بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بیرجند
دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

عنوان:

عمل گروه فشرده موضعی روی بعضی از نیمگروه‌های فشرده سازی

استاد راهنما:
دکتر محمدرضا میری

تهیه و تنظیم:
مصطفی علیزاده نائینی

زمستان ۸۸

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم عمل یک گروه فشرده موضعی را روی نیمگروه فشرده سازی تقریباً دوره‌ای ضعیف متناظر با آن بررسی کنیم، در واقع عمل گروه G روی فضای توپولوژیک X نگاشتی بصورت $(s,x)\mapsto sx:G\times X\to X$ می‌باشد که دارای شرایطی خاص باشد. حال اگر G یک گروه فشرده موضعی و $(LUC(G))UG$ بزرگ‌ترین نیمگروه فشرده سازی آن باشد، برای هر عنصر $s\in G$ با شرط آنکه $s\neq e$، آنگاه برای هر $\mu\in UG$ رابطه $s\mu\neq\mu$ برقرار است. این موضوعی بود که در سال ۱۹۶۰ توسط الیس برای حالتی که گروه G گسسته باشد به اثبات رسید (و بنابراین UG یک فشرده سازی استون چک (βG) از G خواهد بود). و همچنین ویچ در سال ۱۹۷۷ این موضوع را در حالت کلی برای هر گروه فشرده موضعی بیان کرد. هدف ما در این پایان نامه بررسی قضیه ویچ روی فشرده سازی تقریباً دوره‌ای ضعیف ($WAP-$ فشرده سازی) از گروه فشرده موضعی G خواهد بود.

مقدمه

در فصل اول ابتدا به بیان و در صورت لزوم به اثبات مفاهیم و قضایای مقدماتی می‌پردازیم و مفاهیمی نظیر نیمگروه‌های جبری، نیمگروه‌های توپولوژیکی و عمل یک نیمگروه روی فضای توپولوژیک را معرفی می‌کنیم و بررسی خواهیم کرد که تحت چه شرایطی یک عمل پیوسته مجزا

روی یک نیمگروه، پیوسته توأم خواهد بود و مفهوم شارش و دور شوندگی را مطرح می‌کنیم. بخش پایانی فصل به بیان مفاهیم میانگین پذیری و فضاهای پذیرفتنی اختصاص دارد که نقش مهمی را در درک مفاهیم فصل‌های آینده خواهند داشت.

در فصل دوم ابتدا مفهوم فشرده سازی نیمگروهی را مطرح کرده و شرایط وجود یک $P-$فشرده سازی جهانی را بررسی می‌کنیم. سپس انواع فضاهای توابع را روی نیمگروه‌ها معرفی کرده و برخی از فشرده سازی متناظر با هر یک از این فضاها مانند فشرده سازی تقریباً دوره‌ای ضعیف ($WAP-$فشرده سازی)، فشرده سازی تقریباً دوره‌ای ($AP-$فشرده سازی) و فشرده سازی تقریباً دوره‌ای قوی ($SAP-$فشرده سازی) را بررسی می‌کنیم و به بیان برخی از خواص این فشرده سازی‌ها می‌پردازیم. و در پایان این فصل توابع نرم پیوسته چپ و فشرده سازی متناظر با آن یعنی $LUC-$فشرده سازی (UG) را که بزرگ‌ترین فشرده سازی نیمگروهی می‌باشد معرفی و بررسی خواهیم کرد.

در فصل سوم ابتدا مفهوم فشرده سازی استون چک از یک فضای فشرده موضعی را بیان می‌کنیم که نقش مهمی را در اثبات قضیه ویچ ایفا می‌کند و سپس عمل گروه فشرده موضعی G را روی فشرده سازی UG بررسی می‌کنیم و قضیه ویچ را برای گروه فشرده موضعی G بیان و ثابت می‌کنیم. سپس نشان خواهیم داد اگر گروه فشرده موضعی G دور شونده در جهت رزن بلات نباشد، در این صورت قضیه ویچ برای $WAP-$ فشرده سازی از گروه G برقرار نخواهد بود و از آنجاییکه قضیه ویچ در حالت کلی برای $WAP-$ فشرده سازی از گروه فشرده موضعی G برقرار نیست در قسمت بعدی این فصل ما این قضیه را با شرط آنکه گروه فشرده موضعی G یک $SIN-$گروه باشد بررسی خواهیم کرد و در نهایت نظیر قضیه ویچ را روی یک کلاس از گروه‌های فشرده موضعی که به اصطلاح $E-$گروه نامیده می‌شوند و توسط $C.Chou$ معرفی شده‌اند و بسیار بزرگ‌تر از کلاس $SIN-$گروه‌ها می‌باشند را بررسی خواهیم کرد.

فصل اول

تعاریف و قضیه‌های مقدماتی

۱.۱: نیمگروه‌های جبری

۲.۱: نیمگروه‌های توپولوژیکی

۳.۱: عمل نیمگروه روی فضاهای توپولوژیک

۴.۱: میانگین پذیری فضاهای توابع

۱.۱: نیمگروه‌های جبری

تعریف ۱.۱.۱: یک نیمگروه[1]، زوج مرتب (S,o) است که در آن S یک مجموعه ناتهی و o یک عمل دوتایی روی S به صورت $(s,t) \mapsto sot := st : S \times S \to S$ می‌باشد و همچنین S نسبت به این عمل شرکت پذیر است، یعنی:

$$\forall r,s,t \in S \qquad r(st) = (rs)t$$

هرگاه S فقط شامل یک عضو باشد، در این صورت نیمگروه (S,o) را یک نیمگروه بدیهی می‌نامیم و همچنین عنصر $e \in S$ را یک عنصر خود توان[2] گوییم هرگاه $eoe := e^2 = e$ و مجموعه تمام عناصر خود توان S را با نماد $E(S)$ نشان می‌دهیم.

---

[1] - Semigrup

[2] - Idempotent

تعریف۲.۱.۱: عنصر z را در نیمگروه S صفر راست[۳] گوییم هرگاه برای هر $sz = z, s \in S$ و اگر هر عنصر از S صفر راست باشد، آنگاه S را یک نیمگروه صفر راست گوییم.

صفر چپ و نیمگروه صفر چپ بطور مشابه تعریف می‌شوند. اگر یک صفر راست، صفر چپ نیز باشد، صفر نیمگروه نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱: عنصر e را در نیمگروه S همانی راست (خنثی راست) گوییم هرگاه برای هر $se = s, s \in S$. همانی چپ نیز بطور مشابه تعریف می‌شود، اگر یک عنصر همانی راست، همانی چپ نیز باشد، عنصر همانی نیمگروه نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱: فرض کنید S یک نیمگروه و T یک زیر مجموعه ناتهی از S باشد آنگاه T را،

(الف) یک زیر نیمگروه از S گوییم اگر $T^2 \subset T$ (که در آن $T^2 = \{st : s,t \in T\}$).

(ب) یک زیرگروه از S گوییم اگر T نسبت به عمل S یک گروه باشد.

(ج) یک ایده‌آل چپ از S گوییم هرگاه $ST \subset T$.

(د) یک ایده‌آل راست از S گوییم هرگاه $TS \subset T$.

(ه) یک ایده‌آل (دو طرفه) از S گوییم هرگاه T هم یک ایده‌آل چپ و هم یک ایده‌آل راست از S باشد.

تعریف ۵.۱.۱: ایده‌آل چپ از نیمگروه S را ایده‌آل کمین[۴] (مینیمال) می‌نامیم هرگاه شامل هیچ ایده‌آل چپ سره از S نباشد. ایده‌آل راست کمین و ایده‌آل (دو طرفه) کمین نیز بصورت مشابه تعریف می‌شوند. همچنین ایده‌آل چپ از نیمگروه S را ایده‌آل بیشین[5] (ماکسیمال) می‌نامیم، هرگاه این ایده‌آل مشمول در هیچ ایده‌آل چپ سره از S نباشد. ایده‌آل راست بیشین و ایده‌آل (دو طرفه) بیشین بصورت مشابه تعریف می‌شوند.

---

[3] - Right Zero
[4] - Minimal
[5] - Maxim

اشتراک تمام ایده‌آل‌های نیمگروه S، یک ایده‌آل کمین خواهد بود که آن را با $K(S)$ و یا بصورت اختصار با K نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱: هرگاه S و T دو نیمگروه باشند نگاشت $\theta : S \to T$ را یک همریختی[6] گوییم، هرگاه:

$$\theta(ss') = \theta(s)\theta(s') \qquad \forall s, s' \in S$$

یک همریختی یک به یک و پوشا را یک یکریختی[7] نامیم و به همریختی θ از S به داخل خود S یک درون‌ریختی[8] گوییم.

مجموعه درون ریختی‌های S تشکیل یک نیمگروه به نام نیمگروه درون ریختی‌های S می‌دهند که این نیمگروه را با $End(S)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱: حاصلضرب دکارتی دو نیمگروه S و T را با $S \times T$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(s,t)(s',t') = (ss',tt') \qquad (s,s' \in S, t,t' \in T)$$

صورت تعمیم یافته ضرب دکارتی، حاصلضرب نیم مستقیم[9] است که بصورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱: فرض کنید σ یک همریختی از T به داخل $End(S)$ باشد آنگاه $S \times T$ با ضرب

$$(s,t)(s',t') = (s\sigma_t(s'),tt') \qquad (s,s' \in S, t,t' \in T)$$

تشکیل یک نیمگروه می‌دهند (که معمولاً از نماد σ_t به جای $\sigma(t)$ استفاده می‌کنیم). این نیمگروه را حاصلضرب نیم مستقیم S و T گوییم و آن را با نماد $S\sigma T$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱: نیگروه S ساده چپ[10] (ساده راست) نامیده می‌شود اگر شامل هیچ ایده‌آل چپ (راست) سره نباشد. S را ساده گوییم اگر شامل هیچ ایده‌آل (دو طرفه) سره نباشد.

تعریف ۱۰.۱.۱: نیمگروه S را حذف پذیر راست[11] (حذف پذیر چپ) می‌نامیم، هرگاه برای هر r,s,t در S از رابطه $sr = tr$ $(rs = rt)$ بتوانیم نتیجه بگیریم $s = t$.

---

[6] - Homomorphism
[7] - Isomorphism
[8] - Endomorphism
[9] -Semidirect product
[10] - left simple

یک نیمگروه را که هم حذف پذیر راست و هم حذف پذیر چپ باشد نیمگروه حذف پذیر گوییم.

قضیه۱۱.۱.۱: احکام زیر در مورد نیمگروه S معادلند:

(الف) S حذف پذیر و ساده است و شامل یک عنصر خود توان است.

(ب) S ساده چپ و ساده راست است.

(ج) S ساده چپ و شامل همانی چپ است.

(د) S گروه است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۱۷.۱ مراجعه کنید.

قضیه ۱۲.۱.۱: فرض کنید $\theta : S \to T$ یک همریختی از نیمگروه S به نیمگروه T باشد، آنگاه تصویر همریختی $\theta(S)$ یک زیر نیمگروه از T است و همچنین داریم:

(الف) اگر A یک ایده‌آل چپ (راست) از S باشد، آنگاه $\theta(A)$ یک ایده‌آل چپ (راست) از $\theta(S)$ می‌باشد.

(ب) اگر B یک ایده‌آل چپ (راست) از $\theta(S)$ باشد، آنگاه $\theta^{-1}(B)$ یک ایده‌آل چپ (راست) از S است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۱۹.۱ مراجعه کنید.

قضیه ۱۳.۱.۱: احکام زیر در مورد نیمگروه S معادلند:

(الف) S ساده چپ و حذف پذیر راست است.

(ب) S ساده چپ و شامل یک عنصر خود توان است.

(ج) S حذف پذیر راست و شامل یک عنصر خود توان کمین است.

(د) S با حاصلضرب مستقیم از یک نیمگروه صفر چپ و یک گروه یکریخت است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۱۹.۲ مراجعه کنید.

---

[11] - Right cancellative

قضیه ۱۴.۱.۱: اگر نیمگروه S شامل یک ایده‌آل چپ کمین باشد، آنگاه $K(S)$ اجتماع تمام ایده‌آل‌های چپ کمین S است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۷.۲ مراجعه کنید.

قضیه ۱۵.۱.۱: فرض کنید e یک عنصر خود توان در نیمگروه S باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

(الف) Se ایده‌آل چپ کمین است.

(ب) eS ایده‌آل راست کمین است.

(ج) $eSe(=eS\bigcap Se)$ یک گروه است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۸.۲ مراجعه کنید.

تعریف ۱۶.۱.۱: یک عنصر خود توان از S که در یکی از شرط‌های معادل قضیه ۱۵.۱.۱ صدق کند، خودتوان کمین[۱۲] نامیده می‌شود.

قضیه ۱۷.۱.۱: فرض کنید S یک نیمگروه با ایده‌آل چپ کمین L و ایده‌آل راست کمین R باشد، آنگاه $RL=R\bigcap L$ یک گروه است و اگر e همانی RL باشد، آنگاه $R=eS$، $L=Se$ و $RL=eSe$، بعلاوه

$$K(S)=LR=LS=SR$$

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۱۱.۲ مراجعه کنید.

قضیه زیر نقش اساسی خود توان کمین را نشان می‌دهد که بصورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه ۱۸.۱.۱: اگر S یک نیگروه با خود توان کمین باشد در اینصورت احکام زیر برقرارند:

(الف) S ایده‌آل کمین $K:=K(S)$ منحصربفرد دارد.

(ب) $E(K)\neq\phi$ که در آن $E(K)$ مجموعه خود توان‌های K است.

---

12 - Minimal Idempotent

(ج) مجموعه‌های $\{Se:e\in E(K)\}$، $\{eS:e\in E(K)\}$ و $\{eSe:e\in E(K)\}$ به ترتیب، مجموعه ایده‌آل‌های چپ کمین S، مجموعه ایده‌آل‌های راست کمین S و مجموعه ایده‌آل‌های بیشین از K هستند.

(د) $K=\bigcup\{Se:e\in E(K)\}=\bigcup\{eS:e\in E(K)\}=\bigcup\{eSe:e\in E(K)\}$

برهان: این قضیه فوراً از قضیه ۱۳.۱.۱ و دوگان آن و قضایای ۱۵.۱.۱ و ۱۷.۱.۱ بدست می‌آید.

قضیه ۱۹.۱.۱: فرض کنید S یک نیمگروه با یک خود توان کمین است، آنگاه:

(الف) هر ایده‌آل چپ کمین S یک گروه است اگر و تنها اگر S دارای ایده‌آل راست کمین منحصر بفرد باشد.

(ب) $K(S)$ گروه است اگر و تنها اگر S دارای یک ایده‌آل چپ کمین منحصر بفرد و یک ایده‌آل راست کمین منحصر بفرد باشد.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۱۳.۲ مراجعه کنید.

۲.۱: نیمگروه‌های توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱: هرگاه S یک نیمگروه باشد، برای هر عضو $t \in S$ نگاشت‌های ρ_t و λ_t را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_t : S \to S \qquad \forall s \in S \quad \rho_t(s) = st\ ,$$

$$\forall s \in S \quad \lambda_t(s) = ts \qquad ,\ \lambda_t : S \to S$$

تعریف ۲.۲.۱: فرض کنید S یک نیمگروه و یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه S:

(الف) نیمگروه توپولوژیکی راست[۱۳] (نیمگروه توپولوژیکی چپ) نامیده می‌شود، هرگاه $\rho_s : S \to S$ $(\lambda_s : S \to S)$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد.

(ب) نیمگروه نیم توپولوژیک[۱۴] نامیده می‌شود، هرگاه $\lambda_s : S \to S$ و $\rho_s : S \to S$ برای هر $s \in S$ پیوسته باشد (یعنی هرگاه ضرب $(s,t) \mapsto st : S \times S \to S$ پیوسته مجزا[۱۵] باشد).

(ج) نیمگروه توپولوژیکی[۱۶] نامیده می‌شود هرگاه ضرب $(s,t) \mapsto st : S \times S \to S$ پیوسته توام[۱۷] باشد.

(د) گروه توپولوژیکی راست (گروه توپولوژیکی چپ) نامیده می‌شود هرگاه S یک گروه و نیز یک نیمگروه توپولوژیکی راست (نیمگروه توپولوژیکی چپ) باشد.

(ه) گروه نیم توپولوژیک نامیده می‌شود هرگاه S یک گروه و نیز یک نیم گروه نیم توپولوژیک باشد.

(و) گروه توپولوژیکی نامیده می‌شود هرگاه S یک گروه بوده و یک نیمگروه توپولوژیکی نیز باشد و بعلاوه نگاشت $s \mapsto s^{-1} : S \to S$ پیوسته باشد.

تعریف ۳.۲.۱: مرکز توپولوژیکی نیمگروه S را با $\Lambda(S)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Lambda(S) = \{s \in S :\ \text{پیوسته باشد}\ \lambda_s\}$$

---

[13] - Right topological semigroup
[14] - Semitopological semigroup
[15] - Separately continuous
[16] - Topological semigroup
[17] - Jointly continuous

اگر S یک نیمگروه توپولوژیکی راست و $\Lambda(S) \neq \phi$ باشد با توجه به اینکه برای هر $s,t \in S$، $\lambda_{st} = \lambda_s o \lambda_t$ نتیجه می‌گیریم که $\Lambda(S)$ یک زیر نیمگروه نیم توپولوژیک S است و نیز شامل تمام صفرهای چپ و همانی‌های چپ S می‌باشد.

مثال: فرض کنید R و C به ترتیب مجموعه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد مختلط با توپولوژی معمولی باشند در اینصورت این مجموعه‌ها تحت عمل جمع، گروه توپولوژیکی و تحت عمل ضرب نیمگروه توپولوژیکی هستند.

مثال: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد در اینصورت X^X (مجموعه تمام توابع از مجموعه X به توی X) در توپولوژی حاصلضربی (یعنی توپولوژی همگرای نقطه‌وار[18] روی X) و تحت عمل ترکیب توابع یک نیمگروه توپولوژیکی راست می‌باشد زیرا اگر $\{f_\alpha\}$ یک تور در X^X و همگرا به $f \in X^X$ باشد، آنگاه برای هر $g \in X^X$ و هر $x \in X$، $f_\alpha(g(x)) \to f(g(x))$ یعنی $f_\alpha og \xrightarrow{p} fog$. همچنین واضح است که زیر نیمگروه توابع پیوسته در X^X یک نیمگروه نیم توپولوژیک است. و اگر X یک فضای همگرای یکنواخت[19] باشد، هر زیر نیمگروه X^X که یک خانواده هم پیوسته[20] از توابع باشد یک نیمگروه توپولوژیک است و بالاخره چنانچه X یک فضای یکنواخت و X^X دارای توپولوژی همگرای یکنواخت روی X باشد، در اینصورت X^X یک نیمگروه توپولوژیکی راست بوده و زیر نیمگروه شامل تمام توابع پیوسته یکنواخت[21]، یک نیمگروه توپولوژیک است.

مثال: گروه $(R,+)$ را با توپولوژی متمم متناهی در نظر بگیرید، در اینصورت $(R,+)$ یک گروه نیم توپولوژیک با وارون پیوسته است، اما این گروه نیم توپولوژیک، نه هاسدورف است و نه نیمگروه توپولوژیکی.

---

[18] -Pointwise convergence
[19] - Uniform convergence
[20] - Equicontiniuos
[21] - Uniformly continuous

قضیه ۴.۲.۱: یک زیر نیمگروه از یک نیمگروه توپولوژیک راست در توپولوژی نسبی، توپولوژیک راست است و یک زیر گروه از گروه توپولوژیک، گروه توپولوژیک است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۴.۳ مراجعه کنید.

قضیه ۵.۲.۱: حاصلضرب مستقیم $S:=\Pi\{S_i : i\in I\}$ از خانواده نیمگروه‌های توپولوژیک راست، نسبت به توپولوژی حاصلضربی نیمگروه توپولوژیک راست است. همچنین اگر هر S_i گروه توپولوژیک باشد، آنگاه S نیز گروه توپولوژیک است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۶.۳ مراجعه کنید.

قضیه ۶.۲.۱: فرض کنید S یک نیمگروه توپولوژیکی راست، فشرده و هاسدورف باشد، آنگاه S یک خود توان کمین دارد و بنابراین S شامل یک ایده‌آل کمین منحصر بفرد می‌باشد.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم که S شامل یک عنصر خود توان است، برای این منظور مجموعه متشکل از تمام زیر نیمگروه‌های بسته S را که با رابطه شمولیت مرتب شده‌اند D می‌نامیم. اگر α یک زنجیر از D باشد آنگاه فشردگی S نتیجه می‌دهد که $\bigcap_{A\in\alpha} A\neq\phi$. پس زنجیر α دارای یک کران پایین است بنابراین طبق لم زرن کوچکترین عضو D که آن‌را T می‌نامیم وجود دارد. حال اگر d یک عنصر دلخواه از T باشد آنگاه d یک عضو خودتوان است زیرا Td یک زیر نیمگروه بسته از T است، حال از کمین بودن T نتیجه می‌شود که $Td=T$. بنابر این یک t در T وجود دارد بطوریکه $d=td$ و این یعنی $T_1:=T\bigcap\rho_d^{-1}(d)$ ناتهی است و با توجه به اینکه $\rho_d^{-1}(d)$ بسته است، T_1 یک زیر نیمگروه بسته از T است پس $T_1=T$. بنابراین $d\in T_1$ در نتیجه $d\in\rho_d^{-1}(d)$ و این یعنی اینکه $d=dd$ پس $d=d^2$.

حال فرض کنید که I یک ایده‌آل چپ بسته کمین دلخواه از S باشد، برای وجود چنین Sای دوباره می‌توان از لم زرن استفاده کرد، برای این منظور مجموعه تمام ایدهآل‌های چپ بسته S را با رابطه شمولیت در نظر می‌گیریم و آن را L می‌نامیم، اگر β یک زنجیر از L باشد آنگاه چون L زیرمجموعه بسته از مجموعه فشرده S است پس L فشرده است و در نتیجه $\bigcap_{B\in\beta} B\neq\phi$ پس β یک

کران پایین دارد که آن‌را I می‌نامیم، لذا طبق قسمت اول برهان I شامل یک خودتوان و الزاماً یک خودتوان کمین از S می‌باشد پس طبق قضیه ۱۸.۱.۱ ، S یک ایده‌آل کمین منحصر بفرد دارد.

نتیجه ۷.۲.۱: در یک نیمگروه توپولوژیکی راست، فشرده و هاسدورف هر ایده‌آل چپ (راست) شامل یک ایده‌آل چپ (راست) کمین است و هر ایده‌آل راستِ بسته، شامل یک ایده‌آل راست بسته کمین است.

نتیجه ۸.۲.۱: یک نیمگروه توپولوژیکی راست، فشرده و هاسدورف ساده چپ (راست) است اگر و تنها اگر حذف پذیر راست (چپ) باشد.

برهان: این نتیجه فوراً از قضیه ۶.۲.۱ و قضیه ۱۳.۱.۱ و دوگان آن بدست می‌آید.

نتیجه ۹.۲.۱: یک نیمگروه توپولوژیکی راست، فشرده و هاسدورف یک گروه است اگر و تنها اگر حذف پذیر باشد.

برهان: از نتیجه ۸.۲.۱ و قضیه ۱۱.۱.۱ این نتیجه بدست می‌آید.

در قضیه بعد صورت توپولوژیکی قضیه ۱۹.۱.۱ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۱: فرض کنید S یک نیمگروه نیم توپولوژیک هاسدورف و فشرده باشد در اینصورت:

(الف) ایده‌آل‌های چپ (راست) کمین S، گروه‌های توپولوژیکی فشرده هستند اگر و تنها اگر S دارای یک ایده‌آل راست (چپ) کمین منحصر بفرد باشد.

(ب) $K(S)$ یک گروه توپولوژیکی فشرده است اگر و تنها اگر S دارای یک ایده‌آل چپ کمین منحصر بفرد و یک ایده‌آل راست کمین منحصر بفرد باشد.

برهان: به [۲] فصل اول نتیجه ۲.۵ مراجعه کنید.

۳.۱: عمل نیمگروه روی فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۳.۱: نگاشت $\sigma : S\times X \to X$ یک عمل نیمگروه S روی فضای توپولوژیک X نامیده می‌شود هرگاه خواص زیر را دارا باشد:

(الف) برای هر $s\in S$ نگاشت $\sigma(s,\cdot): X\to X$ پیوسته باشد.

(ب) برای هر $s,t\in S$ و $x\in X$، $\sigma(st,x)=\sigma(s,\sigma(t,x))$.

معمولاً به جای $\sigma(s,\cdot)$ از نماد σ_S و به جای $\sigma(s,x)$ از نماد sx استفاده می‌کنیم، لذا **(ب)** بصورت $(st)x=s(tx)$ نیز بیان می‌شود.

حال این سوال طرح می‌شود که تحت چه شرایطی یک عمل پیوسته مجزا، پیوسته توأم خواهد بود. در قضیه بعد اِلیس[۲۲] به گونه‌ای به این سوال پاسخ می‌دهد.

قضیه (پیوستگی توأم اِلیس)۲.۳.۱: فرض کنید S یک نیمگروه توپولوژیک چپ با عنصر همانی و نیز با توپولوژی هاسدورف فشرده موضعی یا مترپذیر کامل باشد، همچنین فرض کنید G گروه یکه‌های S باشد و عمل $\sigma : S\times X\to X$ پیوسته مجزا باشد که در آن X فضای فشرده و هاسدورف است، در اینصورت σ در هر نقطه از $G\times X$ پیوسته است.

برهان: به [۲] فصل اول قضیه ۲.۴ مراجعه کنید.

نتیجه ۳.۳.۱: فرض کنید G یک زیرگروه از نیمگروه نیم توپولوژیکی فشرده و هاسدورف S باشد آنگاه تحدید ضرب روی $G\times S$ پیوسته توأم است و G یک گروه توپولوژیکی است.

برهان: قسمت اول حکم طبق قضیه پیوستگی توأم الیس برقرار است، حال برای آنکه G گروه توپولوژیکی باشد کافیست نشان دهیم نگاشت $s\mapsto s^{-1}: G\to G$ پیوسته است. برای این منظور فرض کنید $\{s_\alpha\}$ یک تور در G و همگرا به $s\in G$ باشد در اینصورت s^{-1} تنها نقطه انباشتگی تور $\{s_\alpha^{-1}\}$ است زیرا اگر $\{s_\beta^{-1}\}$ یک زیر تور از $\{s_\alpha^{-1}\}$ باشد و $s_\beta^{-1}\to g\in G$ پس $e=s_\beta s_\beta^{-1}\to sg$ در نتیجه $g=s^{-1}$ بنابراین $s_\alpha^{-1}\to s^{-1}$ و این یعنی G گروه توپولوژیکی است.

---

[22] - Ellis

نتیجه۴.۳.۱: اگر S یک گروه نیم توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد آنگاه S یک گروه توپولوژیک است.

برهان: این نتیجه فوراً از نتیجه قبل بدست می‌آید و کافیست در نتیجه قبل S یک گروه نیم توپولوژیک باشد.

تعریف۵.۳.۱: یک شارش سه تایی (S,X,σ)است که در آن S یک نیمگروه و X یک فضای توپولوژیکی ناتهی، فشرده و هاسدورف بوده و همچنین σ یک عمل از S به روی X می‌باشد.

معمولاً اگر عمل شناخته شده باشد از نماد (S,X) برای نمایش یک شارش استفاده می‌کنیم و اگر (S,X) یک شارش باشد و $x \in X$ مجموعه Sx را مدار x و $\overline{Sx}$ را بستار مدار x گوییم.

مثال: فرض کنید X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد و S نیمگروه نگاشت‌های پیوسته روی X تحت عمل ترکیب توابع روی X باشد، در این صورت (S,X) تحت عمل $(s,x) \mapsto s(x)$ یک شارش خواهد بود.

مثال: اگر X یک فضای توپولوژیک فشرده و هاسدورف باشد و همچنین φ یک نگاشت پیوسته از X به داخل خود X باشد، آنگاه $((N,+),X)$ تحت عمل $(n.x) \mapsto \varphi^n(x)$ یک شارش می‌باشد.

تذکر: اگر S یک نیمگروه و T زیر نیمگروه آن باشد، در صورتی $\overline{T}$ یک نیمگروه می‌باشد که $T \subset \Lambda(S)$، برای مشاهده اثبات این حکم می‌توانید به [۱] فصل اول قضیه ۵.۳ مراجعه کنید

تعریف۶.۳.۱: اگر (S,X) یک شارش باشد بستار نیمگروه σ_S در X^X (مجموعه تمام توابع از X به داخل X مجهز به توپولوژی نقطه وار همگرا) را نیمگروه پوششی یا نیمگروه الیس گوییم و آن‌را با نماد $\Sigma(S,X)$ یا به اختصار با نماد Σ نمایش می‌دهیم و توپولوژی Σ، توپولوژی نقطه‌وار همگرا روی X است. حال قضیه اساسی در مورد ساختار Σ را بیان می‌کنیم.

قضیه۷.۳.۱: فرض کنید (S,X) یک شارش باشد، در این صورت Σ یک زیرنیمگروه توپولوژیکی راست و فشرده از X^X می‌باشد و بعلاوه نگاشت $s \mapsto \sigma_s : S \to \Sigma$ یک همریختی از S بروی زیرنیمگروه چگال از Σ، مشمول در $\Lambda(\Sigma)$ است. و بعلاوه برای هر $x \in X$ داریم $\overline{Sx} = \Sigma(x)$.

برهان: با توجه به اینکه فضای X^X فشرده است و همچنین $\Sigma = \overline{\sigma_S} \subset X^X$، لذا Σ یک زیر مجموعه بسته از X^X می‌باشد پس Σ فشرده است. همچنین برای هر $x \in X$ داریم:

$$\Sigma(x) = \overline{\sigma_S}(x) = \overline{Sx}$$

و بعلاوه اگر $f \in \sigma_S$ آنگاه به ازای یک $s \in S$، $f = \sigma_s$. بنابراین اگر $T_\alpha \to T$ (در Σ) آنگاه چون به ازای هر $s \in S$، σ_s پیوسته است داریم:

$$\lambda_f(T_\alpha) = \lambda_{\sigma_S}(T_\alpha) = \sigma_s(T_\alpha) = sT_\alpha \to sT = \sigma_s(T) = \lambda_{\sigma_S}(T) = \lambda_f(T)$$

در نتیجه λ_f پیوسته است و این یعنی اینکه $f \in \Lambda(\Sigma)$ پس:

$$\sigma_S \subset \Lambda(\Sigma) = \{T \in \Sigma; \text{پیوسته باشد } \lambda_T : \Sigma \to \Sigma\}$$

و از اینکه σ_S یک زیرنیمگروه از X^X می‌باشد و نیز $\sigma_S \subset \Lambda(\Sigma)$، نتیجه می‌گیریم که $\Sigma = \overline{\sigma_S}$ یک زیرنیمگروه از X^X می‌باشد. حال اگر $T \in \Sigma$ آنگاه تور $\{\sigma_{s_\alpha}\}$ در Σ وجود دارد بطوریکه $T = \lim \sigma_{s_\alpha}$، در این صورت با فرض اینکه تور $\{t_\alpha\}$ در X همگرا به $t \in X$ باشد داریم:

$$\rho_T(t_\alpha) = Tt_\alpha = \lim \sigma_{s_\alpha} t_\alpha = \lim \sigma_{s_\alpha} t = Tt = \rho_T(t)$$

لذا Σ یک نیمگروه توپولوژیک راست می‌باشد و همچنین برای هر $x \in X$ و $s_1, s_2 \in S$ داریم:

$$\sigma_{s_1 s_2}(x) = s_1(s_2 x) = s_1(\sigma_{s_2} x) = \sigma_{s_1}(\sigma_{s_2} x) = (\sigma_{s_1}\sigma_{s_2})(x)$$

بنابراین نگاشت $s \mapsto \sigma_s$ یک همریختی است و این موضوع برهان قضیه را کامل می‌کند.

حال این سؤال مطرح می‌شود که چه موقع نیمگروه پوششی Σ یک گروه است؟ برای این منظور نیازمند به مفهوم دور شونده می‌باشیم.

تعریف۸.۳.۱: شارش (S,X) را دور شونده گوییم اگر برای هر $x, y \in X$ بطوریکه $x \neq y$ داشته باشیم $\Delta \bigcap \{(sx, sy) : s \in S\}^- = \phi$ که در آن $\Delta := \{(x,x) : x \in X\}$

قضیه۹.۳.۱: فرض کنید (S,X) یک شارش باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

(الف) (S,X) دور شونده است.

(ب) برای هر (x,y) که $(x,y)\in X\times X\setminus\Delta$ و هر تور $\{s_\alpha\}$ در S، در صورتیکه حدهای زیر موجود باشد داریم: $\lim s_\alpha x\neq \lim s_\alpha y$

(ج) Σ یک گروه است که همانی آن تابع همانی است.

(د) Σ ساده چپ است و شامل یک تابع همانی است.

برهان:(ب) $\Rightarrow$ (الف)، فرض کنید (S,X) یک شارش دور شونده باشد و همچنین $x\neq y$ آنگاه از آنجاییکه $\Delta\bigcap\{(sx,sy):s\in S\}^-=\phi$ نتیجه می‌شود که $\lim s_\alpha x\neq \lim s_\alpha y$.

(الف) $\Rightarrow$ (ب)، طبق تعریف شارش دور شونده بدیهی است.

(ج) $\Rightarrow$ (ب)، اگر (ب) برقرار باشد آنگاه هر عضو از Σ یک به یک است زیرا در صورتیکه $x\neq y$ برای هر عضو دلخواه $T\in\Sigma$ که بصورت $T=\lim\sigma_{s_\alpha}$ است داریم:

$$T(x)=\lim\sigma_{s_\alpha}(x)=\lim s_\alpha x\neq \lim s_\alpha y=\lim\sigma_{s_\alpha}(y)=T(y)$$

پس T یک به یک است. بنابراین تنها عنصر خودتوان Σ نگاشت همانی است. اما Σ یک نیمگروه توپولوژیک راست، فشرده و هاسدورف است لذا طبق قضیه ۶.۲.۱، Σ دارای ایدهآل کمین منحصربفرد $K(\Sigma)$ می‌باشد و بنابر قضیه ۱۰.۲.۱، $\Sigma=K(\Sigma)$ یک گروه توپولوژیک است.

(د) $\Rightarrow$ (ج)، طبق قضیه ۱۱.۱.۱ برقرار است.

(ب) $\Rightarrow$ (د)، اگر (د) برقرار باشد آنگاه به ازای هر μ دلخواه متعلق به Σ از آنجاییکه $\Sigma\mu$ یک ایده‌آل چپ Σ می‌باشد اگر L ایده‌آل چپ دیگری از Σ باشد بطوریکه $\mu\in L$ آنگاه $\Sigma\mu\subset L$ واز آنجاییکه Σ طبق فرض ساده چپ می‌باشد پس $\Sigma=\Sigma\mu$، اما Σ شامل تابع همانی است پس یک عضو η در Σ وجود دارد بطوریکه برای هر $x\in X$ داریم $\eta(\mu(x))=x$ و این یعنی اینکه هر عضو از Σ یک به یک است، پس طبق قسمت قبل (ب) برقرار است و این موضوع معادل بودن هر چهار گزاره را ثابت می‌کند.

در بعضی از منابع شارش (S,X) را دور شونده می‌نامند اگر $\Sigma(S,X)$ یک گروه باشد، که ما در قضیه بالا معادل بودن هر دو تعریف را ثابت کردیم.