به‌نام یگانهٔ هستی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

نظریه‌ی طیفی گراف

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

سیده صادقه حق‌شناس

استاد راهنما: دکتر سعاد ورسایی

دی ۱۳۸۷

قدردانی و تشکر

از پدر و مادر خوب و مهربانم که همواره یار و مشوّق من بوده و هستند سپاس‌گزارم.

از استاد عزیز و بزرگوارم آقای دکتر ورسایی که زحمات بسیاری برای من کشیده‌اند و کمک‌های بی‌دریغ ایشان پیوسته راهگشای من بوده بسیار ممنونم.

از دیگر اساتید گروه ریاضی آقایان دکتر اصفهانی‌زاده، دکتر ذاکر، دکتر رویین، دکتر رهنما و دکتر زارع که اساتید من در این دوره بودند و نیز آقای دکتر نصیری که به من در درک بیشتر مطالب این پایان‌نامه کمک کردند متشکّرم.

از برادران عزیزم محمّدعلی و مصطفی که حضور و حمایتشان همیشه مایه‌ی دلگرمی من بوده تشکّر می‌کنم.

از دوست نازنین و مهربانم پویا به‌خاطر چیزهای زیادی که از او یاد گرفتم و کمک‌های همیشگی و بی‌انتظارش ممنونم.

از دوست خوبم آقای سالاری که همیشه از راهنمایی‌هایش استفاده کرده‌ام ممنونم.

در پایان از همه‌ی دوستان و هم‌کلاسی‌هایم که روزهای بسیار خوش و به‌یادماندنی را در کنار هم سپری کردیم و هریک به‌نوبه‌ی خود درسی از زندگی را به من آموختند متشکّرم و برای همه‌ی عزیزان قبل از هر چیز آرزوی شادی و رضایت خاطر، و پس از آن سلامتی و موفّقیت دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، هدف مطالعه‌ی گراف‌ها از طریق تحلیل طیف ماتریس لاپلاسین آن‌ها می‌باشد. برای این منظور، ابتدا فرمولی برای یافتن مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین ارائه می‌کنیم. سپس برحسب ناورداهای گراف حدودی برای مقادیر ویژه‌ی ناصفر می‌یابیم. در ادامه مقادیر ویژه‌ی گراف‌های وزن‌دار، قدم‌زدن تصادفی ارگودیک و تقریب توزیع پایدار مربوطه مورد بررسی قرار می‌گیرد. نهایتاً در فصل پایانی، ثابت چیگر یک گراف، مسائل هم‌محیطی، حلّ آن‌ها و رابطه‌ی میان مقادیر ویژه‌ی لاپلاسین و ثابت چیگر معرّفی می‌شوند.

فهرست

مقدمه

نظریه‌ی طیفی گراف تاریخچه‌ای طولانی دارد. در ابتدا، نظریه‌ی ماتریس‌ها و جبر خطی برای تحلیل ماتریس مجاورت گراف‌ها به‌کار گرفته می‌شد. البته این ابزارهای جبری تنها برای مطالعه‌ی گراف‌های منتظم و متقارن مفید هستند. به سبب استفاده از روش‌های جبری گاهی برخی مقادیر ویژه به‌عنوان «رابط جبری» یک گراف مورد رجوع واقع می‌شوند.

در ده سال اخیر، بسیاری از پیشرفت‌ها در نظریه‌ی طیفی گراف جنبه‌ی هندسی داشته است. برای مثال، کارهای لوبوتزکی[۱]، فیلیپس[۲]، سرنک[۳]، و مارگولیس[۴] بر پایه‌ی مقادیر ویژه و خواص هم‌محیطی گراف‌ها قرار دارند ([۱٦] و [۱۷] را ببینید). مشابه گسسته‌ی نامساوی چیگر[۵] در مطالعه‌ی قدم‌زدن‌های تصادفی و زنجیرهای مارکف[٦] به وسعت به‌کار رفته است ([۱۸] را ببینید). روش‌های طیفی جدید پدید آمده برای کار با گراف‌های عمومی بسیار قدرت‌مند و مناسب هستند. از این منظر می‌توان گفت نظریه‌ی طیفی گراف وارد مرحله‌ی جدیدی شده است.

یکی از اهداف مهم نظریه‌ی گراف استنتاج ویژگی‌های اصلی یک گراف و ساختار آن از روی طیف (یا یک سری از ناورداهای سهل‌الوصول) گراف است، درست همان‌گونه که ستاره‌شناسان طیف ستاره‌ای را برای تعیین جنس ستارگان دور مطالعه می‌کنند. این کار همان رهیافت طیفی برای مطالعه‌ی گراف است. خواهیم دید که مقادیر ویژه تقریباً با همه‌ی ناورداهای اصلی گراف ارتباط نزدیک داشته و یک خاصیت را به دیگری مربوط می‌سازد. بدون تردید مقادیر ویژه در درک بنیادین ما از گراف‌ها نقش محوری ایفا می‌کنند.

مطالعه‌ی مقادیر ویژه‌ی گراف‌ها به مرور ارتباط‌های گسترده و عمیقی با سایر زمینه‌های ریاضیات برقرار می‌کند. یکی از پیشرفت‌های مهم، برقراری ارتباط میان نظریه‌ی طیفی گراف و هندسه‌ی دیفرانسیل است. تشابه جالبی بین هندسه‌ی طیفی ریمانی و نظریه‌ی طیفی گراف وجود دارد. مفاهیم و روش‌های هندسه‌ی طیفی ابزارهای مفید و بینش قاطعی را برای مطالعه‌ی مقادیر ویژه‌ی گراف‌ها به‌دست می‌دهد. نظریه‌ی طیفی گراف نیز به

---

[۱] Lubotzky
[۲] Phillips
[۳] Sarnak
[۴] Margulis
[۵] Cheeger
[٦] Markov

نوبه‌ی خود به جهت‌گیری‌ها و نتایج جدیدی در هندسه‌ی طیفی منجر می‌شود. روش‌های طیفی جبری نیز به‌ویژه برای مثال‌ها و ساختارهای خاص بسیار مفیداند.

از آغاز، نظریه‌ی طیفی گراف کاربردهایی در شیمی داشته است ([۱۹] را ببینید). مقادیر ویژه با پایداری مولکول‌ها در ارتباط بودند. هم‌چنین طیف گراف به‌طور طبیعی در بسیاری از مسائل فیزیک نظری و مکانیک کوانتومی، مثلاً در کمینه کردن انرژی سیستم‌های همیلتونی ظاهر می‌شود. پیشرفت اخیر در مورد گراف‌های بسط‌دهنده[۷] و مقادیر ویژه از مسائل شبکه‌های ارتباطی نشأت گرفته است. گسترش نظریه‌ی زنجیرهای مارکف ارتباط تنگاتنگی با الگوریتم‌های تقریب تصادفی دارد. به‌طور کلی می‌توان گفت مقادیر ویژه‌ی گراف در زمینه‌های متعدد و به صورت‌های گوناگون کاربرد دارد.

مسئله‌ی اصلی هم‌محیطی برای گراف عبارت است از حذف کمترین تعداد یال ممکن از گراف به‌طوری‌که یک زیرمجموعه از رئوس گراف با اندازه‌ی مطلوب را جدا کند. در این‌جا منظور از اندازه یک زیرمجموعه از رئوس، می‌تواند تعداد رئوس، تعداد یال‌هایا یک اندازه‌ی مناسب تعریف شده‌ی دیگر روی گراف باشد. یک حالت معمول، حذف کمترین تعداد یال‌ها است که گراف را به دو بخش تقریباً هم‌اندازه تقسیم می‌کند. چنین مسائلی معمولاً مسائل جداسازی نامیده می‌شوند و به‌خصوص در زمینه‌هایی از قبیل الگوریتم‌های بازگشتی، طراحی شبکه، و موازی‌سازی کامپیوترها مطرح می‌گردند ([۲۰] را ببینید).

در یک گراف، زیرمجموعه‌ای از یال‌ها که گراف را ناهمبند می‌کند یک برش نامیده می‌شود. برش‌ها به‌طور طبیعی در مطالعه‌ی همبندی گراف‌هایی مطرح می‌شوند که در آن اندازه‌ی بخش‌های ناهمبند اهمیتی ندارد. مسائل هم‌محیطی ارتباط بهینه میان اندازه‌ی برش و اندازه‌ی بخش‌های جدا شده را مطالعه می‌کند. نام‌های بسیاری از جمله رسانایی یک گراف، عدد هم‌محیطی و غیره برای صورت‌های مختلف مسائل هم‌محیطی به‌کار می‌روند. همه‌ی مفاهیم کاملاً مشابه هستند، امّا تفاوت‌ها مربوط به تغییر تعاریف برش و اندازه می‌باشد.

دو نوع برش را در نظر می‌گیریم. یک برش رأسی مجموعه‌ای از رئوس است که حذف آن گراف را ناهمبند می‌کند. به‌طور مشابه، یک برش یالی مجموعه‌ای از یال‌ها است که با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود. سایز یک زیرمجموعه از رئوس بستگی به تعداد رئوس یا تعداد یال‌ها دارد. بنابراین چندین ترکیب وجود دارد.

به‌طور نادقیق می‌توان گفت مسائل هم‌محیطی که با برش‌های یالی سروکار دارند به‌طور طبیعی متناظر با ثابت‌های چیگر در هندسه‌ی طیفی هستند. فرمول‌گذاری‌ها و روش‌های اثبات نیز بسیار مشابه می‌باشند.

[۷] expander graphs

ثابت‌های چیگر در تز چیگر مطالعه شدند، ولی می‌توان آن‌ها را در کارهای پولیا[۸] و زگو[۹] ردیابی کرد ([۲۲] را ببینید). ما از این سنّت پیروی کرده و نسخه‌ی گسسته را نیز با همان اسامی، یعنی ثابت چیگر و نامساوی‌های چیگر نام‌گذاری می‌کنیم.

فصل اوّل این پایان‌نامه، مربوط به مفاهیم مقدّماتی می‌باشد. در این فصل، ابتدا در بخش اوّل به بیان تعاریف و قضایایی از نظریه‌ی گراف می‌پردازیم. سپس به‌طور مختصر راجع به کارهای قدیمی‌تری که در نظریه‌ی طیفی گراف انجام شده، یعنی طیف ماتریس مجاورت گراف و ارتباط آن با برخی از خواص گراف را توضیح خواهیم داد. بخش دوم این فصل به مفاهیم آنالیزی و هندسی مرتبط اختصاص دارد. در این بخش ابتدا به بیان مفاهیمی از نظریه‌ی اندازه می‌پردازیم. سپس راجع به فضای احتمال و نظریه‌ی ارگودیک مطالبی را بیان می‌کنیم که در فصول بعد ارتباطشان با مفاهیم مشابه گسسته روشن خواهد شد. پس از آن راجع به فضای هیلبرت و عملگرهای روی آن صحبت خواهیم کرد و عملگر لاپلاسین در حالت پیوسته را معرّفی خواهیم نمود. همان‌طور که بعداً دیده می‌شود ارتباطی بسیار نزدیک با مشابه گسسته‌ی آن دارد. در انتها نیز به بیان مسائل هم‌محیطی در هندسه و معرّفی ثابت چیگر خواهیم پرداخت.

در فصل دوم ابتدا لاپلاسین یک گراف را تعریف کرده و سپس فرمول‌هایی برای محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی آن ارائه داده و بخش اوّل این فصل را با محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی چند گراف خاص به پایان می‌بریم. در بخش دوم این فصل کران‌هایی برای مقادیر ویژه پیدا می‌کنیم، در واقع ملاحظه می‌کنیم که مقادیر ویژه‌ی یک گراف در فاصله‌ی $[0,2]$ قرار دارند. در این بخش هم‌چنین خواهیم دید که شرط لازم و کافی برای همبندی گراف آن است که چندبارگی مقدار ویژه‌ی صفر برابر یک باشد. هم‌چنین شرط لازم و کافی برای دوبخشی بودن گراف آن است که چندبارگی مقدار ویژه‌ی 2 برابر تعداد مؤلّفه‌های همبندی گراف باشد. آخرین بخش این فصل نیز اختصاص به معرّفی گراف وزن‌دار و تعمیم تعاریف و قضایای بیان شده برای آن‌ها دارد.

در فصل سوم به معرّفی قدم‌زدن‌های تصادفی و برخی شرط‌های ارگودیک بودن آن می‌پردازیم، به‌طور دقیق‌تر خواهیم دید که روی یک گراف می‌توان قدم‌زدن تصادفی ارگودیک تعریف کرد اگر و تنها اگر همبند بوده و دوبخشی نباشد. در بخش بعدی این فصل رابطه‌ی میان مقادیر ویژه‌ی یک گراف و تقریب به حالت توزیع پایدار در یک قدم‌زدن تصادفی مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین مفاهیم قوی‌تری از همگرایی نسبت به همگرایی در نرم L_2 را معرّفی خواهیم کرد.

---

[۸] Polyá
[۹] Szegö

سرانجام در فصل چهارم به طرح چند مسئله‌ی هم‌محیطی و معرّفی ثابت چیگر و ثابت چیگر تغییریافته برای گراف پرداخته و نشان خواهیم داد که از طریق یافتن این ثابت، می‌توان مسائل هم‌محیطی را حل کرد. در بخش دوم این فصل نامساوی هم‌محیطی را معرّفی و اثبات می‌کنیم. این نامساوی که کران بالا و پایینی برای کوچکترین مقدار ویژه‌ی غیرصفر گراف ارائه می‌دهد، به‌صورت $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1 \leq 2h_G$ می‌باشد که در آن λ_1 کوچکترین مقدار ویژه‌ی گراف و h_G ثابت چیگر این گراف است. در بخش بعد، برای λ_1 یک کران بالا برحسب ثابت چیگر تغییریافته g_G ارائه می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که g_G^2 یک کران پایین برای λ_1 نمی‌باشد. سرانجام در بخش آخر این فصل، فرمول دیگری برای ثابت چیگر ارائه می‌دهیم. در ادامه‌ی این بخش دو مسئله‌ی هم‌محیطی دیگر را مطرح می‌کنیم. هم‌چنین با در نظر گرفتن تعداد رئوس یک مجموعه به‌جای حجم آن به‌عنوان سایز مجموعه، ثابت چیگر تغییریافته‌ی دیگری را معرّفی می‌کنیم که تعیین آن معادل با حلّ این مسائل اخیر است.

مرجع اصلی این پایان‌نامه، [۲] می‌باشد.

فصل اول

مفاهیم مقدّماتی

۱.۱ تعاریف و قضایایی از نظریه‌ی گراف

۱.۱.۱ مفاهیم اوّلیّه

گراف G سه‌تایی مرتّب $(V(G), E(G), \psi_G)$ است که در آن $V(G)$ مجموعه‌ی ناتهی رأس‌ها، $E(G)$ مجموعه‌ی یال‌ها و ψ_G تابع وقوع است که با هر یال G یک جفت نامرتّب (نه لزوماً مجزّا) از رأس‌های G را همراه می‌کند. دو رأس را **مجاور**[۱] گوییم هرگاه بین آن دو رأس یال وجود داشته باشد. اگر رأسی با خودش یال داشته باشد، آن یال را **طوقه**[۲] می‌نامیم. هرگاه بین دو رأس بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن یال‌ها را یال‌های **موازی**[۳] می‌نامیم. گراف را **ساده**[۴] گوییم هرگاه طوقه و یال موازی نداشته باشد. تعداد رئوسی که با یک رأس مجاورند

[۱] adjacent
[۲] loop
[۳] parallel
[۴] simple

درجه[5]ی آن رأس خوانده می‌شود. بیشترین درجه‌ی رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کمترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهند. **درجه‌ی متوسّط**[6] گراف G را که با $d(G)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(G) = \frac{1}{|V|}\sum_{v\in V} d_v.$$

به‌روشنی داریم

$$\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G).$$

رأسی که با هیچ رأس دیگری مجاور نیست را **رأس تنها**[7] می‌نامند.

اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$، آن‌گاه G' را یک **زیرگراف**[8] G می‌نامند و می‌نویسند $G' \subseteq G$. اگر $G' \subseteq G$ و هر دو رأسی از V' که در G مجاوراند در G' هم مجاور باشند، گوییم G' یک **زیرگراف القایی**[9] G است.

اگر اشتراک G و G' تهی باشد، گرافی را که از اتّصال هر رأس G به همه‌ی رئوس G' به‌وجود می آید **الحاق**[10] G و G' نامیده و با $G \vee G'$ نمایش می‌دهند.

مسیر[11] به طول k بین دو رأس v_0 و v_k که با P_k نشان می‌دهیم عبارت است از دنباله‌ی $v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_kv_k$ که در آن برای هر i، $1 \leq i \leq k$، v_i عضوی از مجموعه‌ی رئوس G و e_i عضوی از مجموعه‌ی یال‌های G است و v_{i-1} و v_i دو انتهای e_i هستند. اگر $W = v_0e_1v_1\ldots e_kv_k$ و $W' = v_ke_{k+1}v_{k+1}\ldots e_lv_l$ دو مسیر باشند، مسیر $v_ke_kv_{k-1}e_{k-1}\ldots e_1v_0$ را که از وارون کردن ترتیب W به‌دست می آید با W^{-1} و مسیر $v_0e_1v_1\ldots e_lv_l$ را که از پیوند W و W' در v_k به‌دست می‌آید با WW' نشان می‌دهیم. بخشی از مسیر $W = v_0e_1v_1\ldots e_kv_k$ مسیری است که زیردنباله‌ی $v_ie_{i+1}v_{i+1}\ldots e_jv_j$ از جمله‌های متوالی W است؛ این زیردنباله را **بخش** (v_i, v_j)[12]ی W می‌نامیم.

---

[5] degree

[6] average degree

[7] isolated vertex

[8] subgraph

[9] induced subgraph

[10] join

[11] path

[12] $(v_i, v_j) - section$

منظور از یک **دور** [۱۳] مسیری است که دو انتهای آن یکی باشد و دوری شامل n رأس با C_n نشان داده می‌شود.

گزاره ۱.۱.۱ هر گراف G شامل مسیری به طول $\delta(G)$ و دوری به طول حدّاقل $\delta(G)+1$ می‌باشد (به این شرط که $\delta(G) \geq 2$).

برهان. [۱] را ببینید. □

G یک **گراف همبند** [۱۴] است هرگاه بین هر دو رأس G حدّاقل یک مسیر موجود باشد. اگر مجموعه‌ی رئوس گراف G را به چند قسمت افراز کنیم به‌طوری‌که هیچ دو رأسی از دو بخش متمایز مجاور نبوده و هر قسمت همبند باشد، آن‌گاه هر بخش را یک **مؤلّفه‌ی همبندی** [۱۵] G می‌نامیم.

زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی رئوس یک گراف که با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود را یک **برش رأسی** [۱۶] گراف و کوچکترین زیرمجموعه با این خاصیت را **برش رأسی مینیمال** می‌نامند. به همین ترتیب، زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی یال‌های یک گراف که با حذف آن گراف ناهمبند می‌شود را یک **برش یالی** [۱۷] گراف و کوچکترین زیرمجموعه با این خاصیت را **برش یالی مینیمال** گراف می‌نامند. اگر با حذف یک رأس گراف ناهمبند شود آن رأس را **رأس برشی** [۱۸] و اگر با حذف یک یال گراف ناهمبند شود آن یال را **یال برشی** [۱۹] می‌نامند.

گراف همبندی را که فاقد دور باشد، **درخت** [۲۰] می‌نامند.

قضیه ۲.۱.۱ برای هر گراف T، عبارات زیر هم‌ارزاند:

i) T یک درخت است.

ii) بین هر دو رأس T، یک و تنها یک مسیر وجود دارد.

iii) T همبند مینیمال است، یعنی T همبند است ولی با حذف هر یال، T ناهمبند می‌شود، یعنی همه‌ی یال‌های

[۱۳] cycle
[۱۴] connected graph
[۱۵] connected component
[۱۶] vertex cut
[۱۷] edge cut
[۱۸] cut vertex
[۱۹] cut edge
[۲۰] tree

T یال برشی هستند.

$(iv$ T فاقد دور است، ولی با اضافه کردن هر یال $\{x,y\} \notin T$ به T که $x,y \in V(T)$، یک دور به‌وجود می آید.

برهان. [۱] را ببینید. $\square$

طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس u و v را **فاصله**[۲۱]ی بین آن دو رأس می نامیم و آن را با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند که به‌ازای آن‌ها داریم $d(u,v) = \max\{d(x,y) | x,y \in V(G)\}$، دراین‌صورت $d(u,v)$ **قطر**[۲۲] گراف G نامیده می‌شود.

گراف k—منتظم[۲۳] گرافی است که درجه‌ی هر رأس آن k باشد. گراف n رأسی $(n-1)$—منتظم را **گراف کامل**[۲۴] نامیده و آن‌را با K_n نشان می‌دهیم.

G را یک **گراف دوبخشی**[۲۵] گوییم اگر بتوان مجموعه‌ی رئوس G را به دو بخش افراز کرد به‌طوری‌که هیچ دو رأسی از یک بخش با هم مجاور نباشند. G را گراف **دوبخشی کامل** گوییم هرگاه G دوبخشی بوده و هر رأس از هر بخش با همه‌ی رئوس بخش دیگر مجاور باشد. اگر G دوبخشی کامل بوده و در یک بخش m و در بخش دیگر n رأس داشته باشد، G را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۱.۱ گراف G دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

برهان. فرض کنید G دوبخشی با بخش‌های X و Y و $C = v_0v_1 \ldots v_kv_0$ دوری از G باشد. بدون کاستن از کلّیّت مطلب، فرض می‌کنیم $v_0 \in X$. پس چون v_0 و v_1 مجاوراند و G دوبخشی است داریم $v_1 \in Y$. به همین ترتیب داریم $v_2 \in X$ و در حالت کلّی داریم $v_k \in X$ اگر k زوج و $v_k \in Y$ اگر k فرد باشد. پس چون $v_k \in Y$، k باید فرد باشد و در نتیجه C یک دور زوج است.

به وضوح کافی است عکس مطلب را برای گراف‌های همبند ثابت کنیم. فرض کنید G گرافی همبند باشد

[۲۱] distance

[۲۲] diameter

[۲۳] k-regular graph

[۲۴] complete graph

[۲۵] bipartite graph

که شامل دور فرد نیست. رأس دلخواه u را انتخاب می‌کنیم و $V(G)$ را به ترتیب زیر به دو بخش X و Y افراز می‌کنیم:

$$X = \{x \in V(G) | \text{زوج است } d(u,x)\}$$

$$Y = \{y \in V(G) | \text{فرد است } d(u,y)\}.$$

نشان می‌دهیم X و Y، $V(G)$ را طوری افراز می‌کنند که طبق تعریف، G دوبخشی می‌شود. کافی است نشان دهیم هیچ دو رأسی از X و هیچ دو رأسی از Y مجاور نیستند. دو رأس دلخواه v و w از X را در نظر می‌گیریم. گیریم P کوتاهترین مسیر (u,v) و Q کوتاهترین مسیر (u,w) باشند. آخرین رأس مشترک P و Q را با u_1 نشان می‌دهیم. چون P و Q کوتاهترین مسیرها هستند، بخش (u,u_1) مربوط به هر دو مسیر P و Q، کوتاهترین مسیر از u به u_1 است، و بنابراین دارای طول یکسان‌اند. از طرفی چون طول‌های هر دو مسیر P و Q زوج‌اند، طول‌های P_1 که بخش (u_1,v) از P و Q_1 که بخش (u_1,w) از Q هستند باید هر دو با هم زوج یا فرد باشند. در نتیجه $P_1^{-1}Q_1$ که مسیر (v,w) است، طولش زوج است. اگر v به w وصل باشد، $P_1^{-1}Q_1wv$ دوری با طول فرد است، که خلاف فرض است. بنابراین هیچ دو رأسی در X مجاور نیستند؛ به طریق مشابه می‌توان نشان داد هیچ دو رأسی در Y مجاور نیستند و به این ترتیب اثبات تمام است. □

زیرمجموعه‌ی M از یال‌های گراف G را یک **تطابق**[۲۶] در G نامند هرگاه اعضای آن طوقه نبوده و هیچ دو عضوی از آن در G مجاور نباشند.

ستاره S_n گرافی است n رأسی که در آن درجه‌ی یک رأس $n-1$ و درجه‌ی بقیه‌ی رئوس 1 است. n**—مکعب** Q_n گرافی است که از وصل کردن رئوس متناظر دو گراف Q_{n-1} تشکیل می‌شود. امّا Q_1 عبارت است از گراف تک رأسی.

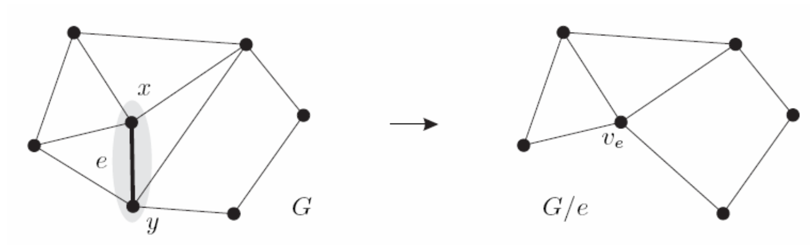
مطالب این زیربخش از مراجع [۱] و [۱۳] گرفته شده است.

۲.۱.۱ انقباض یالی و کهاد

فرض کنید $G=(V,E)$ و $e=\{x,y\} \in E(G)$. منظور از G/e گرافی است که از انقباض یال e به رأس v_e و اتّصال آن به رئوسی که در G با x و y مجاور بودند به‌وجود می آید.

به‌طور کلّی‌تر، اگر X گرافی دیگر و $\{V_x | x \in V(X)\}$ افرازی از V به زیرمجموعه‌های همبند باشد به‌طوری‌که

[۲۶] matching



شکل ۱—۱انقباض یال $e = \{x, y\}$

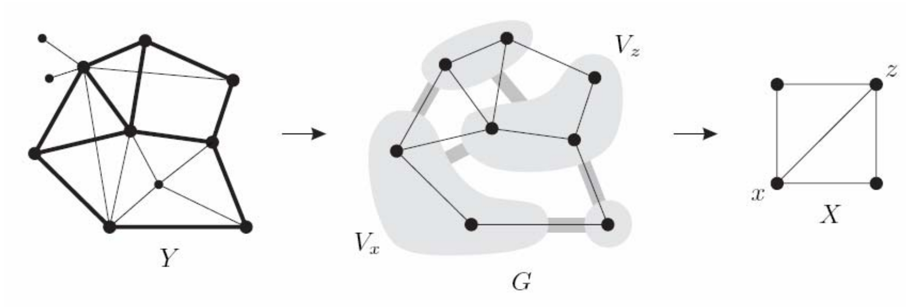
برای هر دو رأس x و y از X، یک $V_x - V_y$ یال (یالی که یک سر آن در V_x و سر دیگر آن در V_y است) در G وجود داشته باشد اگر و تنها اگر $\{x, y\} \in E(X)$، X را یک انقباض یالی[۲۷] از گراف G نامیده و می‌نویسیم $G = MX$. مجموعه‌های V_x، **مجموعه‌های شاخه‌ای**[۲۸] این MX نامیده می‌شوند. به‌طور شهودی، می‌توان X را از G با انقباض هر مجموعه‌ی شاخه‌ای به یک رأس و حذف همه‌ی یال‌های موازی و طوقه‌های به‌وجود آمده‌ی احتمالی، به‌دست آورد. اگر $V_x = U \subseteq V$ یکی از مجموعه‌های شاخه‌ای اشاره شده در بالا و هر مجموعه‌ی شاخه‌ای دیگر متشکّل از یک رأس باشد، می‌توان به‌جای گراف X، G/U و به‌جای رأس $x \in X$ که U به آن منقبض شده، v_U را به‌کار برد و بقیه‌ی X را یک زیرگراف القایی G در نظر گرفت. دراین‌صورت انقباض یال $\{u, u'\}$ که قبلاً تعریف شد می‌تواند به‌عنوان حالت خاص $U = \{u, u'\}$ در نظر گرفته شود.

گزاره ۴.۱.۱ G یک MX است اگر و تنها اگر X با یک سری انقباض‌های یالی G به‌دست آید، یعنی گراف‌های $G_0, \ldots, G_n$ و یال‌های $e_i \in E(G_i)$ موجود باشند به‌طوری‌که $G_0 = G$، $G_n = X$، و برای هر i، $i < n$، $G_{i+1} = G_i / e_i$.

برهان. [۱] را ببینید. □

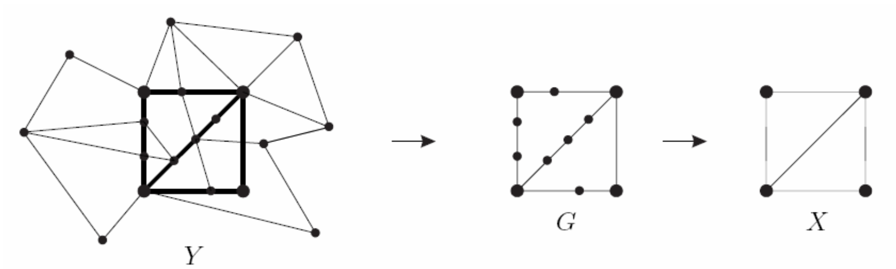
اگر $G = MX$ یک زیرگراف از گراف دیگری مانند Y باشد، X را یک **کهاد**[۲۹] Y می‌نامند (شکل ۱—۲). توجّه کنید که هر زیرگراف یک گراف، یک کهاد آن هم هست، به‌خصوص هر گرافی کهاد خودش است. اگر گراف G از جایگزینی یال‌های X با مسیرهای مستقل بین دو انتهای‌شان حاصل شود، به‌طوری‌که هیچ‌یک از این مسیرها رأس داخلی روی مسیر دیگر و یا در X نداشته باشند، G را یک **زیرتقسیم**[۳۰] X نامیده و می‌نویسند

[۲۷] edge contraction
[۲۸] branch sets
[۲۹] minor
[۳۰] subdivision



شکل ۱—۲ $MX = G \subseteq Y$، و در نتیجه X یک کهاد Y است

$G = TX$. اگر $G = TX$ زیرگرافی از گراف دیگر Y باشد، آن‌گاه X را یک **کهاد توپولوژیکی**[۳۱] Y می‌نامند (شکل ۱—۳).



شکل ۱—۳ $TX = G \subseteq Y$، و در نتیجه X یک کهاد توپولوژیکی Y است

گزاره ۵.۱.۱ i) هر TX، یک MX نیز هست؛ بنابراین، هر کهاد توپولوژیکی یک گراف، کهاد خود نیز هست.

ii) اگر $\Delta(X) \leq 3$، آن‌گاه هر MX شامل یک TX است.

برهان. [۱] را ببینید. □

رابطه‌ی کهاد بودن و کهاد توپولوژیکی بودن، روی کلاس گراف‌های متناهی، یک رابطه‌ی مرتّب جزئی[۳۲] است، یعنی این دو رابطه، انعکاسی، پادمتقارن، و ترایایی هستند.

مطالب این زیربخش از مرجع [۱] گرفته شده‌اند.

[۳۱] topological minor

[۳۲] partially ordered

۳.۱.۱ گراف‌های وزن‌دار

تعریف ۶.۱.۱ منظور از یک گراف وزن‌دار فاقد جهت[۳۳] (احتمالاً دارای حلقه) گرافی است مانند G به همراه تابع وزن $w : V \times V \to \mathbb{R}$ که اولاً متقارن بوده و ثانیاً نامنفی باشد، یعنی برای هر دو رأس u و v داریم

$$w(u,v) = w(v,u)$$

$$w(u,v) \geq 0.$$

هم‌چنین اگر $u \nsim v$ آن‌گاه $w(u,v) = 0$.

به گرافی که در آن w فقط مقادیر 0 و 1 را اختیار کند **گراف بی‌وزن**[۳۴] می گوییم.

برای گراف وزن‌دار G درجه‌ی رأس v به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_v = \sum_u w(u,v).$$

مطالب این زیربخش برگرفته از مرجع [۲] می‌باشند.

۴.۱.۱ انقباض رأسی گراف‌های وزن‌دار

منظوراز یک انقباض رأسی از گراف G، گرافی مانند G^* است که با یکی کردن دو رأس مجزّای u و v و وصل کردن آن به همه‌ی رئوسی که u و v با آن‌ها مجاور هستند ایجاد می‌شود.

همان‌طور که دیده می‌شود تفاوت انقباض یالی و رأسی در این است که انقباض یالی طوقه‌ها و یال‌های موازی را از بین می‌برد، درحالی‌که انقباض رأسی چنین نیست.

اگر رأسی را که از یکی کردن u و v پدید آمده v^* بنامیم، وزن یال‌های خارج شده از v^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(x,v^*) = w(x,u) + w(x,v)$$

$$w(v^*,v^*) = w(u,u) + w(v,v) + 2w(u,v).$$

[۳۳] undirected weighted graph

[۳۴] unweighted graph

مطالب این زیربخش از مرجع [۲] گرفته شده‌اند.

۵.۱.۱ ماتریس مجاورت یک گراف

برای هر گراف می‌توان ماتریس‌های مختلفی تعریف کرد. یکی از مهم‌ترین این ماتریس‌ها، ماتریس مجاورت است. فرض کنید G گرافی با مجموعه‌ی رئوس $\{v_1, \ldots, v_n\}$ باشد. **ماتریس مجاورت**[۳۵] G که با $A(G)$ نشان داده می‌شود ماتریسی $n \times n$ است که مؤلّفه‌ی (i,j)—ام آن برابر است با تعداد یال‌هایی که رئوس v_i و v_j را به یکدیگر متّصل می‌کند ([۴] را ببینید).

مثال ۷.۱.۱ فرض کنید G گرافی باشد با مجموعه‌ی رئوس $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و مجموعه‌ی یال‌های $\{\{v_1, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$. ماتریس مجاورت این گراف به‌صورت زیر است:

$$A(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دیده می‌شود که ماتریس مجاورت گراف دوبخشی که یک بخش آن m رأس و بخش دیگر n رأس دارد به‌شکل بلوکی زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{m\times m} & B_{m\times n} \\ C_{n\times m} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

برای گراف G، یک **قدم‌زدن**[۳۶] دنباله‌ای از رئوس $(v_0, \ldots, v_s)$ با $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ برای هر i، $1 \leq i \leq s$ است ([۲] را ببینید).

فرض کنید G گرافی با مجموعه‌ی رئوس $\{v_1, \ldots, v_n\}$، A ماتریس مجاورت آن و k عددی صحیح و مثبت باشد. دراین‌صورت درایه‌ی (i,j)—ام ماتریس A^k تعداد قدم‌زدن‌های از v_i به v_j به طول k است ([۴] را ببینید).

از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت که اگر G گرافی n رأسی و همبند و A ماتریس مجاورت آن باشد، برای هر i و j، $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$، عدد صحیح مثبت s موجود است به‌طوری‌که درایه‌ی (i,j)—ام ماتریس A^s مثبت است.

[۳۵] adjacency matrix

[۳۶] walk

هم‌چنین اگر G گرافی با k مؤلّفه‌ی همبندی باشد، ماتریس مجاورت آن به‌شکل بلوکی زیر است:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

که در آن A_1 تا A_k به‌ترتیب ماتریس مجاورت مؤلّفه‌های همبندی اوّل تا k–ام هستند.

اگر برای ماتریس $T_{n\times n}$ و ماتریس ستونی f داشته باشیم $Tf = cf$، آن‌گاه c را یک **مقدار ویژه**[۳۷]ی ماتریس T می‌نامند. مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس نیز **طیف**[۳۸] آن ماتریس نامیده می‌شود. هم‌چنین f را که می‌توان یک بردار در نظر گرفت یک **بردار ویژه**[۳۹] نظیر c نامیده و بعد فضای بردارهای ویژه‌ی نظیر c را **چندبارگی**[۴۰] مقدار ویژه‌ی c می‌نامند.

دو قضیه‌ی زیر و برهان آن‌ها در مرجع [۳] آمده‌اند.

قضیه ۸.۱.۱ اگر G یک گراف ساده‌ی k–منتظم با ماتریس مجاورت A باشد، آن‌گاه داریم

i) k یک مقدار ویژه‌ی A است.

ii) اگر G همبند باشد، چندبارگی مقدار ویژه‌ی k، 1 است.

iii) برای هر مقدار ویژه‌ی λ از A داریم $|\lambda| \leq k$.

قضیه ۹.۱.۱ اگر G گرافی ساده باشد، آن‌گاه عبارات زیر معادل‌اند:

i) G دوبخشی است.

ii) اگر Λ بزرگترین مقدار ویژه‌ی G باشد، $-\Lambda$ نیز یک مقدار ویژه‌ی آن است.

iii) طیف G نسبت به مبداء متقارن است.

در این زیربخش از مراجع [۲] و [۳] و [۴] استفاده شده است.

---

[۳۷] eigenvalue

[۳۸] spectrum

[۳۹] eigen function

[۴۰] multiplicity