بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

ثابت‌های پایداری هایرز—اولام و نرم‌اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار

توسط

مریم جوی

استاد راهنما

دکتر فرشته سعدی

مهر ماه ۱۳۹۰

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه خانم مریم جوی رشته ریاضی‌محض به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۱۰۱ تحت عنوان: «**ثابت‌های پایداری هایرز- اولام و نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر حکیمه ماهیار	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدمحمد باقری	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر فرشته سعدی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ________ و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ________ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب مریم جوی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: مریم جوی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۹/۸

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب مریم جوی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۸۹-۸۸ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:........................

تاریخ: ۱۳۹۰/۹/۸

تقدیم به

مادر عزیز و بزرگوارم

قدردانی

منت خدای را عز وجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو می‌رود ممد حیات است و چون بر آید مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب .

کامیابی خویش در پر داختن به این رساله را مرهون سرورانی می‌دانم که بر تشویقم دل بستند ویاری ام بخشیدند. نام گرامیشان را به عنوان سپاسی اندک از لطف گرانمندشان، زینت بخش این مرقومه می‌سازم.

مادر عزیزم که حمایت های بی دریغشان همواره بر زندگی‌ام سایه افکنده است.

استاد ارجمند سر کار خانم دکتر فرشته سعدی

راهنمایی دلسوز و با گذشت که کاستی‌های مرا به دیده اغماض نگریستند و با حمیت و جدیت، مرا به دقت، اندیشه، درک و تعمق وا می‌داشتند.

استاد ارجمند جناب آقای دکتر سید مسعود امینی

که در طول دوره تحصیل از محضر ایشان استفاده بسیار بردم.

دوستانم که لحظات بسیار خوشی را با هم سپری نمودم.

بنفشه صادقی کنار سری، رضا احسانی، رویا حبیبی، سمیه قاسمی، محبوبه رئیس صفری، فاطمه خسروی، فاطمه شهباز، آنا هیتا نظری زاده و کیوان رمضانی و سایر دوستان، همکلاسی‌ها که در این مدت از حضور و حمایتشان بهره‌مند بوده‌ام. تمام آنان که در مسیر زندگی به من درس علم و اخلاق داده‌اند.

مریم جوی

مهر ماه ۱۳۹۰

ثابت‌های پایداری هایرز—اولام و نرم‌اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار

چکیده

در این پایان نامه که مراجع اصلی آن [۲۰] و [۲۱] و [۷] می‌باشند، ابتدا برای فضای هاسدورف و فشرده‌ی X نرم اساسی و ثابت پایداری هایرز—اولام عملگر ترکیبی وزن دار $uC_\varphi : f \mapsto u.(f \circ \varphi)$ بر $C(X)$ را بر حسب مجموعه‌ی $\varphi(\{x \in X : |u(x)| \geq r\})$، $r > 0$ ، تعیین کرده وسپس نتایج برای عملگر ترکیبی وزن دار uC_φ روی جبر های یکنواخت تعمیم داده می شود. همچنین فشردگی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار بر جبرهای یکنواخت تحت شرایط خاص بررسی می شوند. در ادامه شرط لازم و کافی برای وجود بهترین ثابت پایداری هایرز—اولام برای عملگر های خطی کراندار ارائه شده و نشان داده می شود که بهترین ثابت برای عملگر ترکیبی وزن دار روی $C(X)$ و جبر یکنواخت $\mathcal{A}$ همواره موجود است.در انتها پایداری عملگر مشتق مرتبه اول روی فضاهای خاصی بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: عملگر تر کیبی وزن دار، فشردگی عملگر تر کیبی وزن دار، نرم اساسی، پایداری هایرز— اولام، ثابت هایرز—اولام

فهرست مندرجات

مقدمه

مفهوم پایداری به طور طبیعی در مسائل مکانیک مطرح شد. این مفهوم به لحاظ ریاضی در ارتباط با، پیوستگی جواب یک مسئله وابسته به پارامترهای اولیه است که این پیوستگی از راه‌های مختلفی تعریف خواهد شد. مسائل پایداری در شاخه‌های دیگر فیزیک و حتی در ریاضی محض نیز پدیدار می شود. در اینجا ما بر آن نیستیم که تعریف کاربردی کلی از پایداری ارائه دهیم، این کار را می توان با معرفی کردن فضاهای تابعی مناسب برای تئوری‌های فیزیکی و مترهای مختلف روی آن انجام داد. اما بجای این کار مایلیم بعضی از خواص مهم این مفهوم را بررسی کنیم طوری که در فرمول‌های ریاضی محض ظاهر می شوند. در واقع جرقه‌ی مفهوم پایداری به وسیله‌ی فردی به نام اولام[1] در سال ۱۹۴۰ زده شد. او با مطرح کردن سؤ ال زیر باعث پدید آمدن این مفهوم شد.

فرض کنیم E و E' فضاهای باناخ باشند و δ یک عدد مثبت باشد. یک نگاشت f از E به E' را $\delta-$خطی گویند اگر $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|<\delta$ برای هر $x,y\in E$. حال آیا برای هر نگاشت $\delta-$خطی f و $\epsilon>0$ یک نگاشت خطی مانند T از E به E' وجود دارد که برای هر $x\in E$ در نامساوی $\|f(x)-T(x)\|\leq\epsilon$ صدق کند. در این صورت اگر جواب سؤ ال مثبت باشد، گوییم f پایدار است. بعدها مسئله فوق روی برخی فضاهای دیگر نیز بررسی شد. هایرز در[٦] این مسئله را برای فضاهای باناخ حقیقی E و E' بررسی کرد و نشان داد برای نگاشت $\delta-$ خطی $f:E\to E'$ همواره نگاشت جمعی مانند $T:E\to E'$ وجود دارد که برای هر $x\in E$، $\|f(x)-T(x)\|\leq\epsilon$ $x\in E$ و بعلاوه اگر

[1] Ulam

نگاشت $t \to f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به E' برای هر $x \in E$ پیوسته باشد T خطی است. سپس راسیس [۲] در [۱۵] این نتیجه را برای حالتی که $f : E \to E'$ در نامساوی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

برای هر $x, y \in E$ صدق کند تعمیم داد که در اینجا $0 \leq p < 1$. این مسئله به پایداری هایرز– اولام معادله جمعی $g(x+y) = g(x) + g(y)$ معروف است. بعدها مفهوم پایداری هایرز – اولام توسط میورا[۳]، میاجیما[۴] و تاکاهاش[۵] در [۱۳] به ترتیب زیر ارائه شد:

برای فضاهای باناخ A و B نگاشت $T : A \to B$ پایداری هایرز – اولام دارد اگر ثابت $K \geq 0$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

برای هر $a \in A$، $b \in T(A)$ و $\epsilon > 0$ که در رابطه‌ی $\|T(a) - b\| \leq \epsilon$ صدق کند یک $a_0 \in A$ وجود داشته باشد که $T(a_0) = b$ و $\|a - a_0\| \leq K\epsilon$.

چنین ثابت K برای T یک ثابت پایداری هایرز – اولام (HUS) نامیده می‌شود. اگر مینیمم تمام ثابت‌های هایرز – اولام موجود باشد، این مینیمم بهترین ثابت HUS برای T خواهد بود.

در این پایان نامه پایداری هایرز – اولام عملگر های ترکیبی وزن دار مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض کنیم X و Y فضاهای فشرده باشند و $C(X)$ و $C(Y)$ فضای باناخ توابع پیوسته به ترتیب بر X و Y با سوپریمم نرم باشد. برای هر $u \in C(Y)$، قرار می‌دهیم $S(u) = \{y \in Y : u(y) \neq 0\}$. تابع $u \in C(Y)$ را ثابت در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نگاشت $\varphi : Y \to X$ به گونه‌ای باشد که بر $S(u)$ پیوسته باشد. آن‌گاه هر u و φ یک عملگر $uC_\varphi : C(X) \to C(y)$ را که به صورت

$$(uC_\varphi f)(y) = u(y) f(\varphi(y)) \qquad (f \in C(X),\, y \in Y)$$

تعریف می‌شود، القا می‌کند. به وضوح uC_φ یک عملگر خطی کراندار از $C(X)$ به $C(Y)$ است که آن را عملگر ترکیبی وزن دار از $C(X)$ به $C(Y)$ می نامیم و u را تابع وزن گوییم. خصوصیات این

[۲] Rassias

[۳] Miura

[۴] Miyajima

[۵] Takahasi

عملگرها به وسیله‌ی کامویتز[6] در [۹]و [۱۰] و سایسنگ[7] و منهاوس[8] در [۱۸] و تعدادی ریاضیدان دیگر مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

این پایان نامه شامل ۴ فصل می‌باشد. در فصل اول پیش‌نیازهای لازم از آنالیز تابعی، جبرهای باناخ و جبرهای یکنواخت ارائه می شود.

در فصل دوم ابتدا به بررسی فشردگی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار بر $C(X)$ و بررسی نرم اساسی آن‌ها می‌پردازیم .مراجع اصلی این فصل [۱۰] و [۲۰] هستند. خواهیم دید عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ فشرده است اگر وتنها اگر برای هر مؤلفه‌ی همبند C از $S(u) = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$، مجموعه‌ی بازی مانند $C \subset U$ وجود داشته باشد چنان‌که φ بر U پیوسته باشد و به طور معادل برای هر r، $\varphi(\{x \in X : |u(x)| \geq r\})$ متناهی باشد.

همچنین نرم اساسی uC_φ بر اساس مجموعه‌های $\varphi(\{x \in X : |u(x)| \geq r\})$ محاسبه می‌شود. بعلاوه خواهیم دید که uC_φ پایداری هایرز — اولام دارد اگر وتنها اگر $r > 0$ چنان موجود باشد

$$\varphi(\{x \in X : |u(x)| \geq r\}) = \varphi(S(u))$$

بعلاوه اگر R را سوپریمم تمام rهایی بگیریم که در رابطه‌ی بالا صدق می‌کنند آن‌گاه $K_{uC_\varphi} = \frac{1}{R}$.

در فصل سوم فشردگی عملگرهای تر کیبی وزن‌دار برای حالت کلی جبرهای یکنواخت مورد مطالعه قرار می‌گیرد و ارتباط آن با قسمت‌های گلیسون بررسی می‌شود. همچنین شرایط مشابهی برای پایداری هایرز —اولام چنین عملگرهایی ارائه می‌شود. مثال‌هایی نیز جهت ارائه کاربرد نتایج بیان می‌شود.

در فصل چهارم به بررسی این مطلب می‌پردازیم که تحت چه شرایطی یک عملگر خطی بهترین ثابت پایداری هایرز— اولام دارد و خواهیم دید که عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی جبرهای یکنواخت همواره بهترین ثابت پایداری هایرز — اولام دارند. همچنین پایداری هایرز — اولام عملگر مشتق روی فضاهای خاصی از توابع پیوسته (با مقادیر در فضاهای باناخ) و وجود بهترین ثابت هایرز—اولام برای آن‌ها در انتهای این فصل بررسی می‌شود.

---

[6] Kamowitz

[7] Singh

[8] Manhas

فصل ۱

مقد مات و پیش نیاز ها

در این فصل به ذکر مقدمات و پیش‌نیازهای لازم در زمینه‌های آنالیز تابعی، جبرهای باناخ، جبرهای یکنواخت و معرفی مرزها می‌پردازیم و قضیه‌های مورد نیاز در این خصوص ارائه خواهد شد. به عنوان مثال در رابطه با جبر های باناخ، فضای ایده‌آل ماکسیمال و خواص آن‌ها، مفهوم نیم ساده بودن و جبرهای باناخ منظم ارائه می‌شوند. در جبرهای یکنواخت مفهوم مرزهای شوکه، نقاط قله و ارتباط آن‌ها با مرز شوکه بیان می‌شود.

۱.۱ مقدماتی از آنالیز تابعی

مطالب این بخش که مرجع اصلی آن [۱۶] است در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری تو پولوژیک X فضای برداری روی میدان K ($\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$) است چنان‌که نگاشت‌های $(x,y) \to x+y$ و $(\lambda,x) \to \lambda x$ به‌ترتیب روی $X \times X$ و $K \times X$ به X پیوسته باشند و هم‌چنین مجموعه‌های تک عضوی نیز بسته باشند.

بدیهی است هر فضای نرمدار یک فضای برداری توپولوژیک است. از این پس فضاهای برداری مورد بحث روی میدان اعداد مختلط در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. در این صورت X را یک فضای باناخ گوییم هرگاه X با متریک حاصل از نرمش کامل باشد. به عبارت دیگر X فضای باناخ است هرگاه هردنباله‌ی کشی در $(X, \|.\|)$ همگرا باشد.

به عنوان مثال برای فضای هاسدورف و فشرده‌ی X، فضای $C(X)$ متشکل از توابع مختلط پیوسته روی X با نرم

$$\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)| \qquad (f \in C(X))$$

یک فضای باناخ است.می‌دانیم هر گاه M یک زیر فضای بسته‌ی فضای باناخ X باشد، آن‌گاه فضای خارج قسمتی X/M همراه با نرم خارج قسمتی

$$\|x + M\| = \inf\{\|x + y\| : y \in M\}$$

که همان فاصله x از مجموعه‌ی بسته M است، یک فضای باناخ است. بعلاوه نگاشت خارج قسمتی $\pi : X \to X/M$ که $x \to x + M$ نگاشتی باز و پیوسته است.

تعریف ۳.۱.۱ اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند، نگاشت خطی $T : X \to Y$ را کراندار نامیم هرگاه تصویر گوی واحد بسته X تحت T کراندار باشد و در این حالت نرم T را با

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq ۱} \|Tx\|$$

تعریف می‌کنیم. می‌دانیم کرانداری یک نگاشت خطی بین دو فضای نرمدار با پیوستگی آن معادل است.

با توجه به [قضیه‌ی ۲۱.۱ , ۱۶] نتیجه می‌شود که اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند طوری‌که $dimX < \infty$ آن گاه هر نگاشت خطی مانند $T : X \to Y$ پیوسته است.

تعریف ۴.۱.۱ اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند و $T : X \to Y$ نگاشتی خطی باشد در این صورت نمودار T به صورت

$$G(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}$$

تعریف می شود. نگاشت خطی T را دارای نمودار بسته گوییم هرگاه $G(T)$ به عنوان زیر فضایی از $X \times Y$(همراه با نرم حاصل ضربی $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$) بسته باشد.

قضیه ۵.۱.۱ [قضیه‌ی ۱۵.۲ , ١٦] **(نمودار بسته)**

اگر X و Y فضاهای باناخ و $T : X \to Y$ نگاشتی خطی و دارای نمودار بسته باشد آن‌گاه T نگاشتی پیوسته است. در واقع اگر $x_n \to x$ و $Tx_n \to y$ نتیجه دهد $Tx = y$ آن‌گاه T پیوسته است.

مجموعه تمام عملگرهای خطی و کراندار از فضای نرمدار X به فضای نرمدار Y را با $B(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. ثابت می‌شود که هرگاه Y فضای باناخ باشد، $B(X,Y)$ با نرم عملگری باناخ است. برای فضای نرمدار X، فضای باناخ $B(X,\mathbb{C})$ را دوگان X نامیم و با X^* نشان می‌دهیم. گاهی اوقات ممکن است اثر عضو $f \in X^*$ روی $x \in X$ را با نماد $\prec x, f \succ$ نشان دهیم.

قضیه ٦.١.١ [قضیه‌ی ۴.۳ , ١٦] فرض کنیم B گوی یکه‌ی بسته‌ی فضای نرمدار X باشد. در این صورت به ازای هر $x^* \in X^*$

$$\|x^*\| = \sup\{| \prec x, x^* \succ | : x \in B\}$$

فرض کنیم B^* گوی یکه‌ی بسته X^* باشد. به ازای هر $x \in X$،

$$\|x\| = \sup\{| \prec x, x^* \succ | : x^* \in B^*\}$$

در نتیجه برای هر $x \in X$، $x^* \to \prec x, x^* \succ$ یک تابعک خطی کراندار بر X^* با نرم $\|x\|$ می‌باشد.

دوگان فضای باناخ X خود یک فضای باناخ است و لذا برای خود یک دو گان نرمدار دارد که با X^{**} نموده می شود. رابطه‌ی دوم از قضیه‌ی قبل نشان می‌دهد که هر $x \in X$، عضو $\phi x \in X^{**}$ یکتایی را با

ضابطه‌ی

$$\prec x, x^* \succ = \prec x^*, \phi x \succ \qquad (x^* \in X^*) \qquad (۱.۱.۱)$$

مشخص می‌کند، و نیز

$$\|\phi x\| = \|x\| \qquad (x \in X) \qquad (۲.۱.۱)$$

از رابطه ی ۱.۱.۱ معلوم می شود که $\phi : X \to X^{**}$ خطی است. بنا بر ۲.۱.۱، ϕ یک ایزومتری می‌باشد. حال چون X کامل فرض شده است، $\phi(X)$ در X^{**} بسته می‌باشد. لذا ϕ یک یکریختی ایزومتری از X بروی یک زیر فضای بسته ی X^{**} می‌باشد. از آن‌جایی که در بیشتر مواقع X را با $\phi(X)$ یکی می‌گیریم، پس X زیر فضایی از X^{**} تلقی می‌شود.

توپولوژی ضعیف روی فضای نرمدار X توپولوژی القا شده توسط X^* است یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X که تحت آن اعضای X^* پیوسته هستند که به آن X^* ـتوپولوژی نیز می گویند و با τ_w نشان می‌دهند. چون هر $\Lambda \in X^*$ پیوسته است، داریم $\tau_w \subset \tau$ که در آن τ توپولوژی حاصل از نرم است. توپولوژی ضعیف القا شده توسط X روی X^* توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* نامیده می‌شود. بنا به [قضیه۳.۱۰ ,۱٦] توپولوژی های ضعیف و ضعیف ستاره X و X^* را به فضاهای برداری توپولوژیک موضعاً محدب تبدیل می‌کنند.

در واقع اعضای $\phi(X)$ آن تابعک‌های خطی بر X^* اند که نسبت به توپولوژی ضعیف ستاره پیوسته می‌باشند. چون نرم توپولوژی X^* قوی‌تر است، ممکن است ϕ_X یک زیر فضای حقیقی X^{**} باشد. اما فضاهای مهم زیادی هستند که $\phi(X) = X^{**}$. این فضاها را انعکاسی می‌نامند.

حال فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد وقتی گوییم $x_n \to ۰$ در نرم. یعنی هر همسایگی صفر حاوی تمام x_n ها با n به قدر کافی بزرگ است. وقتی گوییم $x_n \to ۰$ به طور ضعیف، یعنی هر همسایگی ضعیف صفر شامل همه‌ی x_n ها با n به قدر کافی بزرگ است. چون هر همسایگی ضعیف صفر شامل یک همسایگی به شکل

$$V = \{x : |\Lambda_i x| < r_i, \text{به ازای } ۱ \leq i \leq n\} \qquad (۳.۱.۱)$$

است که در آن $\Lambda_i \in X^*$ و $r_i > 0$، به آسانی دیده می شود که $x_n \to 0$ به طور ضعیف، اگر وتنها اگر به ازای هر $\Lambda \in X^*$، $\Lambda x_n \to 0$. لذا هر دنباله‌ی همگرا به وضوح به طور ضعیف همگراست.

در فضای برداری توپولوژیک (X, τ) زیر مجموعه E از X کراندار نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی صفر مانند V، $s > 0$ وجود داشته باشد که برای هر $t \geq s$، $E \subseteq tV$.

به همین ترتیب، زیر مجموعه‌ی E از فضای نرمدار X به طور ضعیف کراندار است اگرو تنها اگر هر $\Lambda \in X^*$ بر E کراندار باشد. بنا به [قضیه ۱۱.۳ , ۱۶] هر زیر مجموعه E از X کراندار است اگر وتنها اگر به طور ضعیف کراندار باشد.

تعریف ۷.۱.۱ یک زیر فضای M از فضای نرمدار X را $Proximinal$ گوییم، اگر برای هر $f \in X$ یک $h \in M$ وجود داشته باشد چنان که

$$\|f-h\| = dist_A(f, M)(= \inf\{\|f-g\| : g \in M\})$$

بنا به نتیجه‌ی ۴.۶ از مرجع [۲] اگر M یک زیر فضای بسته از فضای انعکاسی X باشد آن‌گاه M، $Proximinal$ است.

قضیه ۸.۱.۱ [قضیه ۴.۱۰ , ۱۶] فرض کنیم X و Y فضاهای نرمدار باشند برای هر عملگر $T \in B(X, Y)$ عملگر خطی کرانداری مانند $T^* \in B(Y^*, X^*)$ نظیر می‌شود که برای هر $y^* \in Y^*$ و $x \in X$، $\prec Tx, y^* \succ = \prec x, T^*y^* \succ$ و $\|T\| = \|T^*\|$. عملگر T^* عملگر الحاقی وابسته به T نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و U گوی یکه‌ی باز در X باشد. گوییم نگاشت خطی $T : X \to Y$ فشرده است اگر $\overline{T(U)}$ در Y فشرده باشد.

در واقع با مفروضات بالا T فشرده است اگر وفقط اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X شامل زیر دنباله‌ای مانند $\{x_{n_i}\}$ باشد به طوری که $\{Tx_{n_i}\}$ به نقطه ای از Y همگرا باشد.

برای عملگر خطی $T : X \to Y$ بین دو فضای نرمدار X، برد T را با $R(T)$ و هسته آن را با $\mathcal{N}(T)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۰.۱.۱ [قضیه ۱۸.۴ ,۱۱۳ ,۱۶] فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند آن‌گاه

(الف) هرگاه $T \in B(X,Y)$ و $dimR(T) < \infty$، آن گاه T فشرده است.

(ب) هرگاه $T \in B(X,Y)$، T فشرده باشد و $R(T)$ بسته باشد، آن گاه $dimR(T) < \infty$.

(ج) هر گاه $T_n \in B(X,Y)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ عملگرهایی فشرده باشند و $T_n \to T$ در $B(X,Y)$ آن‌گاه T نیز فشرده است.

(د) هرگاه $T \in B(X,Y)$ و $x_n \to x$ به طور ضعیف، آن گاه $Tx_n \to Tx$ به طور ضعیف.

(ه) هرگاه $T \in B(X,Y)$ و $x_n \to x$ به طور ضعیف، و T فشرده باشد، آن گاه $\|Tx_n - Tx\| \to 0$.

اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند و $T \in B(X,Y)$ آن گاه به سادگی دیده می‌شود عملگر الحاقی آن $T^* : Y^* \to X^*$ نسبت به توپولوژی‌های ضعیف ستاره در هر دو طرف پیوسته است.

قضیه ۱۱.۱.۱ [قضیه ۵.۲ ,۱۶] **(اصل کرانداری یکنواخت)**

فرض کنید X یک فضای باناخ و Y یک فضای نرمدار باشد اگر $\mathcal{A} \subseteq B(X,Y)$ به طور نقطه‌ای کراندار باشد یعنی برای هر $x \in X$، $\{T(x) : T \in \mathcal{A}\}$ کراندار باشد آن‌گاه $\mathcal{A}$ نرم کراندار است.

قضیه ۱۲.۱.۱ [لم ۴.۷.VI ,۴] فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. در این صورت T فشرده است اگر وتنها اگر T^* هر تور کراندار در Y^* را که در توپولوژی ضعیف ستاره همگراست به توری که همگرا در X^* (نسبت به نرم)است تصویر کند.

تعریف ۱۳.۱.۱ نقاط اکستریم

فرض کنیم K زیرمجموعه‌ای از فضای برداری X باشد. مجموعه‌ی ناتهی $S \subset K$ یک مجموعه‌ی اکستریم برای K نام دارد اگر هیچ نقطه‌ی از S روی پاره خطی که نقاط انتهایی‌اش در K اند جز وقتی که هر دو نقطه‌ی انتهایی در S اند نباشد. این شرط را می‌توان به طور تحلیلی به صورت زیر بیان کرد:

هرگاه $x \in K$، $y \in K$، $0 < t < 1$، و $(1-t)x + ty \in S$ آن‌گاه $x \in S$ و $y \in S$.

نقاط اکستریم K مجموعه‌های اکستریمی هستند که فقط از یک نقطه تشکیل شده اند. مجموعه‌ی تمام نقاط اکستریم K را با $E(K)$ نشان می‌دهیم.