دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

روش‌های سینک برای حل معادلات دیفرانسیل تکین

استادان راهنما

دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام و دکتر حسین خیری

پژوهشگر

حسین پوربشاش

۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحيم

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حقّ او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشهٔ تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سرِ فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفتهای او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، و به رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگها لرزهٔ زمین را در مهار کشید.

گواهی می دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می دهم که محمّد (ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان و فداکارم

همسر و دختر عزیز و نازنینم

به نام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای **دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام** و **دکتر حسین خیری**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جنابان آقایان **دکتر فرانك استنجر** از دانشگاه یوتا، **دکتر پلوگین** و **دکتر دلینهیر** از دانشگاه فلوریدا بابت کمك‌ها و راهنمائی‌هایشان در راستای این تحقیق کمال تشکر و امتنان را دارم.
از آقایان دکتر حجتی، دکتر لکستانی، دکتر شهمراد، دکتر عبادی، دکتر ایواز، دکتر امامعلی‌پور و دکتر ایراندوست و سرکار خانم دکتر بهرامی که در طول تحصیل اینجانب همواره راهنمای من بودند نیز تشکر می‌کنم. از آقایان دکتر قنبری، دکتر حجتی و دکتر لکستانی که زحمت داوری این رساله را پذیرفته اند کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اعضاء خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند و مخصوصاً **جناب آقای دکتر محمد صفری** پدر همسر گرامی که حق استادی را بر من تمام نموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

حسین پوربشاش
۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: پوربشاش   نام: حسین
عنوان: روش‌های سینک برای حل معادلات دیفرانسیل تکین
استادان راهنما : دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام و دکتر حسین خیری
مقطع تحصیلی: دکتری   رشته: ریاضی کاربردی   گرایش: معادلات دیفرانسیل   دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی   تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۱۵۲
کلید واژه‌ها: مسائل تکین، تبدیلات نمائی مضاعف، روش سینک گالرکین، روش سینک هم‌محلی، سیستم‌های دینامیکی، مدل بیماری‌های ویروسی درون میزبان، پایداری عمومی، پایداری موضعی، تابع لیاپانف، ماتریس‌های ترکیب افزوده دوم، مدل جمعیت بیماری ببیزیوسیز در گاو و کنه.

چکیده

این رساله به دو بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول ضمن معرفی مسائل مقدار اولیه و مسائل مقدار مرزیی که در صورت آن‌ها و یا در جواب آن‌ها تکینی وجود دارد، به بررسی روش سینک گالرکین و هم‌محلی با تبدیلات نمائی ساده و مضاعف برای حل این نوع مسائل پرداخته خواهد شد. با ارائه مثال‌های متعدد کارائی روش‌های ارائه شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در بخش دوم، سیستم‌های دینامیکی را معرفی نموده و کاربرد آن‌ها را در مسائل بیولوژیک با معرفی دو مدل مختلف، ارائه خواهیم کرد. رفتار کیفی این مدل‌ها و پایداری موضعی و کلی نقاط تعادل با روش‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش‌های سینک برای اولین بار جهت شبیه‌سازی عددی سیستم‌های دینامیکی به‌کار گرفته می‌شود. در عمل مشاهده می‌شود که این روش‌ها برای حل مسائل در بازه‌های بزرگ مشکل همگرائی دارند؛ برای رفع این مشکل تعمیمی از روش مذکور معرفی خواهد شد.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

مقدمه

روش‌های سینک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی به طور گسترده بررسی شده و کارائی آن، مخصوصا برای مسائل منفرد و مسائل با دامنه نامتناهی نشان داده شده است. روش‌های سینک کاربردهای فراوانی در علوم و مهندسی مانند انتقال حرارت [۳۷، ۵۸، ۷۳]، رشد جمعیت [۱]، مکانیک سیالات [۹۵]، کنترل بهینه [۷۹]، مساله معکوس [۷۷، ۴۳، ۴۴، ۵۳] و تصویربرداری پزشکی [۸۰] دارد.

تقریب سینک بر پایه تابع کاردینال ویتاکر [۹۳، ۹۴] بنا نهاده شده است. تاریخچه ارایه تابع کاردینال به تحقیقات ویتاکر [۱] در سال‌های ۱۹۱۵ و ۱۹۳۵ برمی‌گردد. بعد از او تحقیقات توسط شانون نیکوست و هارتلی [۲] در زمینه‌های کاربردی، مخصوصا در علوم مهندسی ادامه پیدا کرد. این افراد نقش کاربردی تابع کاردینال را در تحلیل سیگنال و سیستم در مخابرات نشان دادند.
فرانک استنجر [۳] روش‌های سینک را در سال ۱۹۷۶ معرفی کرد و در سال ۱۹۸۱ فرمول تقریب سینک را بر اساس تابع ویتاکر [۹۳، ۹۴] برای توابع بررسی و قضایای مربوط به تقریب را اثبات نمود. در کتاب‌های [۸۲، ۴۵] بررسی اجمالی مناسبی برای توابع سینک در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی و معادلات انتگرالی توسط استنجر ارائه شده است. بحث مفصلی از رفتار روش‌های سینک در مسائل مقدار مرزی توسط جان لاند در سال‌های ۱۹۸۶ و ۱۹۹۲ [۴۴، ۸۰] ارائه شد. برای حل معادلات دیفرانسیل دو روش سینک گالرکین و سینک هم‌محلی بر پایه تقریب‌های

[۱] Whittaker

[۲] Shannon Nicost and Hartley

[۳] Frank Stenger

سینک ارائه می‌شود. اولین بار روش سینک گالرکین توسط استنجر در سال ۱۹۷۹ برای مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای در معادلات دیفرانسیل مرتبه دو با شرایط مرزی دیریکله [۸۱] ارائه شد. در [۲] روش سینک گالرکین برای حل مسائل مقدار مرزی دونقطه‌ای تکین به‌کار رفت. همچنین در سال ۱۹۹۱ بیالکی تقریب سینک را برای مسائل مقدار مرزی با استفاده از روش هم محلی به‌کار برد. روش سینک هم‌محلی برای حل مسائل مقدار اولیه در [۱۱] استفاده شده و ثابت گردیده که روش سینک به‌صورت نمائی به جواب همگراست. در [۷۹] نشان داده شده است که هر دو روش سینک گالرکین و هم‌محلی به‌صورت نمائی به جواب همگرا هستند. برتری این روش در مسائلی که نقطه تکین [۸۳] دارند مشخص می‌شود. همگرایی در این روش برای تقریبی با تعداد N نقطه به صورت $O(\exp(-c\sqrt{N}))$ است که در آن c ثابت است. روش‌های تقریب سینک، خانواده جدیدی از فرمول‌ها را برای محاسبه ارائه می‌دهند. این فرمول‌ها ما را قادر می‌سازند که بتوانیم تقریب‌هایی با دقت مناسب برای انواع عملیات مانند تقریب مشتق و انتگرال توابع و غیره به دست آوریم. این روش‌های محاسباتی دارای کارایی بسیار وسیعی می‌باشند.

برای مثال:

۱-تقریب مناسب انتگرال‌هایی که تابع زیر انتگرال، منفرد باشد.

۲- پیدا کردن جواب تقریبی مناسب برای معادلات دیفرانسیل معمولی یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی که ضرایب این معادلات منفرد باشند.

۳- جواب تقریبی مناسب برای معادلات انتگرال فردهلم یا ولترای خطی و غیرخطی به ویژه آنها که دارای هسته منفرد باشند.

۴- استفاده در حل مسائل معکوس.

۵- تقریب مناسب برای مقادیر ویژه در معادلات دیفرانسیل.

تاکاهاشی و موری [۸۸] تبدیلات نمائی مضاعف [۴] را برای محاسبه عددی انتگرال‌های یک بعدی در سال ۱۹۷۴ ارائه نمودند. کارائی روش تبدیلات مضاعف در محاسبات عددی انتگرال‌ها، محققین را بر آن داشت تا تبدیلات نمائی مضاعف را برای سایر روش‌های عددی به‌کار بگیرند. سوگی‌هارا [۸۵] توانست با موفقیت روش سینک هم‌محلی را برای حل مسائل مقدار مرزی با

[۴] Double exponential transformation

معادلات دیفرانسیل مرتبه دو به‌کار ببرد. اخیرا مسائل مقدار مرزی با معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار نیز با روش سینک هم‌محلی حل شده است. در واقع در [۴۹، ۵۴، ۸۶، ۶۰] نشان داده شده است که روش سینک با استفاده از تبدیلات مضاعف برای حل عددی انتگرال‌ها و یا حل عددی معادلات دیفرانسیل بسیار کاراتر است.

در عمل، برخی اوقات مسایلی به‌دست می‌آید که دارای معادلات دیفرانسیل تکین بوده و یا در جواب آنها تکینی وجود دارد. اغلب روش‌های عددی در مواجهه با این نوع مسائل معمولا کارائی خود را از دست می‌دهند. به‌عنوان مثال مدل تنزیل انعطاف‌پذیری حول نقطه ثابت کوالاسکی، مدل جریان اتمسفر لورنز، معادلات پین‌لوی که در مسائل مکانیک آماری، مدل‌های ماتریسی تصادفی، فیزیک پلاسما، موج‌های غیرخطی به‌دست می‌آید، همگی معادلات دیفرانسیلی هستند که دارای جواب تکین هستند. در این مسائل معمولا روش‌های عددی هنگام عبور از نقطه تکین کارایی خود را از دست می‌دهند.

در فصل اول این رساله به حل مساله مقدار مرزی دونقطه‌ای

$$\begin{aligned}
&L(y) = p(x)y'' + q(x)y' + u(x)y = f(x, y),\\
&y(a) = y(b) = 0,
\end{aligned}$$

و مساله مقدار اولیه

$$\begin{aligned}
&L(y) = p(x)y'' + q(x)y' + u(x)y = f(x, y),\\
&y(0) = a, \qquad y'(0) = b,
\end{aligned}$$

که در آنها $p(x), q(x), u(x), f(x, y)$ توابع تحلیلی هستند، پرداخته خواهد شد. در این مسائل، تابع $p(x)$ در بازه داده شده مساله دارای صفر بوده و یا معادله دارای جواب تکین در این بازه است. این معادلات با پایه‌های مختلف ازجمله پایه‌های سینک با استفاده از روش‌های طیفی حل خواهد شد. روش‌های سینک، روش‌های بسیار کارائی برای به‌کارگیری در مسائلی هستند که دارای تکینی در صورت مساله هستند؛ در حالی که بسیاری از روش‌های عددی قادر به عبور موفقیت آمیز از نقاط تکین نیستند. در مسائلی که نقاط تکین در جواب آن‌ها است روش سینک گالرکین بسیار بهتر از سینک هم‌محلی ظاهر شده است.

مدل‌سازی ریاضی بیماری‌ها یکی از روش‌های موثر برای درك دینامیك بیماری‌ها است. این مدل‌ها اغلب دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه یك هستند. بررسی فرضیه‌های مختلف بر اساس داده‌های کلینیکی بیماری‌ها اغلب بسیار مشکل است زیرا نمی‌توان به تعداد زيادي از بیماران دسترسي پیدا کرد و یا تکنیك‌های اندازه‌گیری ویروس‌ها دقیق نیستند. بنابراین مدل‌های ریاضی در این حوزه بسیار مهم هستند. یکی از راه‌های تحلیل و پیش‌بینی در مورد بیماری‌ها شبیه‌سازی‌های عددی است. با توجه به این که روش سینك تاکنون برای حل دستگاه‌های معادلات ارائه نگردیده است در این تحقیق دنبال آن هستیم که روش سینك را برای به کارگیری در حل سیستم‌های دینامیکی تعمیم دهیم.

در فصل دوم روش‌های طیفی به اختصار معرفی می‌شوند. در فصل سوم ضمن معرفی پیش‌زمینه تئوری توابع سینک و ویتاکر، به معرفی فرمول‌ها و قضایای تقریب‌های سینک و روش‌های طیفی با پایه‌های سینک خواهیم پرداخت. در ادامه روش سینك گالرکین و سینك هم‌محلی برای حل مسائل مقدار مرزی ارائه می‌شوند. جهت حل مسائل مقدار اولیه لازم است قدری در پایه‌های این روش تغییر ایجاد شود. لذا با تغییر این پایه‌ها روش سینك برای حل مسائل مقدار اولیه تعمیم داده می‌شود و در انتهای فصل سوم با ارائه مثال‌های مختلفی از مسائلی که دارای تکینی در خود معادله و یا تکینی در جواب هستند روش‌های سینك گالرکین و هم‌محلی و روش گالرکین با هم دیگر مقایسه خواهند شد.

در فصل چهارم پس از ارائه مفاهیم اولیه مربوط به تحلیل‌های پایداری، دو مدل ریاضی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مدل بیماری‌های ویروسی درون میزبان و مدل جمعیت بیماری ببیزیوسیز در گاوها و کنه‌ها و سپس روش سینك تعمیم یافته چندگامی ارائه می‌گردد و در نهایت با شبیه‌سازی‌های عددی، مثال‌های متنوعی مورد مطالعه قرار مي‌گیرند.

از این رساله مقاله‌های [۲۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲] مستخرج شده که برخی در کنفرانس‌های بین‌المللی ارائه شده و برخی در مجله‌های معتبر بین‌المللی پذیرش شده ویا چاپ شده‌اند.

فصل ۱

مسائل مقدار مرزی و اولیه

۱.۱   مسائل مقدار مرزی و اولیه

مسائل مقدار اولیه به‌صورت کلی

$$y' = f(x, y),$$
$$y(a) = \alpha,$$

نمایش داده می‌شوند که در آن

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}.$$

جواب معادله به‌صورت

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

است. در مسائل مقدار مرزی، شرایط مرزی مساله به‌صورت

$$Ay(a) + By(b) = C, \tag{۱.۱}$$

داده می‌شود که در آن A و B ماتریس‌های $n \times n$ و C یک ماتریس $n \times 1$ است.

تعریف ۱.۱.۱. اگر در (۱.۱) شرایط شامل a و b جدا از هم باشند، شرایط مرزی را جداشدنی می‌نامیم، یعنی

$$A_1 y(a) = C_1, \qquad B_2 y(b) = C_2.$$

در عمل معمولا شرایط مرزی جداشدنی هستند.

شرایط مرزی بیان شده در (۱.۱) بر حسب $y(a)$ و $y(b)$ خطی هستند. اما گاهی در عمل با شرایط مرزی غیرخطی مواجه هستیم یعنی

$$r(y(a), y(b)) = 0,$$

که در آن داریم

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} r_1(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n) \\ \vdots \\ r_n(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n) \end{bmatrix}.$$

تفاوت مهم مسائل مقدار اولیه و مرزی

اگر در مسائل مقدار اولیه f_iها پیوسته بوده و در شرط لیپ‌شیتز صدق کنند آن‌گاه جواب وجود داشته و منحصر به‌فرد خواهد بود. اما اگر شرط مرزی هم به آن اضافه شود ممکن است با این شرایط جواب نداشته یا دارای جواب منحصربه‌فرد بوده و یا چندین جواب داشته باشند.

مثال ۲.۱.۱. معادله دیفرانسیل $w'' + w = 0$ را در نظر می‌گیریم که در آن w یک تابع حقیقی به‌صورت $w : R \to R$ است با فرض

$$y_1 = w(x), \qquad y_2 = w'(x),$$

داریم

$$y_1' = w'(x) = y_2 \ \to \ y_2 = y_1'$$

و در نتیجه داریم

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{bmatrix}.$$

جواب عمومی این معادله به‌صورت $w(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ است.

ملاحظه می‌شود با شرایط مرزی $w(\frac{\pi}{2}) = 1$ و $w(0) = 0$، معادله دارای جواب منحصربه‌فرد و با شرایط مرزی $w(\pi) = 0$ و $w(0) = 0$، دارای بی‌شمار جواب و با شرایط مرزی $w(\pi) = 1$ و $w(0) = 0$، معادله دارای جواب نیست.

در ادامه قضایای عمومی وجود و بررسی منحصر به‌فردی جواب ارائه می‌گردد.

قضیه ۳.۱.۱. (قضیه وجود جواب) *فرض کنید $f(x, u_1, u_2)$ روی $\{a \leq x \leq b, u_1^2 + u_2^2 < \infty\}$ پیوسته بوده و در شرط لیپ‌شیتز نسبت به u_1, u_2 صدق کند در این صورت مساله مقدار مرزی*

$$\begin{aligned} &y'' = f(x, y, y'), \\ &a_0 y(a) - a_1 y'(a) = \alpha, \qquad |a_0| + |a_1| \neq 0, \\ &b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta, \qquad |b_0| + |b_1| \neq 0, \end{aligned}$$

دارای جواب‌هائی به‌صورت ریشه‌های مجزای $S = S^{(v)}$ از معادله

$$\Phi(s) = b_0 u(b, s) + b_1 u'(b, s) - \beta = 0,$$

هستند.

برهان. مساله مقدار اولیه

$$v'' = f(x, v, v'),$$

$$a_\circ v(a) - a_۱ v'(a) = \alpha,$$
$$c_\circ v(a) - c_۱ v'(a) = s \qquad (۲.۱)$$

که $a_۱ c_\circ - a_\circ c_۱ \neq \circ$ را در نظر می‌گیریم که s و α پارامتر مستقل از x هستند. فرض کنیم $a_۱ c_\circ - a_\circ c_۱ = ۱$. اگر $u(x,s)$ جواب یکتای مساله (۲.۱) باشد در این‌صورت جوابی به فرم

$$\Phi(s) = b_\circ u(b,s) + b_۱ u'(b,s) - \beta = \circ, \qquad (۳.۱)$$

را جستجو می‌کنیم. اگر $s = s^*$ جواب معادله (۳.۱) باشد انتظار داریم تابع $y(x) = u(x, s^*)$ جواب مساله مقدار مرزی باشد.

متغیر جدید $u_۲(x) = u'(x), u_۱(x) = u(x)$ را معرفی می‌کنیم. مساله (۲.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} u'_۱ = u_۲ & u_۱(a) = u(a) = \frac{-۱}{-a_۱c_\circ + a_\circ c_۱}[-c_۱\alpha + a_۱ s] = a_۱ s - c_۱ \alpha \\ \\ u'_۲ = f(x, u_۱, u_۲) & u_۲(a) = u'(a) = \frac{-۱}{-a_۱c_\circ + a_\circ c_۱}[a_\circ s - c_\circ \alpha] = a_\circ s - c_\circ \alpha. \end{cases} \qquad (۴.۱)$$

حال

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_۱ s - c_۱ \alpha \\ a_\circ s - c_\circ \alpha \end{bmatrix}, \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} u_۲ \\ f(x, u_۱, u_۲) \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}.$$

چون f در شرایط قضیه وجودی و منحصر به‌فردی مساله مقدار اولیه صدق می‌کند پس دستگاه

$$u' = f(x,u),$$
$$u(a) = \alpha,$$

دارای جواب منحصر به‌فرد $u_۱(x) = u(x,s)$ که $a \leq x \leq b$ است. به‌وضوح اگر $\Phi(s) = \circ$ (برای بعضی sها) این جواب، جواب مساله مقدار مرزی ما نیز خواهد بود. اگر $s^{(j)}, s^{(i)}$ دو ریشه مجزای

معادله (۳.۱) باشند با استفاده از یکتایی دستگاه (۴.۱) $u(x,s^{(i)}) \neq u(x,s^{(j)})$. بنابراین هر ریشه مجزا از معادله (۳.۱) یک جواب مجزا از مساله مقدار مرزی خواهد بود. حال فرض کنیم $y(x)$ جواب مساله مقدار مرزی ما باشد. بنابراین یک جواب برای (۴.۱) نیز خواهد بود البته به پارامتر $s = c_0 y(a) - c_1 y'(a)$ که این مقدار در (۳.۱) نیز صدق می‌کند. پس وجود جواب برای مساله مقدار مرزی اثبات شد. □

قضیه ۴.۱.۱. *مساله مقدار اولیه*

$$\begin{cases} u' = f(x,u) \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

را با فرض پیوستگی f روی $a \leq x \leq b, |u| < \infty$ و با فرض این که f نسبت به u در شرط لیپ‌شیتز صدق کند، در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید مولفه‌های ژاکوبین f نسبت به u روی R پیوسته باشد به‌عبارت دیگر ماتریس مرتبه nام، $F(x,u) = \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} = (\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_j})_{i,j}$، $i,j = 1,\dots,n$ روی R پیوسته باشد. در این‌صورت برای هر α جواب $u(x,\alpha)$ نسبت به α_k به‌طور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر خواهد بود. یعنی اگر $\xi^{(k)}(x) = \frac{\partial u(x,\alpha)}{\partial \alpha_k}$، $\xi^{(k)}(x)$ جواب دستگاه

$$\frac{d}{dx}\xi(x) = F(x, u(x,\alpha)),$$
$$\xi(a) = e_k, \qquad e_k = (0,\dots,1,\dots,0),$$

است.

برهان. به اثبات قضیه ۱.۲.۱ از [۳۰] مراجعه شود. □

قضیه ۵.۱.۱. **(قضیه یکتایی جواب)** *فرض کنید تابع $f(x,u_1,u_2)$ در شرایط قضیه ۱ .۱ .۳ صدق کند و همچنین فرض کنید f دارای مشتقات پیوسته روی R باشد به‌طوری که برای ثابت مثبت M، $\frac{\partial f}{\partial u_1} > 0, \left|\frac{\partial f}{\partial u_2}\right| \leq M$. فرض کنید ضرایب مساله مقدار مرزی در شرایط*