به نام آنکه

بودنمان

یادی از اوست

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

مرکز تهران

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

طرح‌های متقاطع بهین

پژوهش‌گر: سودابه مختاری

استاد راهنما: دکتر عباس گرامی

استاد مشاور: دکتر مسعود یارمحمدی

بهمن ماه ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی طرح‌های متقاطعی با دو دوره و چهار گروه دنباله‌ای، سه دوره و دو، چهار و شش گروه دنباله‌ای و چهار دوره و دو، چهار و شش گروه دنباله‌ای می‌پردازیم که در آن‌ها هر واحد آزمایشی دو تیمار مختلف را دریافت می‌کند. هدف از بررسی این طرح‌ها مشخص کردن طرح بهینه‌ی دو تیماری است. بدین منظور براوردهای کمترین توان‌های دوم اثرهای مختلف را محاسبه کرده و بر اساس ملاک A-بهینگی آن‌ها را مقایسه کرده و بهترین طرح دو تیماری را انتخاب می‌کنیم. لازم به ذکر است که به منظور مقایسه‌ی طرح‌ها، معمولا فرض می‌کنیم که اثرهای واحد آزمایشی اثرهایی ثابت و خطاهای درون واحدی متغیرهایی مستقل با میانگین صفر و واریانس σ^2 باشند.

واژه‌های کلیدی: طرح اندازه‌های تکراری، طرح متقاطع، اثر منقول، A-بهینگی، طرح بهینه

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ مفاهیم مفید ۲

۱-۳ روند کار ۱۰

فصل دوم: طرح و تحلیل آزمون‌های اندازه‌های تکراری

۲-۱ مقدمه ۱۱

۲-۲ مزایا و معایب طرح‌های اندازه‌های تکراری ۱۲

۲-۳ نمادگذاری اندازه‌های تکراری ۱۳

۲-۴ روش‌های تحلیل اندازه‌های تکراری ۱۵

۲-۵ طرح و تحلیل آزمون‌های متقاطع ۲۷

فصل سوم: معیارهای بهینگی در طرح آزمایش

۳-۱ مقدمه ۶۶

۳-۲ ملاک‌های طرح ۶۸

فصل چهارم: طرح‌های متقاطع بهین

۴-۱ مقدمه ۶۹

۴-۲ طرح‌های بهین دو تیماری ۷۰

منبع‌ها ۸۹

فهرست جداول

عنوان **صفحه**

جدول ۲ . ۱	طرح کلی اندازه‌های تکراری	۱۴
جدول ۲ . ۲	طرح اندازه‌های تکراری برای حالت خاص چند نمونه‌ای	۱۵
جدول ۲ . ۳	طرح اندازه‌های تکراری برای حالت یک نمونه‌ای	۱۶
جدول ۲ . ۴	مجموع توان‌های دوم، درجه‌های آزادی، میانگین توان‌های دوم و میانگین توان‌های دوم مورد انتظار مدل تحلیل واریانس اندازه‌های تکراری یک نمونه‌ای	۲۱
جدول ۲ . ۵	مجموع توان‌های دوم، درجه‌های آزادی و میانگین توان‌های دوم مورد انتظار مدل تحلیل واریانس اندازه‌های تکراری یک نمونه‌ای شفه	۲۲
جدول ۲ . ۶	مجموع توان‌های دوم، درجه‌های آزادی و میانگین توان‌های دوم مورد انتظار مدل تحلیل واریانس اندازه‌های تکراری چند نمونه‌ای	۲۵
جدول ۲ . ۷	اثرهای ثابت در مدل کامل	۳۵
جدول ۲ . ۸	تحلیل واریانس مدل کامل: مجموع توان‌های دوم، درجه‌های آزادی	۴۲
جدول ۲ . ۹	تحلیل واریانس مدل کامل: میانگین توان‌های دوم مورد انتظار	۴۳
جدول ۲ . ۱۰	اندازه‌های FEV_1 داده‌های پاتل (۱۹۸۳)	۴۷
جدول ۲ . ۱۱	امید ریاضی پاسخ‌ها در هر گروه	۴۸
جدول ۲ . ۱۲	طرح ۲ . ۱	۵۳
جدول ۲ . ۱۳	امید ریاضی $\overline{y}_{ij.}$ برای مدل اثر متقابل مستقیم تیماری در منقول	۵۴
جدول ۲ . ۱۴	طرح ۱ . ۲ . ۳	۵۵
جدول ۲ . ۱۵	طرح ۲ . ۲ . ۳	۵۶
جدول ۲ . ۱۶	طرح ۳ . ۲ . ۳	۵۶
جدول ۲ . ۱۷	امید ریاضی $\overline{y}_{ij.}$ برای طرح ۱ . ۲ . ۳	۵۷
جدول ۲ . ۱۸	طرح ۱ . ۴ . ۳	۵۹
جدول ۲ . ۱۹	طرح ۲ . ۴ . ۳	۵۹

جدول ۲ . ۲۰ طرح ۳ . ۴ . ۳ ۵۹
جدول ۲ . ۲۱ طرح ۳ . ۶ . ۱ ۶۲
جدول ۲ . ۲۲ طرح ۴.۲ . ۱ ۶۳
جدول ۲ . ۲۳ طرح ۴.۲ . ۲ ۶۳
جدول ۲ . ۲۴ طرح ۴.۲ . ۳ ۶۳
جدول ۲ . ۲۵ طرح ۴.۲ . ۴ ۶۴
جدول ۲ . ۲۶ طرح ۴.۲ . ۵ ۶۴
جدول ۲ . ۲۷ طرح ۴.۲ . ۶ ۶۴
جدول ۲ . ۲۸ طرح ۴.۲ . ۷ ۶۴
جدول ۴ . ۱ طرح ۴ . ۱ ۷۱
جدول ۴ . ۲ طرح ۴ . ۲ ۷۱
جدول ۴ . ۳ طرح ۴ . ۳ ۷۱
جدول ۴ . ۴ طرح ۴ . ۴ ۷۲
جدول ۴ . ۵ طرح ۴ . ۵ ۷۲
جدول ۴ . ۶ طرح ۳ . ۲ . ۱ ۷۲
جدول ۴ . ۷ طرح ۳ . ۲ . ۲ ۷۳
جدول ۴ . ۸ طرح ۳ . ۲ . ۳ ۷۳
جدول ۴ . ۹ واریانس‌ها و کوواریانس‌های طرح‌های سه دوره‌ای (با مضرب‌های σ^2/n) ۷۳
جدول ۴ . ۱۰ طرح ۳ . ۴ . ۱ ۷۴
جدول ۴ . ۱۱ طرح ۳ . ۴ . ۲ ۷۵
جدول ۴ . ۱۲ طرح ۳ . ۴ . ۳ ۷۵
جدول ۴ . ۱۳ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/n) ۷۵
جدول ۴ . ۱۴ طرح ۳ . ۶ . ۱ ۷۶
جدول ۴ . ۱۵ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/N) ۷۷
جدول ۴ . ۱۶ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/N) ۷۷
جدول ۴ . ۱۷ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/N) با این فرض که اثر منقول یک تیمار به خودش صفر باشد ۷۸
جدول ۴ . ۱۸ طرح ۴ . ۲ . ۱ ۷۹

جدول ۴ . ۱۹ طرح ۴ . ۲ . ۲ ۷۹
جدول ۴ . ۲۰ طرح ۴ . ۲ . ۳ ۷۹
جدول ۴ . ۲۱ طرح ۴ . ۲ . ۴ ۷۹
جدول ۴ . ۲۲ طرح ۴ . ۲ . ۵ ۷۹
جدول ۴ . ۲۳ طرح ۴ . ۲ . ۶ ۸۰
جدول ۴ . ۲۴ طرح ۴ . ۲ . ۷ ۸۰
جدول ۴ . ۲۵ واریانس‌های اثرهای به دست آمده از طرح‌های ۴ . ۲ . ۱ تا ۴ . ۲ . ۷ (با مضرب‌های σ^2/n) ۸۰
جدول ۴ . ۲۶ طرح ۴ . ۴ . ۱۳ ۸۱
جدول ۴ . ۲۷ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/n) ۸۱
جدول ۴ . ۲۸ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/n) ۸۲
جدول ۴ . ۲۹ طرح ۴ . ۶ . ۱۳۶ ۸۲
جدول ۴ . ۳۰ طرح ۴ . ۶ . ۱۴۶ ۸۳
جدول ۴ . ۳۱ واریانس‌های اثرهای به دست آمده از طرح‌های ۴ . ۶ . ۱۳۶ و ۴ . ۶ . ۱۴۶ (با مضرب‌های σ^2/n) ۸۳
جدول ۴ . ۳۲ واریانس‌های اثرهای به دست آمده از طرح‌های ۴ . ۶ . ۱۳۶ و ۴ . ۶ . ۱۴۶ (با مضرب‌های σ^2/n) ۸۳
جدول ۴ . ۳۳ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/N) ۸۴
جدول ۴ . ۳۴ واریانس‌های براوردگرها (با مضرب‌های σ^2/N) ۸۵

فصل اول

تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

رونالد فیشر[1] بدعت‌گذار استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش است. طی چندین سال وی مسئول آمار و تحلیل داده‌های یک ایستگاه آزمایش کشاورزی در انگلیس بود. فیشر تحلیل واریانس را توسعه داد و نخست آن را به صورت روش عمده‌ی تحلیل آماری در طرح آزمایش به کار گرفت. هر چند فیشر به وضوح پیشگام بوده است، اما بسیاری از افراد دیگر از جمله یتس[2]، بوز[3]، کمپترن[4]، ککران[5]، باکس[6] (داگلاس سی. مونت‌گمری[7] (۱۹۹۱)) نیز در ادبیات طرح آزمایش صاحب اثر هستند.

بسیاری از کاربردهای اولیه‌ی طرح آزمایش، در علوم کشاورزی و زیست‌شناسی بوده است، و در نتیجه بسیاری از اصطلاحات آن از این علوم به ارث رسیده است. اما، به نظر می‌رسد که اولین کاربردهای صنعتی طرح آزمایش در اوایل سال ۱۹۳۰ در صنعت پشم‌بافی انگلستان بوده است. بعد از جنگ جهانی دوم، روش‌های طرح آزمایش در صنایع شیمیایی ایالات متحده‌ی آمریکا و اروپای غربی وارد شد. صنعت الکترونیک و نیمه‌هادیها نیز سال‌های زیادی است که با موفقیت قابل ملاحظه از روش‌های طرح آزمایش استفاده می‌کنند.

---

[1] Ronald Fisher
[2] F.Yates
[3] R.C.Bose
[4] O.Kempthorne
[5] W.G.Cochran
[6] G.E.P.Box
[7] Douglas C.Montgomery

در سال‌های اخیر در دنیا توجه زیادی به طرح آزمایش شده است، زیرا دیده شده است که در بسیاری از اختراعات صنعتی یک عامل مهم در رقابت مؤسسات، استفاده از طرح آزمایش است.

۱-۲ مفاهیم مفید

در این بخش برخی مفاهیم مفید به کار رفته در این پایان‌نامه را شرح داده و در پایان یکی از انواع معروف طرح‌های آزمایشی را معرفی می‌کنیم.

۱-۲-۱ آزمایش

یک آزمایش فرایندی است که به منظور به دست آوردن پاسخ، یک یا چند تیمار را به طور آگاهانه به گروهی از واحدهای آزمایشی منتسب می‌کند. لازم به ذکر است که آزمایش از یک مطالعه‌ی مشاهداتی، که شامل گرداوری و تحلیل کردن داده‌ها بدون تغییر دادن شرایط موجود می‌باشد، متفاوت است.

۱-۲-۲ تیمار

در آزمایش‌ها، تیمار چیزی است که پژوهش‌گران به واحدهای آزمایشی می‌دهند یا روی این واحدها اعمال می‌کنند. در واقع اصطلاح معمول آماری تیمارها اغلب برای رجوع به چیزهایی به کار می‌رود که مورد مقایسه واقع می‌شوند. تیمارها به وسیله سطوحی به واحدهای آزمایشی داده می‌شوند، که سطح ممکن است حاکی از مقدار یا نوع باشد.

۱-۲-۳ تکرار

انجام آزمون‌های آزمایش اصلی را تکرار می‌گویند. تکرار دو خاصیت مهم دارد. اول این‌که پژوهش‌گر را قادر می‌سازد که براوردی برای خطای آزمایشی به دست آورد. دومین خاصیت مهم تکرار آن است که مثلا، اگر برای براورد اثر سطحی از یک عامل، از میانگین نمونه استفاده کنیم، آن‌گاه تکرار موجب براوردی دقیق‌تر برای آن اثر می‌شود.

۱-۲-۴ عامل

انواع شرایط متمایزی که بر روی واحدهای آزمایشی اعمال می‌شوند را عامل می‌نامند. یک عامل یک متغیر مستقل کنترل شده است؛ متغیری که سطوح آن توسط آزمایش‌گر تعیین می‌شوند. قابل ذکر است که وجوه مختلفی از حضور یک عامل را سطوح عامل می‌نامند. انواع مختلفی از عامل‌ها وجود دارند که به قرار ذیل می‌باشند.

عامل تیماری

معمولا هدف اصلی آزمایش‌ها مقایسه‌ی عامل‌های تیماری است. یک عامل تیماری به وسیله‌ی دو ویژگی زیر مشخص می‌شود:

۱- یک پژوهش‌گر بتواند هر یک از واحدهای آزمایشی را به هر یک از سطوح عامل نسبت دهد.

۲- سطوح مختلف عامل به وضوح مشتمل بر شرایط قابل تشخیص در محیط واحد آزمایشی باشند.

عامل گروهی

عامل گروهی عاملی است که در آن واحدهای آزمایشی به طور تصادفی به یک گروه مفروض نسبت داده می‌شوند. لازم به ذکر است که هر گروه فقط از نظر واحدهای آزمایشی نسبت داده شده به آن از گروه‌های دیگر متفاوت می‌باشد. اگر هر گروه، به جز واحدهای آزمایشی نسبت داده شده به آن، یک ویژگی متمایز داشته باشد آن‌گاه آن دیگر به عنوان یک عامل گروهی در نظر گرفته نخواهد شد.

عامل بلوک‌بندی

بلوک‌بندی فنی است که برای افزایش دادن دقت آزمایش از آن استفاده می‌کنیم. استفاده از آن در آزمایش‌ها موجب می‌شود که علیرغم محدودیت‌های واقعی در انتخاب تصادفی واحدهای آزمایشی بتوانیم خطای آزمایش را کاهش دهیم. اصطلاح ((بلوک)) اشاره به متجانس بودن نسبی واحدهای مورد آزمایش دارد و محدودیت در تصادفی کردن کامل را نشان می‌دهد. در بسیاری از مسایل آزمایشی لازم است آزمایش به گونه ای طراحی شود که بتوان تغییرات حاصل از منابع خارجی را به روش معین کنترل کرد. مایلیم خطای آزمایشی را تا حد ممکن کم کنیم. یعنی، مایلیم تغییرپذیری بین واحدهای آزمایشی را از خطای آزمایش جدا کنیم. بلوک‌بندی فنی است که چنین خواسته‌ای را تأمین می‌کند.

عامل خطا

عامل خطا عاملی با مفاهیم عامل‌های قبلی نیست و در طرح آزمایش منظور نمی‌شود. این عامل برای بسط نظری بیشتر لازم است. معمولا به اثر جمعی سایر عامل‌ها که در کنترل آزمایش‌گر نیستند و دارای اثر ناچیز فرض می‌شوند عامل خطا گفته می‌شود.

عامل‌های ثابت و تصادفی

عامل ثابت

یک عامل ثابت است اگر:

۱- نتایج عامل فقط به سطوحی که در طرح آزمایش منظور شدند بسط داده شوند.

۲- برای انتخاب کردن سطوح عامل هر روشی مجاز باشد.

۳- اگر آزمایش تکرار شد، همان سطوح از آن عامل در آزمایش جدید منظور شوند.

عامل تصادفی

یک عامل تصادفی است اگر:

۱- نتایج عامل هم به سطوح منظور شده در طرح آزمایش و هم به سطوحی که منظور نشدند تعمیم داده شود. یعنی آزمایش‌گر خواستار تعمیم دادن نتایج به یک جامعه‌ی بزرگ‌تر از سطوح عاملی ممکن می‌باشد.

۲- سطوح عاملی به کار برده شده در آزمایش به وسیله‌ی یک روش تصادفی انتخاب شوند.

۳- اگر آزمایش تکرار شد، سطوح مختلف آن عامل در آزمایش جدید منظور شوند.

در بسیاری از موارد تعیین این‌که آیا یک عامل ثابت است یا تصادفی امکان‌پذیر نیست. به طور کلی، در صورت تردید که آیا یک عامل ثابت است یا تصادفی، آن را ثابت در نظر می‌گیریم.

رابطه‌ی بین عامل‌ها

بسیاری از طرح‌های مفید با دو رابطه‌ی متقاطع و تودرتو بین عامل‌ها توصیف می‌شوند. اکثر طرح‌های آزمایشی ممکن با طبقات توصیف شده به وسیله‌ی این دو رابطه متناسب هستند. ما در زیر فقط رابطه‌ی متقاطع بین عامل‌ها را شرح می‌دهیم.

رابطه‌ی متقاطع

هنگامی‌که دو عامل متقاطع هستند، هر سطح از یک عامل با هر سطح از عامل دیگر ظاهر می‌شود. برای مثال، دو عامل A و B که A جنس (a_1=مرد، a_2=زن) و B میزان کار (b_1=هیچی، b_2=یک ساعت، b_3=پنج ساعت و b_4=بیست ساعت) است، را در نظر بگیرید. اگر جنس با کار متقاطع بود، آن‌گاه هم زن‌ها و هم مردها در هر چهار سطح کار شرکت می‌کردند. در این مورد هشت گروه از واحدهای آزمایشی شامل: ab_{11}، مردهایی که بیکار هستند، ab_{12}، مردهایی که یک ساعت کار دارند و به همین ترتیب تا ab_{24}، زن‌هایی که بیست ساعت کار دارند، وجود خواهند داشت. اگر واحدهای آزمایشی با تیمارها متقاطع باشند، هر واحد آزمایشی هر سطح از شرایط تیماری را دریافت می‌کند. در یک آزمایش خیلی ساده شبیه اثرهای کافیین روی هوشیاری، هر واحد آزمایشی

هم در معرض یک شرط کافیین (a_1) و هم نبودن یک شرط کـافیین (a_2) قـرار داده خواهـد شـد. برای مثال، با استفاده از اعضای یک کلاس آمار به عنوان واحدهای آزمایشی، ممکن است آزمـایش به قرار ذیل انجام شود. در اولین روز آزمایش کلاس نصف می‌شود که نصف کلاس قهوه با کافیین و نصف دیگر قهوه بدون کافیین را دریافت می‌کنند. برای هر فرد یک مقدار هوشیاری، مثلا تعـداد خمیازه کشیدن‌ها در طول دوره‌ی کلاسی، انـدازه‌گیـری مـی‌شـود. در دومـین روز شـرایط عـوض می‌شوند، به عبارت دیگر، اکنون به افرادی که قهوه با کافیین را دریافت کردند قهـوه بـدون کـافیین داده می‌شود و بالعکس. ویژگی متمایز تقاطع واحدهای آزمایشی با تیمارها این است که هـر واحـد آزمایشی بیش از یک پاسخ خواهد داشت. بعضی اوقات از این ویژگی برای اشاره به این کـلاس از طرح‌ها به عنوان طرح‌های اندازه‌های تکراری[1] استفاده می‌شود.

تقاطع واحدهای آزمایشی با تیمارها دو مزیت دارد. اول این‌که، آن‌ها به طور کلی به واحـدهای آزمایشی کمتری نیاز دارند، چون هر واحد آزمایشی چندین مرتبه در آزمایش به کار برده می‌شـود. دوم این‌که، آن‌ها به احتمال زیاد منجر به یک اثر معنی دار می‌شوند.

تقاطع واحدهای آزمایشی با تیمارها عیوبی نیز دارد. اول این‌که، آزمایش‌گر باید نگـران اثرهـای باقیمانده باشد. مثلا، در مثال قبلی افرادی کـه در روز دوم قهـوه بـدون کـافیین را دریافـت کردنـد ممکن است، هنگامی‌که آن‌ها دارویی را دریافت نکردند، هنوز اثرهایی از کافیین را احـساس کننـد. دوم این‌که، ممکن است اولین اندازه‌های گرفته شده اندازه‌های دوم را تحت تأثیر قرار دهند. بـرای مثال، اگر اندازه‌ی مورد نظر نمره بر اساس یک آزمون آماری باشد، ممکن است پاسخ‌های مرحله‌ی دوم متأثر از پاسخ‌های مرحله‌ی اول باشند.

۱-۲-۵ فاکتوریل

در اکثر موارد لازم است بیش از یک عامل در آزمایش به کار برده شـوند و عـلاوه بـر اثـر یکایـک عامل‌های به کار رفته، اثرهای متقابل‌شان نیز مشخص شوند. چنین آزمایش‌هایی آزمایش‌های عاملی نامیده می‌شوند.

۱-۲-۶ طرح آزمایشی

نحوه‌ی انتساب واحدهای آزمایشی به تیمارها بسته به این‌که این واحدها همگی یکنواخـت باشـند یا نباشند متفاوت خواهد بود و این متفاوت بودن موجـب انتخـاب طـرح‌هـای آزمایـشی مختلفـی خواهد شد. طرح کاملا تصادفی، طرح بلوکی، و ... از جمله این موارد هستند.

---

[1] Repeated measurements

بدون وجود یک طرح آزمایش مناسب نمی‌توان فرض‌های بالقوه سودمند را با درجه‌ی قابل قبولی از دقت آزمود. قبل از رد کردن فرضی مربوط به زمینه‌ای تحقیقاتی، باید ساختار آزمایش را مورد بررسی قرار داد و اطمینان حاصل کرد که آزمایش، یک آزمون واقعی از فرض را فراهم می‌سازد.

اهداف آزمون می‌توانند شامل موارد زیر باشند:

۱- تعیین عامل‌هایی که بیشترین تأثیر را در پاسخ نتیجه‌ی آزمایش دارند.

۲- تعیین نوع یا کمیت عامل‌های مؤثر به طوری که تقریبا پاسخ همیشه نزدیک مقدار مطلوب اسمی باقی بماند.

۳- تعیین نوع یا کمیت عامل‌های مؤثر به طوری که تغییرپذیری متغیر پاسخ کوچک باشد.

۱-۲-۷ مراحل آزمایش

انتخاب شیوه‌ی پژوهش تا حد زیادی به موضوع پژوهش و هدف پژوهش‌گر از پژوهش بستگی دارد. برای توفیق در یک امر پژوهشی پژوهش‌گر لزوما باید نکات زیادی را دقیقا مد نظر قرار دهد. برخی از مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

۱- **شناسایی و بیان مسئله.** به عنوان اولین قدم باید مسئله به طور روشن و دقیق بیان شود. اگر نتوانیم مسئله را به طور دقیق تعریف کنیم، آن‌گاه نباید انتظار توفیق داشته باشیم. معمولا بیانی قابل قبول و روشن برای مسئله آسان نیست. لازم است کلیه‌ی مفاهیم راجع به اهداف آزمایش باز شود. در نظر گرفتن تمام جوانب کار امر مهمی است. بیان روشن مسئله در فهم بهتر پدیده‌ها و حصول نتیجه اجتناب‌ناپذیر است.

۲- **بیان اهداف.** ممکن است هدف، یافتن پاسخ سؤال‌هایی باشد که مطرح شده‌اند. مثلا فرض‌هایی که باید آزمون شوند و یا اثرهایی که باید براورد شوند. اگر پژوهشی بیش از یک هدف داشته باشد، می‌توان به آن اهداف نسبت به اهمیت‌شان اولویت داد. در بیان اهداف نباید از عبارت‌ها و اصطلاحات نامفهوم و پیچیده استفاده کرد.

۳- **انتخاب تیمار.** موفقیت در یک کار پژوهشی بستگی به انتخاب خردمندانه‌ی تیمارها دارد که بتوان پس از ارزیابی آن‌ها به سؤال‌های مطرح شده پاسخ گفت. پژوهش‌گر باید عامل‌هایی که در آزمایش مهم هستند، دامنه‌ی تغییر هر یک از این عامل‌ها، و سطوح خاصی که در هر اجرا باید اعمال شوند را انتخاب کند. باید درباره‌ی چگونگی کنترل این عامل‌ها در حد مطلوب و درباره‌ی چگونگی اندازه‌گیری آن‌ها بیاندیشد. برای توفیق در این راه شناخت مسئله ضروری است. شناخت معمولا شامل تجربه‌ی عملی و درک مفاهیم

نظری است. مخصوصا در آزمایش‌های اولیه، بررسی تمام عامل‌هایی که می‌توانند مهم باشند و عامل‌هایی که بنابر تجربه‌های گذشته چندان مؤثر نبوده‌اند اهمیت دارد.

۴- **انتخاب مواد آزمایشی و متغیر پاسخ.** در انتخاب مواد آزمایشی باید به جمعیت مورد نظر توجه داشت. مواد استفاده شده باید معرف جامعه‌ای باشند که روی آن تیمارها آزمون می‌شوند. در انتخاب متغیر پاسخ باید پژوهش‌گر مطمئن باشد که این متغیر واقعا اطلاعاتی مفید درباره‌ی فرایند تحت مطالعه به دست می‌دهد. متغیر پاسخ می‌تواند متوسط یا انحراف معیار مشخصه‌ای باشد که اندازه‌گیری شده است.

۵- **انتخاب طرح.** انتخاب طرح آزمایش شامل در نظر گرفتن اندازه‌ی نمونه (تعداد تکرارها)، انتخاب ترتیب مناسب اجرا برای انجام آزمایش و معلوم کردن این موضوع است که آیا بلوک‌بندی یا محدودیت‌های دیگر تصادفی کردن لازم هستند یا نه. همواره باید ساده‌ترین طرح را انتخاب کرد که در عین سادگی بتواند منظور پژوهش‌گر را به نحو مطلوب تأمین کند.

۶- **انجام آزمایش.** بخش مهم هر فرایند پژوهشی به شیوه‌ی استقرایی آزمایش است که در آن فرض‌هایی درباره‌ی موضوع می‌شود. برای بررسی این فرض‌ها آزمایش انجام می‌گیرد و بر مبنای نتایج حاصل، فرض‌های جدیدی اقامه شده و به همین ترتیب آزمایش پیش می‌رود.

۷- **تحلیل داده‌ها.** در تحلیل داده‌ها باید از روش‌های آماری استفاده کرد تا آن‌که نتایج به جای آن‌که به صورت دستوری صادر شوند، در ماهیت عینی باشند. اگر آزمایش درست طرح‌ریزی شود و اگر آزمایش مطابق طرح انجام گیرد، آن‌گاه نیازی به روش‌های آماری پیچیده نیست.

۸- **تهیه‌ی گزارش جامع از پژوهش.** به محض تحلیل داده‌ها، پژوهش‌گر باید نتیجه‌گیری‌های عملی درباره‌ی آزمایش‌ها را به صورت گزارشی جامع ارایه دهد. در این مرحله غالبا روش‌های نموداری به خصوص در ارایه نتایج به دیگران مفید است. آزمایش‌های تأیید کننده نیز باید برای معتبر ساختن نتایج انجام شوند.

۱-۲-۸ اصول پایه

اگر بخواهیم نتایجی بامعنا و معتبر از داده‌ها استخراج کنیم، استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش ضروری است. وقتی مسئله متضمن داده‌هایی است که شامل خطاهای آزمایشی هستند روش‌های آماری تنها رهیافت عینی تحلیل می‌باشند. پس، هر پژوهش استقرایی دارای دو وجه است، یکی طرح و انجام آزمایش و دیگری تحلیل آماری داده‌ها. این دو موضوع در ارتباط نزدیک با یکدیگر هستند. زیرا روش تحلیل مستقیما به طرح مورد استفاده بستگی دارد.

سه اصل پایه‌ای طرح آزمایش عبارت‌اند از: تکرار، تصادفی کردن، و بلوک‌بندی.

در بخش‌های ۱-۲-۳ و ۱-۲-۴ توضیحاتی، به ترتیب، راجع به تکرار و بلوک‌بندی داده شد. حال اصل تصادفی کردن را بیان می‌کنیم.

در استفاده از روش‌های آماری در طرح آزمایش‌ها، تصادفی کردن مسئله‌ای بنیادی است. منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص تیمارها به واحدهای آزمایشی و ترتیبی که مطابق آن آزمایش‌ها انجام می‌شوند به تصادف تعیین شوند. در استفاده از روش‌های آماری لازم است که مشاهده‌ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند. تصادفی کردن معمولا به این پذیره اعتبار می‌دهد. تصادفی کردن درست آزمایش، به خارج کردن ((متوسط)) اثرهای عامل‌های خارجی که می‌توانند دخیل باشند نیز کمک می‌کند.

۱-۲-۹ تحلیل واریانس

تحلیل واریانس در قالب طرح‌های آزمایشی، پرکاربردترین تحلیل آماری به شمار می‌آید. اصول کلی تحلیل واریانس توسط رونالد فیشر بنیان‌گذاری شد و سپس سایر ریاضی‌دانان و آمارشناسان جزییات آن را تکمیل کردند. به طور کلی، تحلیل واریانس عبارت است از انجام یک سری عملیات ریاضی که به وسیله‌ی آن می‌توان مقدار کل تغییرپذیری موجود در داده‌های یک آزمایش را به قسمت‌ها یا اجزای مختلف تقسیم کرد. بعضی از این اجزا به خاطر عامل‌هایی است که پژوهش‌گر آن‌ها را به عمد در آزمایش قرار داده است تا اثر آن‌ها را بر روی صفات مورد مطالعه تعیین کند، و بعضی دیگر زاییده‌ی عامل‌های غیر قابل کنترل می‌باشند. در واقع تحلیل واریانس، یا به طور مناسب‌تر تحلیل تغییر نسبت به میانگین، افراز کل تغییرات موجود در مجموعه‌ی داده‌ها به مؤلفه‌های آن است. هر مؤلفه‌ای به یک علت قابل شناسایی بوده یا به یک منبع تغییر نسبت داده می‌شود؛ به علاوه، یک مؤلفه، تغییر حاصل از عامل‌های کنترل نشده و خطاهای تصادفی مربوط به اندازه‌های پاسخ را نشان می‌دهد.

۱-۲-۱۰ مقایسه‌ی مقید[1]

در کاربردهای زیادی، آمارشناسان به جای "پارامترهای مزاحم[2]" به یک "پارامتر مورد نظر[3]" می‌پردازند. به طور کلی، آمارشناسان ترکیب‌های خطی پارامترها، که در طرح آزمایش‌ها و در تحلیل واریانس از طریق ترکیب‌های خطی میانگین‌های تیماری براورد می‌شوند، را بررسی می‌کنند؛ چنین ترکیب‌های خطی‌ایی مقایسه نامیده می‌شوند.

---

[1] Contrast
[2] Nuisance parameters
[3] Parameter of interest

در بسیاری از موارد تنها مقایسه‌ی جفت میانگین‌ها مورد نظر نیست. مثلا ممکن است بخـواهیم میانگین تیماری را با میانگین چند تیمار دیگر مقایسه کنیم. یعنی مثلا بخواهیم فرضـی بـه صـورت زیر را آزمون کنیم

$$H_0 : 4\mu_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$$

چنین فرضی را می‌توانیم به شکل زیر نیز بنویسیم

$$H_0 : 4\mu_2 - (\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) = 0$$

می‌توان چنین فرضی را با در نظر گرفتن یک ترکیب خطی مناسب از میانگین‌های نمونه‌ای ($\bar{y}_i$) یا از مجموع‌های نمونه‌ای ($y_{i.}$) مانند،

$$4y_{2.} - (y_{1.} + y_{3.} + y_{4.} + y_{5.})$$

آزمون کرد. اگر مثلا بخواهیم میانگین تیمارهای ۱ و ۳ را با میانگین تیمارهای ۴ و ۲ مقایسه کنـیم، یعنی اگر بخواهیم فرض $H_0 : \mu_1 + \mu_3 = \mu_2 + \mu_4$ را آزمون کنیم، در این صورت می‌تـوانیم بـا در نظر گرفتن ترکیب خطی $y_{1.} + y_{3.} - y_{2.} - y_{4.}$ این فرض را آزمون کنیم.

به طور کلی یک ترکیب خطی بر حسب yها به صورت

$$C = \sum_{i=1}^{a} c_i y_{i.}$$

با شرط $\sum_{i=1}^{a} n_i c_i = 0$ (اگر طرح متعادل باشـد، بـه عبـارت دیگـر اگـر $n_i = n$ باشـد، آن‌گـاه در مقایسه‌ی میانگین‌های تیمارها لازم اسـت کـه $\sum_{i=1}^{a} c_i = 0$ باشـد) را مقابلـه مـی‌گـوییم. مجمـوع توان‌های دوم چنین مقابله‌ای،

$$SS_{\text{مقابله}} = \frac{(\sum_{i=1}^{a} c_i y_{i.})^2}{\sum_{i=1}^{a} n_i c_i^2} \qquad (۱.۱)$$

است و یک درجه‌ی آزادی دارد. مقابله به وسیله‌ی مقایسه‌ی مجموع توان‌های دومـش بـا میـانگین توان دوم خطا آزمون می‌شود. پس آماره‌ی آزمون مناسب برای فرض $H_0 : \sum_{i=1}^{a} c_i \mu_i = 0$

$$F_0 = \frac{SS_{\text{مقابله}}}{MS_{\text{خطا}}}$$

است و دارای توزیع F با ۱ درجه‌ی آزادی برای صـورت و $df_{\text{خطا}}$ درجـه‌ی آزادی بـرای مخـرج می‌باشد. فرض صفر در صورتی رد می‌شود که F_0 از نقطه α درصد بالای توزیع F با ۱ درجـه‌ی آزادی برای صورت و $df_{\text{خطا}}$ درجه‌ی آزادی برای مخرج تجاوز کند. بسیاری از مقایـسه‌هـای مهـم بین میانگین‌های تیماری را می‌توان با استفاده از مقابله‌ها به همین ترتیب انجام داد.

۱-۲-۱۱ طرح متقاطع[1]

در بسیاری از پژوهش‌ها بنا به دلایل مختلف از جمله کمبود واحدهای آزمایشی، تغییرپذیری و تفاوت در بین این واحدها، ناگزیر به بیش از یک بار به کار بردن واحدهای آزمایشی در حین اجرای پژوهش هستیم، که در ادبیات موضوعی به داده‌های حاصل از اندازه‌گیری‌های این پژوهش‌ها، اندازه‌های تکراری گفته می‌شود. از طرف دیگر یک آزمایش را با توجه به اهداف آن می‌توان به طرق گوناگون طراحی کرد. یکی از نمادها در طراحی یک آزمایش تعداد تکرار مربوط به هر تیمار است که بر حسب اهداف پژوهش می‌تواند متعادل یا نامتعادل باشد و نماد دیگر در طراحی یک آزمایش نحوه‌ی چیدمان تیمارها در طرح‌های بلوکی، مربع لاتین و ... می‌باشد که می‌تواند از ساختارهای خاص و یا عام تبعیت کند. در این‌جا به اختصار درباره‌ی چیدمان تیمارها در طرح‌های اندازه‌های تکراری‌ایی بحث می‌کنیم که در آن‌ها دوره‌های زمانی عاملی در آزمایش هستند. این طرح‌ها، طرح‌های متقاطع یا دگرتیمار[2] نامیده می‌شوند.

۱-۳ روند کار

این پایان‌نامه در ۴ فصل تدوین شده است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه است. در فصل دوم طرح‌های اندازه‌های تکراری و خصوصیات آن‌ها توضیح داده می‌شوند. در فصل سوم معیارهای بهینگی در طرح آزمایش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سرانجام در فصل چهارم طرح‌های متقاطع بهین را بررسی خواهیم کرد.

---

[1] Cross-over design
[2] Change-over design

فصل دوم

طرح و تحلیل آزمون‌های اندازه‌های تکراری

۲-۱ مقدمه

عبارت "اندازه‌های تکراری" به طور گسترده به داده‌هایی اشاره می‌کند که پاسخ هر واحد آزمایشی در موقعیت‌های چندگانه[1] یا تحت شرایط چندگانه به دست آورده می‌شود. هر چند متغیر پاسخ می‌تواند یک‌متغیره یا چندمتغیره باشد، ما بررسی خود را به متغیرهای پاسخ یک‌متغیره که در موقعیت‌های چندگانه برای هر واحد آزمایشی اندازه‌گیری شده‌اند محدود می‌کنیم. عبارت "چندگانه" معمولا بر "بیشتر از دو" دلالت می‌کند، چون موضوع اندازه‌های زوجی در کتاب‌های زیادی مورد ملاحظه قرار داده می‌شود.

ما در این‌جا در مفهوم کلی، عبارت "اندازه‌های تکراری" را برای اشاره کردن به وضعیتی به کار می‌بریم که در آن از هر واحد آزمایشی اندازه‌های چندگانه‌ی متغیر پاسخ به دست می‌آیند.

در بعضی موارد که در آن‌ها داده‌های اندازه‌های تکراری به دست آورده می‌شوند، واحدهای آزمایشی مستقل واحدهای منفرد نیستند. برای مثال، در یک مطالعه‌ی ژنتیک، ممکن است واحدهای آزمایشی به وسیله خانواده‌ها تعریف شوند؛ بنابر این، پاسخ‌ها از اعضای هر خانواده به دست آورده می‌شوند.

در این فصل به یک نوع خاص از آزمون‌های مقایسه‌ای که به عنوان آزمون متقاطع شناخته شده است نیز می‌پردازیم که در آن واحدهای آزمایشی دنباله‌های مختلف تیمارها را دریافت می‌کنند.

طرح‌های متقاطع یا دگرتیمار کلاس خاصی از طرح‌های اندازه‌های تکراری هستند. طرح‌های اندازه‌های تکراری که ما بررسی خواهیم کرد، طرح‌هایی هستند که در آن‌ها واحد آزمایشی بعد از

---

[1] Multiple

دریافت کردن یک تیمار مکررا اندازه‌گیری می‌شود با این فرض که این اندازه‌ها درون واحد آزمایشی همبسته هستند. لازم به ذکر است که در تکرارهای متفاوت، تیمار تغییر نمی‌کند و فقط یک تیمار روی هر یک از واحدهای آزمایشی اعمال می‌شود و واحد آزمایشی بین اندازه‌های متوالی تیمار جدیدی را دریافت نخواهد کرد. حال آن‌که در یک آزمایش متقاطع، روی هر واحد آزمایشی در سرتاسر آزمون بیش از یک تیمار اعمال می‌شود و معمولا از یک دوره‌ی اندازه‌گیری به دیگری، تیمار متفاوت می‌باشد و این تیمارها به طور تصادفی به یک دنباله‌ی تعیین شده از واحدهای آزمایشی داده می‌شوند.

آزمون‌های متقاطع به طور گسترده در پژوهش‌های کلینیکی و پزشکی و در زمینه‌های مختلف دیگر از جمله دام‌پزشکی، روان‌شناسی، ورزش،کشاورزی و ... به کار برده می‌شوند.

۲-۲ مزایا و معایب طرح‌های اندازه‌های تکراری

یک مزیت مطالعاتی که در آن‌ها از هر واحد آزمایشی اندازه‌های تکراری به دست آورده می‌شود این است که این نوع از طرح در واحدها صرفه‌جویی می‌کند. برای مثال، هنگام بررسی اثرهای یک تیمار در زمان، معمولا مشاهده کردن واحدهای آزمایشی یکسان به طور پی‌درپی به جای واحدهای آزمایشی مختلف در هر نقطه‌ی زمانی مشخص شده مطلوب است. مزیت دیگر این است که واحدهای آزمایشی می‌توانند به عنوان کنترل‌های خودشان به کار روند چون می‌توان برای هر واحد آزمایشی، متغیر حاصل را تحت هر دو شرط کنترل و آزمایشی اندازه‌گیری کرد.

دو اشکال عمده در تحلیل داده‌های مطالعات اندازه‌های تکراری وجود دارند. اول، به دلیل وابستگی بین مشاهدات تکراری به دست آمده روی یک واحد آزمایشی تحلیل پیچیده است. دوم، اغلب پژوهش‌گر نمی‌تواند برای به دست آوردن اندازه‌ها شرایط را کنترل کند، به طوری که ممکن است داده‌ها نامتعادل یا به طور جزئی ناقص باشند. در یک مطالعه‌ی طولی، برای مثال، ممکن است به واسطه‌ی عواملی که به نتیجه‌ی مورد نظر مربوط نمی‌شوند پاسخ یک واحد آزمایشی در یک یا بیش از یک نقطه‌ی زمانی گمشده باشد. در مطالعات ژنتیک، اندازه‌ی خانواده‌ها به جای این‌که ثابت باشند متغیر هستند؛ بنابر این، تعداد اندازه‌های تکراری در واحدهای آزمایشی ثابت نیستند.

هر چند روش‌های زیادی برای تحلیل کردن داده‌های اندازه‌های تکراری بررسی شده‌اند، اکثرا به حالتی منحصر می‌شوند که در آن متغیر پاسخ به طور نرمال توزیع می‌شود و داده‌ها متعادل و کامل هستند.

۲-۳ نمادگذاری اندازه‌های تکراری

در متون آماری نمادگذاری به کار برده شده برای توصیف کردن روش‌های تحلیل اندازه‌های تکراری به طور چشمگیری تغییر می‌کند. جدول ۲ . ۱ طرح کلی اندازه‌های تکراری را نشان می‌دهد که در این‌جا استفاده خواهد شد. فرض کنید n تعداد واحدهای آزمایشی مستقل که از آن‌ها اندازه‌های تکراری به دست آورده می‌شوند را نشان دهد، t_i تعداد اندازه‌های واحد آزمایشی i، و y_{ij} پاسخ واحد آزمایشی i در نقطه‌ی زمانی (یا موقعیت) j برای $i=1,2,...,n$ و $j=1,2,...,t_i$ باشد.

یک حالت خاص طرح کلی نشان داده شده در جدول ۲ . ۱ حالتی است که در آن اندازه‌های تکراری برای همه‌ی واحدهای آزمایشی در یک مجموعه‌ی مشترک از t موقعیت اندازه‌گیری به دست آورده می‌شوند (یا پیش‌بینی شده که به دست آورده می‌شوند). در این حالت $t_1=...=t_n=t$ می‌باشد. یک مورد مهم و معمولا رخدادی زمانی پیش می‌آید که اندازه‌های تکراری از s زیرجامعه (گروه) از واحدهای آزمایشی در یک مجموعه‌ی مشترک از t نقطه‌ی زمانی (یا موقعیت اندازه‌گیری) به دست آورده می‌شوند. در این مورد، فرض کنید n_h تعداد واحدهای آزمایشی در گروه h برای $h=1,...,s$ باشد. بر حسب نمادگذاری کلی، $n=\sum_{h=1}^{s}n_h$ است. این داده‌ها را به گونه‌ای که در جدول ۲ . ۲ نشان داده شده ارایه می‌دهیم. در این مورد، به جای این‌که فرض کنیم y_{ij} پاسخ در زمان j از واحد آزمایشی i را نشان می‌دهد، فرض می‌کنیم y_{hij} پاسخ در زمان j از واحد آزمایشی i در گروه h برای $j=1,...,t$ ، $i=1,...,n_h$ و $h=1,...,s$ باشد.

در نهایت حالت خاصی را بررسی خواهیم کرد که در آن اندازه‌های تکراری در t نقطه‌ی زمانی از n واحد آزمایشی یک جامعه‌ی تکی به دست آورده می‌شوند (یا پیش‌بینی شده که به دست آورده می‌شوند). در این مورد، می‌توان داده‌ها را با یک ماتریس $n\times t$، به طوری که در جدول ۲ . ۳ نشان داده شده است، ارایه کرد. در این‌جا، y_{ij} اندازه‌ی jام از واحد آزمایشی iام برای $j=1,...,t$ ، $i=1,...,n$ را نشان می‌دهد.