌شوند، بلکه همیشه تعداد معینی پرتو در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند.

[1] Multibrot sets

[2] Milnor

[3] Schleicher

در فصل۵ درخت‌های معروف به درخت هوبارد[۴] را معرفی و به کمک آن‌ها دو لم جداسازی مدار را ثابت می‌کنیم.درخت‌های هوبارد برای بررسی این مطلب که اگر یک پرتو پارامتری در یک پارامتر ختم شود، پرتو دینامیکی متناظر باید در یک نقطه‌ی، معروف به نقطه‌ی‌مشخصه‌ی یک پارامتر ختم شود. بعلاوه ، این مارا در اثبات این مطلب که هر پارامتر غیراساسی نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو پارامتری متناوب است (گزاره‌ی ۱.۵) و این‌که در هر پارامتر سهموی اساسی حداقل دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند(گزاره‌ی ۲.۵) قادر می‌سازد، از این رو در این فصل عبارت دوم از قضیه‌ی ساختار ثابت خواهد شد. برای برهانی از سومین عبارت نشان خواهیم داد که حداکثر دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شود.

در فصل٦ ویژگی‌های بیشتری از مولفه‌های هیپربولیک، بخصوص تعداد ریشه‌ها وبازریشه‌های یک مولفه‌ی هیپربولیک، خواهیم دید.این همچنین عبارت آخر از قضیه‌ی ساختار را ثابت خواهد کرد.

در فصل۷ ما می‌توانیم برهان عبارت سوم۳ را بوسیله‌ی استثناء کردن (بجز) برای هر پارامترسهموی اساسی تمام پرتوها، بجز برای دو تا، همانطور که برای ختم شدن در یک پارامترداوطلب می‌شوند را به پایان ببریم. مفهوم دنباله‌های‌ورزیده[۵] یک ابزار مهم است که برای این منظور بکار می‌بریم.

بوسیله‌ی تحدید کردن حالت یک پرتو باتکرارمتناوب می‌توانیم در فصل۸،چهارمین و پنجمین عبارت از قضیه‌ی ساختار همانند حالت درجه‌ی دوم ثابت کنیم.

---

[۴] Hubbard trees

[۵] Kneading Sequences

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

The first International Symposium On Geometric Functions Theory and Application

[1] Reiman Mapping for Mandelbrot set of Symmetric Polynomials

فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۱

مقدمه، تاریخه و نگاهی کلی به متن

۱—۱ مقدمه

در این پایان‌نامه،فضای پارامتری چند جمله‌ای‌های تک بحرانی $z^d + c$ که $d \geq 2$، $d \in \mathbb{Z}$ و $c \in \mathbb{C}$ را مطالعه خواهیم کرد. بویژه به مجموعه‌های مولتی‌برات "$\mathcal{M}_d$" ، یعنی مجموعه‌ی پارامترهای c که برای آن‌ها $z^d + c$ مجموعه‌ی ژولیای همبند دارد،علاقمندیم. مجموعه‌های مولتی‌برات تعمیم فوری مجموعه‌ی آشنای مندلبرات هستند، که برای اولین باربوسیله‌ی دودی و هوبارد[۱] و یادداشت‌های مشهور اُرسی [۲] مطالعه شدند.

ما دوهدف عمده داریم:اولین هدف این است که می‌خواهیم یک برهان از قضیه‌ی‌ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات ارائه دهیم که یک توصیف ترکیبی از مجموعه‌های مولتی‌برات می‌دهد. برای مجموعه‌ی مندلبرات قضیه‌ی ساختارآشناست و چندین برهان وجود دارد: ابتدا برهان ذکر شده در یادداشت‌های اُرسی فراهم شد. بعلاوه در [۸] یک برهان ساده‌ترو مهم بوسیله‌ی شلچر [1] وجود دارد، که‌او ابتدا در رساله‌ی دکترای خود [۷] ارائه کرد که بزودی منتشر خواهد کرد. برهان دیگر از میلنور [٦] داده شده‌است.(هر یک از این برهان‌ها با اندکی اصلاحات قضیه‌ی ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات را ثابت می‌کنند). حال هدف دوم ما ترکیب کردن برهان‌های شلچر و میلنور با روش‌های جدید و بدین وسیله ارائه یک برهان برای قضیه‌ی ساختار است. بعداً قضیه‌ی ساختار را بیان می‌کنیم و بدنبال آن سازماندهی خود از برهان را توصیف می‌کنیم.

قضیّه ۱.۱ (قضیه‌ی ساختار برای مجموعه‌های مولتی‌برات):

برای مجموعه‌ی مولتی‌برات $\mathcal{M}_d$ و پرتوهای پارامتری مربوط به آن عبارات زیر برقرارند:

۱) هر پرتو پارامتری متناوب در یک پارامتر سهموی از $\mathcal{M}_d$ ختم می‌شود.

۲) هر پارامتر سهموی غیراساسی از $\mathcal{M}_d$ نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو متناوب است.

۳) هر پارامتر سهموی اساسی از $\mathcal{M}_d$ ، نقطه‌ی مختوم دقیقاً دو پارامتر متناوب است.

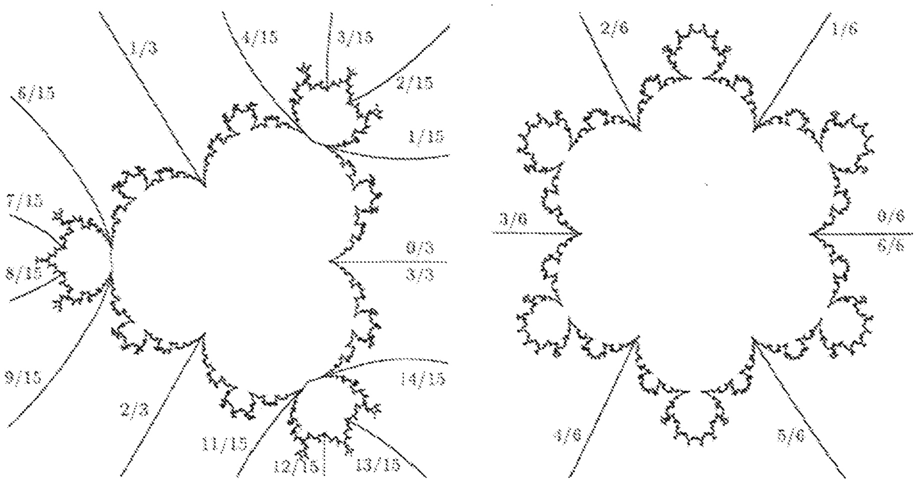
[1] Sheleicher

۴) هر پارامتر باتکرارمتناوب در نقطه‌ی میسرویکز[۲] از $\mathcal{M}_d$ ختم می‌شود.

۵) هر نقطه‌ی میسیرویکز نقطه‌ی مختوم حداقل یک پرتو پارامتری باتکرارمتناوب است.

٦) هر مولفه‌ی هیپربولیک از $\mathcal{M}_d$ دقیقاً یک ریشه و $d-۲$ بازریشه [۳] دارد.

برای بدست آوردن ایده‌ی تقریبی از این‌که مجموعه‌های مولتی برات چه سیمایی دارند ما تصاویری از دو تا از آن‌ها نشان می‌دهیم. تصویر سمت چپ $\mathcal{M}_۴$ همراه با پرتوهای پارامتری ۱–متناوب و ۲–متناوب است. آن‌ها بوسیله‌ی زاویه‌های متناظرشان نشان شده‌اند. همان‌طور که در قضیه‌ی ساختار بیان شد، این پرتوهای پارامتری مختوم هستند و بویژه بعضی از نقاط، پارامترهای سهموی اساسی ، هر یک نقاط مختوم دقیقاً دو پرتو پارامتری هستند. (پرتو نشان شده بوسیله‌ی صفر ویک مفهوم خاصی دارد که دوباره به حساب می‌آید)



نقاط مختوم دیگر در تصویر پارامترهای سهموی غیر اساسی هستند. از سمت راست $\mathcal{M}_۷$ با پرتوهای پارامتری ۱–متناوب نشان داده شده است. باید توجه کنیم که قسمت کراندار نیز به مجموعه‌ی مولتی برات تعلق دارد.

---

[۲] Misiurwicz

[۳] Co-root

کار اصلی ما عبارت است از اثبات این مطلب که دقیقاً دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شوند. همان‌طور که قبلاً ذکر شده، برهان‌های شلچر و میلنور را ترکیب می‌کنیم. شلچر نشان می‌دهد که هر پارامتر سهموی نقطه‌ی مختوم حداکثر دو پرتو پارامتری است— در حالت درجه‌ی دوم تمام پارامترهای سهموی اساسی هستند— و ترکیب کردن این با یک روش شمارشی عمومی ، ایجاب می‌کند که دقیقاً دو پرتوپارامتری در هر پارامتر سهموی ختم می‌شوند. در مقابل، میلنور نشان می‌دهد که حداقل دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی ختم می‌شوندو دوباره با بکار بردن یک روش محاسبه‌ی عمومی، که نشان می‌دهد که هیچ پرتو پارامتری چپ نیست ، یعنی ، آن‌ها دو به دو ختم می‌شوند. قصد ما این است که بوسیله‌ی استراتژی میلنور که حداقل دو تا و بوسیله‌ی روش شلچر که حداکثر دو تا پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شوند، نشان دهیم که روش شمارش عمومی را می‌توانیم حذف کنیم زمانی درگذشته میلنور این استراتژی عمومی را برای حالت درجه‌ی دوم پیشنهاد کرد.

۱ـ۲ نگاه کلی به متن

این پایان‌نامه تشکیل شده از ۸ فصل که در فصل ۲مفاهیم،تعاریف و قضیه‌هائی مهم از دینامیک مختلط را یادآوری می‌کنیم، مجموعه‌های مولتی‌برات را معرفی کرده و برخی از ویژگی‌های پایه‌ای آن‌ها رانشان می‌دهیم.

در فصل ۳،پیرو میلنور توصیف‌های روشن مدار را معرفی می‌کنیم و تعدادی از ویژگی‌های آن‌ها را در بخش‌هایی از فصل ۲ نشان می‌دهیم که برای فصل‌های بعدی مفید خواهند بود.در ادامه،بحث پایداری توصیف‌های روشن مدار تحت آشفتگی پارامترها را شروع می‌کنیم، که‌در چندین برهان ایده‌ی اصلی‌است.بعلاوه همانند برهان حالت درجه‌ی دوم ،این مفهوم را برای اثبات اولین عبارت در قضیه‌ی ساختار بکار می‌بریم(قضیه‌ی ۳.۳) سپس با توجه‌به این حقیقت که برای $d > ۲$ بعضی از پرتوهای پارامتری جفت جفت ختم می‌شوند و دیگر پرتوهای پارامتری بصورت تنها، برای شروع پارامترهای معین مختلفی داریم: بویژه در قضیه‌ی ۵.۳ نشان می‌دهیم که در هر پارامتر غیر اساسی حداقل یک پرتو ختم می‌شود و در قضیه‌ی ۴.۳ نشان می‌دهیم که بعضی از پرتوها دوبه‌دو ختم می‌شوند.

دوباره همانند یک باج به این حقیقت که در کل همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم می‌شوند بلکه دوباره همیشه یک تعداد معین از آن‌ها در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند، ما این موضوعات را در فصل۵ معرفی می‌کنیم. در برهان‌های شلچر و میلنور فصلِ مولفه‌های هیپربولیک بعد از پایان یافتن قضیه‌ی ساختار شروع می‌شود.

از جمله موضوعاتی که در فصل ۴ معرفی می‌شوند این حقیقت است که نه‌تنها درحالت کلی همه‌ی پرتوهای پارامتری دوبه‌دو ختم نمی‌شوند، بلکه همیشه تعداد معینی پرتو در یک مولفه‌ی هیپربولیک ختم می‌شوند.

در فصل۵ درخت‌های معروف به درخت هوبارد را معرفی و به کمک آن‌ها دو لم جداسازی مدار را ثابت می‌کنیم.درخت‌های هوبارد برای بررسی این مطلب که اگر یک پرتو پارامتری در یک پارامتر ختم شود، پرتو دینامیکی متناظر باید در یک نقطه‌ی، معروف به نقطه‌ی‌مشخصه‌ی یک پارامتر ختم

شود. بعلاوه ، این مارا در اثبات این مطلب که هر پارامتر غیراساسی نقطه‌ی مختوم دقیقاً یک پرتو پارامتری متناوب است (گزاره‌ی ۱.۵) و این‌که در هر پارامتر سهموی اساسی حداقل دو پرتو پارامتری ختم می‌شوند(گزاره‌ی ۲.۵) قادر می‌سازد، از این رو در این فصل عبارت دوم از قضیه‌ی ساختار ثابت خواهد شد. برای برهانی از سومین عبارت نشان خواهیم داد که حداکثر دو پرتو پارامتری در هر پارامتر سهموی اساسی ختم می‌شود.

در فصل٦ ویژگی‌های بیشتری از مولفه‌های هیپربولیک، بخصوص تعداد ریشه‌ها وبازریشه‌های یک مولفه‌ی هیپربولیک، خواهیم دید.این همچنین عبارت آخر از قضیه‌ی ساختار را ثابت خواهد کرد.

در فصل۷ ما می‌توانیم برهان عبارت سوم۳ را بوسیله‌ی استثناء کردن (بجز) برای هر پارامترسهموی اساسی تمام پرتوها، بجز برای دو تا، همانطور که برای ختم شدن در یک پارامترداوطلب می‌شوند را به پایان ببریم. مفهوم دنباله‌های‌ورزیده یک ابزار مهم است که برای این منظور بکار می‌بریم.

بوسیله‌ی تحدید کردن حالت یک پرتو باتکرارمتناوب می‌توانیم در فصل۸،چهارمین و پنجمین عبارت از قضیه‌ی ساختار همانند حالت درجه‌ی دوم ثابت کنیم.

فصل ۲

تعاریف و مقدمات

۲–۱ تعاریف اولیه

در این فصل می خواهیم نمادهایمان را معرفی کرده و تعاریف مشهور و حقایقی ازآنالیز مختلط و دینامیک هولومورفیک را تکرار کنیم. همچنین به « سخنرانی های مقدماتی روی دینامیک در یک متغیر» از میلنورمراجعه می کنیم. به علاوه تعدادی ویژگی اساسی از مجموعه‌های مولتی برات در زیربخش ۳.۲ ثابت می کنیم. حال نمادگذاری هایمان را تنظیم می کنیم.

نماد گزاری ۱.۲ میدان اعداد حقیقی رابا $\mathbb{R}$ ، میدان اعداد مختلط را با$\mathbb{C}$ وفضای تصویر یک بعدی روی $\mathbb{C}$ را با$\mathbb{P}_1$ نمایش می دهیم.

بازه‌ی واحد بسته را بوسیله‌ی $I := [0, 1]$، دیسک باز باشعاع r و مرکزa را با $B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} | |z - a| < r\}$ و بویژه دیسک واحد باز رابا $D := B_1(0)$ ،بستار و درون یک زیر مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{C}$ نسبت به توپولوژی القایی را به‌ترتیب با $A^\circ, \bar{A}$ نمایش می‌دهیم، یک مجموعه‌ی کراندار $A \subset \mathbb{C}$ کامل نامیده می‌شود اگر متممش$(\mathbb{P}_1 - A)$ همبند باشد. بوسیله‌ی یک افراز از $\mathbb{C}$ ما به وجود یک خانواده‌ی شمارا از زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{C}$ طوریکه بستارشان برابر $\mathbb{C}$ است پی می‌بریم. مرز تمام این مجموعه‌های باز، افراز مرزاست، مااغلب افراز رابا مرزش یکی می گیریم. چون ما بطور عمده به چند جمله‌ای‌های با یک نقطه‌ی بحرانی علاقمندیم مناسب است تعریف کنیم: $f_{c,d}(z) := z^d + c \ (d \geq 2, c \in \mathbb{C})$. در کل ما d را تغییر نمی‌دهیم بنابراین معمولاً به‌جای $f_{c,d}$ می‌نویسیم f_c. گاهی‌اوقات مناسب است f_c را با c یکی بگیریم.

فرض کنید g, f توابع مختلط مقدار باشند. در این صورت ما طبق معمول می نویسیم $f(z) := O(g(z))$ برای $z \in U \subset \mathbb{C}$ اگر یک ثابت $c \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد طوریکه $|f(z)| \leq c.|g(z)|$ برای تمام $z \in U$.