



قیمت گذاری اختیارات مالی اروپائی، آسیائی و آمریکائی تحت فرآیند قیمت پخش با رژیم متغیر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ندا رضائی

استاد راهنما: دکتر علی فروش باستانی

اردیبهشت ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به

ارزشمندترین کوه‌های زندگیم، پدر و مادر فداکارم
آموزگارانی که برایم زیستن و انسان بودن را معنا کردند...

شکر و قدردانی

حمد و سپاس بی‌قیاس به درگاه معبودی که آدمی را به فضیلت نطق و مزیت عقل از دیگر مخلوقات جهان متمایز گردانید و سپاس که توفیقم داد تا سرشارترین لحظه‌های زندگیم را در راه دانش سپری کنم. اکنون که با عنایت حق نگارش این رساله پایان یافته است، بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که مرا در پیمودن این راه یاری نموده‌اند قدردانی کنم.

از زحمات و راهنمایی‌های بی‌دریغ استاد ارجمندم دکتر علی فروش باستانی در تمام مراحل تحقیق و تدوین این پایان‌نامه کمال قدردانی را دارم. همچنین از اساتید ارجمندم در طول این دوره، دکتر حسن داداشی و دکتر آرش فهیم که در پیمودن این راه مرا یاری نموده‌اند تشکر می‌کنم و از خداوند متعال آرزوی توفیق روزافزون برای این بزرگواران خواهانم.

تشکر و سپاس ویژه خود را تقدیم می‌کنم به پدر بزرگوارم، مادر بسیار مهربانم، برادر و خواهران عزیزم که در تمام مراحل زندگی‌ام همراه و همدم من بوده‌اند و برایشان آرزوی شادی و سربلندی دارم.

از تمام دوستان و همکلاسی‌های بسیار خوب و مهربانم، خانم‌ها: ثریا احمدی، ناهید منصوری، فاطمه قاسمی، شبنم چمن پیرا، منیره عطارعباسی و آقایان: زانیار احمدی، کریم نوروزی پور و آرمین پورخانعلی که با حمایت‌های بی‌دریغشان در طول این دوره برای من خاطراتی زیبا آفریدند صمیمانه تشکر نموده و برایشان آرزوی سلامتی و پیروزی دارم.

چکیده

قیمت گذاری، پوشش و مدیریت ریسک ابزارهای مشتقه از مباحث پراهمیت در ادبیات مالی محسوب می‌شوند چرا که این ابزارهای مالی در حال حاضر بطور وسیعی برای انتقال ریسک در بازارهای مالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در چند دهه گذشته، قیمت گذاری اختیارات به یکی از حوزه‌های مهم در نظریه مالی مدرن تبدیل شده است. در ابتدا اختیارات با استفاده از فرضیات کلاسیک بلک-شولز قیمت گذاری شده و محاسبات پوشش ریسک آن‌ها انجام می‌شد. فرمول بلک-شولز برای قیمت گذاری و پوشش ریسک اختیار از مدل حرکت براونی هندسی استفاده می‌کند تا دینامیک قیمت دارایی پایه را مدل نماید. این مدل شامل دو پارامتر نرخ مورد انتظار بازده و تلاطم است، با این فرض که هر دو ثابت‌های مشخصی باشند. با این وجود، تغییرپذیری تصادفی در پارامترهای بازار در مدل بلک-شولز منعکس نمی‌شود. با استفاده از داده‌های تجربی ثابت شده است که دینامیک قیمت سهام تحت اندازه فیزیکی از یک فرآیند پیچیده‌تر از حرکت براونی هندسی استاندارد با پارامترهای ثابت پیروی می‌کند. لذا تعمیم‌های متعددی از این مدل استاندارد پیشنهاد شده است، از جمله فرآیندهای با رژیم متغیر که برای اولین بار توسط همیلتون (۱۹۸۹) معرفی شدند و در سال‌های اخیر به یک ابزار مدل‌سازی بسیار قوی در عرصه ریاضیات مالی تبدیل شده‌اند. این خانواده از فرآیندها قادر به توصیف نوسانات غیر قابل پیش‌بینی در بسیاری از متغیرهای مالی از قبیل نرخ بهره، نرخ تبادل ارز، قیمت سهام، تلاطم بازار و غیره هستند. امروزه قیمت گذاری عددی و نیمه-تحلیلی اختیارات مالی مبتنی بر این مدل یکی از مورد توجه‌ترین مسائل در عرصه ریاضیات مالی محاسباتی محسوب می‌شود.

در این پایان‌نامه به مطالعه پوشش ریسک و قیمت گذاری اختیاراتی که پارامترهای دارایی ریسکی آن به یک فرآیند مارکف مخفی با مقادیر گسسته وابسته هستند می‌پردازیم. در نتیجه معادلات دیفرانسیل با

مشتقات پاره‌ای جفت شده که مدل کننده دینامیک قیمت چندین اختیار است را بدست می‌آوریم. در ادامه به معرفی روش تفاضل متناهی برای حل این معادلات پرداخته و علاوه بر اثبات ریاضی درستی این روش‌ها به پیاده‌سازی آن‌ها در محیط برنامه‌نویسی MATLAB نیز می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: قیمت‌گذاری اختیارات، پوشش ریسک، اختیارات اروپائی، اختیارات آسیائی، اختیارات آمریکائی، رژیم متغیر، فرآیند مارکف مخفی، روش تفاضل متناهی.

فهرست

پنج	چکیده
۱	پیش‌گفتار
۳	۱ معرفی
۱۵	۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱۵	۱.۲ مفاهیم و ابزارهای مالی
۱۸	۲.۲ مفاهیم احتمالاتی
۱۹	۱.۲.۲ نظریه اندازه و احتمال
۲۵	۲.۲.۲ زنجیرهای مارکف زمان-پیوسته
۳۴	۳.۲ روش‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله
۳۵	۱.۳.۲ روش تفاضل متناهی
۳۹	۲.۳.۲ روش دو جمله‌ای
۴۱	۳.۳.۲ روش مونت کارلو
۴۳	۳ پوشش ریسک میانگین-واریانس اختیارات روی سهام با تغییرات مارکف
۴۵	۱.۳ فرمول‌بندی مدل و مقدمات
۵۰	۲.۳ نتیجه‌گیری

۵۶	۴	قیمت گذاری اختیار اروپائی تحت فرآیند قیمت پخش با رژیم متغیر
۵۷	۱.۴	حل تحلیلی مدل در حالت دو رژیم ($m = 2$)
۵۷	۱.۱.۴	مدل قیمت های اوراق بهادار با تغییرات گسسته در تلاطم
۶۰	۲.۱.۴	قیمت اختیار خرید اروپائی
۶۱	۲.۴	فرمول بندی اختیار خرید اروپائی با رژیم متغیر
۶۵	۱.۲.۴	حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای جفت شده
۶۶	۲.۲.۴	الگوریتم روش
۶۸	۳.۴	نتایج عددی
۷۳	۵	قیمت گذاری اختیار اروپائی-آسیائی تحت فرآیند قیمت پخش با رژیم متغیر
۷۴	۱.۵	اختیارات اروپائی-آسیائی
۷۷	۱.۱.۵	رویکرد معادله دیفرانسیل پاره ای (PDE)
۷۹	۲.۱.۵	PDE راجرز و شای برای اختیارات آسیائی
۸۱	۲.۵	کران های بالا و پایین برای اختیار آسیائی
۸۵	۳.۵	فرمول بندی اختیار خرید اروپائی-آسیائی با رژیم متغیر
۸۸	۱.۳.۵	حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای جفت شده
۹۱	۲.۳.۵	الگوریتم روش
۹۲	۴.۵	نتایج عددی
۹۶	۶	قیمت گذاری اختیار آمریکائی تحت فرآیند قیمت پخش با رژیم متغیر
۹۷	۱.۶	فرمول بندی مسئله
۹۸	۱.۱.۶	معادله دیفرانسیل پاره ای برای اختیار آمریکائی
۹۹	۲.۶	فرمول بندی اختیار آمریکائی با رژیم متغیر
۱۰۲	۳.۶	طرح ضمنی با استفاده از روش جریمه ای

۱۰۹	الگوریتم روش	۱.۳.۶
۱۱۳	مدل درختی	۴.۶
۱۱۴	تقریب تحلیلی برای مدل دو رژیم	۵.۶
۱۱۸	نتایج عددی	۶.۶

آ توزیع سیگنال تلگراف یکپارچه

۱۲۴	توزیع سیگنال تلگراف یکپارچه در حالت متقارن	۱.آ
۱۲۷	توزیع سیگنال تلگراف یکپارچه در حالت نامتقارن	۲.آ
۱۳۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

لیست تصاویر

- ۱.۱ شبیه‌سازی مسیرهای حرکت براونی هندسی با مقادیر متفاوت برای جمله پخش. ۹
- ۲.۱ شبیه‌سازی مسیرهای حرکت براونی هندسی با تغییرات مارکف. ۱۲
- ۳.۱ نرخ‌های بازده تحت حرکت براونی هندسی با تغییرات مارکف. ۱۲
- ۱.۲ نقاط گسسته برای تقریب تفاضل متناهی. ۳۶
- ۲.۲ مدل دوجمله‌ای برای قیمت دارایی پایه در یک دوره. ۴۰
- ۳.۲ مدل دوجمله‌ای برای قیمت کالا تحت اندازه جدید. ۴۰
- ۱.۶ مرز اجرا برای اختیار فروش آمریکائی با پرداخت نهایی $(K - S_t)^+$ ۹۸
- ۲.۶ منحنی قیمت اختیار فروش آمریکائی در $t = 0$ برای دو رژیم مختلف با استفاده از روش
ضمنی. ۱۲۰
- ۳.۶ رویه قیمت اختیار فروش آمریکائی برای دو رژیم مختلف با استفاده از روش ضمنی. ۱۲۰
- ۴.۶ منحنی قیمت اختیار فروش آمریکائی در $t = 0$ برای چهار رژیم مختلف با استفاده از روش
ضمنی. ۱۲۲
- ۵.۶ رویه قیمت اختیار فروش آمریکائی برای چهار رژیم مختلف با استفاده از روش ضمنی. ۱۲۳

پیش‌گفتار

امروزه قیمت‌گذاری اختیاری یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی به شمار می‌رود. از پیشگامان این حوزه می‌توان بلک و شولز (۱۹۷۳) و مرتون (۱۹۷۳) را نام برد که زمینه‌ساز اصلی انجام تحقیقات گسترده در زمینه ارزش‌یابی اختیاری هم به لحاظ نظری و هم به لحاظ عملی بوده‌اند. در مدل بلک-شولز، فرآیند قیمت‌دارایی پایه بوسیله یک حرکت براونی هندسی توصیف می‌شود که در آن پارامترهای رانش و تلاطم ثابت فرض می‌شوند و تحت دو فرض بازار کامل و عدم وجود فرصت‌های آربیتراژ، فرم بسته‌ای برای قیمت‌گذاری اختیاری خرید اروپائی بدست می‌آید. این مدل در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی بطور گسترده‌ای مورد تأیید گرداندگان بازار قرار گرفت و برای سال‌ها جهت قیمت‌گذاری و پوشش ریسک در صنعت مالی استفاده شد. علی‌رغم فرم بسته و محبوبیت این مدل در بازار، ایرادات قابل توجهی نیز بر آن وارد شده است، از جمله اینکه برخی ویژگی‌های تجربی مهم سری‌های زمانی مالی مانند پدیده «لبخند» در تلاطم نتیجه شده^۱ از مدل برای قیمت‌های اختیاری در این مدل منعکس نمی‌شود. همچنین داده‌های واقعی نشان می‌دهند که لگاریتم قیمت‌ها دارای توزیع نرمال نیستند، بلکه دم‌های کلفت‌تر و چولگی نامتقارن نسبت به توزیع گاوسی دارند. همچنین فرآیند حرکت براونی هندسی در مدل بلک-شولز نمی‌تواند خوشه‌ای بودن تلاطم مشاهده شده در بازه دارایی را مدل کند. لذا، تلاش‌های بسیاری در جهت بهبود این مدل صورت گرفت و تاکنون مدل‌های مهمی شامل مدل پرش-پخش مرتون (۱۹۷۶)، مدل‌های تلاطم تصادفی هال و وایت (۱۹۸۷) و ویگینز (۱۹۸۷) و مدل‌های رژیم متغیر نایک (۱۹۹۳) و بافینگتون و الیوت (۲۰۰۲) پیشنهاد شده است. این مدل‌ها در مقایسه با مدل بلک-شولز، روش نسبتاً واقعی‌تری برای توضیح رفتار تجربی قیمت‌های اختیاری و قیمت‌های دارایی پایه ارائه می‌دهند. مدل‌های با رژیم متغیر برای اولین بار در سال ۱۹۸۹ با معرفی مدل سری‌های زمانی خودهمبسته با رژیم

^۱ Implied Volatility

متغیر زمان-گسسته توسط همیلتون مطرح شد و بکارگیری آن به بهبود کامل چولگی، ویژگی خوشه‌ای و ویژگی تلاطم ضمنی بازار منجر شد. یک ویژگی این مدل را می‌توان کامل نبودن بازار برشمرده که عدم وجود یک اندازه مارتینگل ریسک-خنثی یکتا برای قیمت‌گذاری مشتقات را موجب می‌شود و به دنبال آن پوشش ریسک کامل در این مدل را غیر ممکن می‌سازد.

در این پایان‌نامه به قیمت‌گذاری و پوشش ریسک اختیارات مبتنی بر این مدل می‌پردازیم. فرض ما بر این است که رانش و تلاطم دارایی پایه مطابق با وضعیت اقتصادی تغییر می‌کنند که با زنجیر مارکف مخفی زمان-پیوسته مدل می‌شوند. همچنین صرف ریسک^۱ تغییرات رژیم صفر فرض شده است.

این پایان‌نامه شامل شش فصل به این ترتیب است: فصل اول به معرفی فرآیندهای پخش با رژیم متغیر اختصاص دارد. فصل دوم شامل تعاریف و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز است. فصل سوم پوشش ریسک میانگین-واریانس اختیارات مالی تحت این مدل را مورد بررسی قرار می‌دهد و فصول چهارم و پنجم به ترتیب به مطالعه قیمت‌گذاری اختیارات اروپائی و آسیائی با تلاطم وابسته به یک فرآیند مارکف مخفی می‌پردازد. نهایتاً در فصل ششم قیمت‌گذاری اختیارات آمریکائی با پارامترهای رانش و تلاطم وابسته به یک فرآیند مارکف مخفی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. روش‌ها و نتایج عددی حاصل از قیمت‌گذاری هر یک از اختیارات مورد بررسی نیز در فصل مربوطه آورده شده است.

مراجع [۱]، [۲] و [۳] منابع اصلی تحقیق حاضر به شمار می‌روند.

فصل اول

معرفی

این فصل به معرفی مدل بلک-شولز کلاسیک، اشکالات و روش‌های ارائه شده برای بهبود این مدل و همچنین معرفی مدل بلک-شولز با پارامترهای رانش و تلاطم مارکفی اختصاص دارد. قیمت‌گذاری مشتقات به ویژه قیمت‌گذاری اختیارات، حوزه مهمی از تحقیقات متداول در ریاضیات مالی است. اولین گام در راستای درک چگونگی قیمت‌گذاری اختیار معامله، داشتن درک درستی از فرآیند قیمت‌دارایی پایه می‌باشد. بدون شک حرکت براونی درخشان‌ترین ستاره در کهکشان فرآیندهای تصادفی مورد استفاده برای مدل‌سازی نوسانات قیمت است. یک حرکت براونی، فرآیند W_t با نمونه‌های پایا و مستقل است که از توزیع گاوسی پیروی می‌کند. حرکت براونی، مادر آنالیز تصادفی مدرن محسوب می‌شود و از گذشته‌های دور به مدل‌سازی مالی گره خورده است. بشلیه^۱ [۴] مدل قیمت کالای S_t زیر را برای بورس پاریس پیشنهاد داد:

$$S_t = S_0 + \sigma W_t. \quad (1.1)$$

اشکال مدل بشلیه این است که قیمت دارایی مالی S_t ممکن است مقادیر منفی بخود بگیرد. لذا ساموئلسون^۱ [۵] در جهت تصحیح این مدل، دینامیک قیمت جدیدی را به صورت زیر پیشنهاد داد:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

که در آن μ نرخ بازده مورد انتظار^۲ دارایی و σ تلاطم^۳ قیمت دارایی است. با حل معادله (۲.۱) بدست می‌آوریم:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}. \quad (3.1)$$

لذا قیمت سهام در زمان t دارای توزیع لاگ-نرمال با میانگین $\ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t$ و واریانس $\sigma^2 t$ خواهد بود. واضح است که قیمت دارایی همواره مثبت است. در اوایل دهه ۱۹۷۰، بلک^۴ و شولز^۵ [۶] و بطور مستقل مرتون^۶ نظریه قیمت گذاری سازگاری مبتنی بر مدل (۲.۱) ارائه دادند. نتیجه کار آنها مدلی بود که تحت عنوان مدل بلک-شولز^۷ معروف شد. این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت گذاری و پوشش ریسک اختیار معامله و همچنین نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۸۰ و ۹۰ داشته است.

مفروضات اصلی مدل ارائه شده توسط بلک-شولز جهت قیمت گذاری اختیار معامله عبارتند از:

۱. قیمت سهام از یک حرکت براونی هندسی با پارامترهای μ و σ ثابت پیروی می‌کند.

۲. هیچ‌گونه هزینه معاملاتی یا مالیاتی وجود ندارد.

^۱ Samuelson

^۲ Expected Rate of Return

^۳ Volatility

^۴ Black

^۵ Scholes

^۶ Merton

^۷ Black-Scholes

۳. سهام مورد نظر در طول عمر اختیار معامله سود پرداخت نمی‌کند.

۴. هیچ‌گونه فرصت آربیتراژی وجود ندارد.

۵. معاملات اوراق بهادار در هر زمانی امکان‌پذیر هستند.

۶. سرمایه‌گذاران می‌توانند با نرخ بهره ثابت وام بگیرند یا وام دهند.

توجه: همان‌طور که گفته شد پارامتر تلاطم (σ) و نرخ بازده (μ) در این مدل ثابت هستند در نتیجه این مدل نمی‌تواند بطور کامل رفتار تصادفی قیمت دارایی پایه را نشان دهد. داده‌های تجربی نشان می‌دهند که دینامیک قیمت سهام تحت اندازه فیزیکی، از یک فرآیند پیچیده‌تر از حرکت براونی هندسی با تلاطم ثابت پیروی می‌کند. با وجود موفقیت مدل بلک-شولز، اخیراً برخی شواهد تجربی [۷]، سه پدیده تجربی قابل اعتنا را در مقابل این مدل برجسته می‌سازد:

۱. پدیده عدم تقارن و کشیدگی^۱: به این معنی که توزیع بازده به چپ اریب است و رأس بلندتر با دو دم کلفت‌تر نسبت به توزیع نرمال دارد [۸].

۲. پدیده «لبخند» تلاطم^۲: اگر مدل بلک-شولز درست باشد، آنگاه تلاطم نتیجه شده از مدل باید ثابت باشد. با این وجود بطور وسیعی مشاهده شده است که فرآیند تلاطم ویژگی تحدب دارد و در اکثر موارد تابعی محدب از قیمت‌های توافقی است.

۳. خوشه‌ای بودن تلاطم^۳: پدیده‌ای که توسط ماندل برات^۴ [۹] کشف شده است یعنی تلاطم زیاد بازده در برخی دوره‌ها، افزایش تلاطم را در دوره‌های بعدی به همراه دارد و کاهش تلاطم نیز، کاهش تلاطم در دوره‌های بعدی را به همراه خواهد داشت.

^۱ Asymmetric Leptokurtic Feature

^۲ The Volatility Smile

^۳ Volatility Clustering

^۴ Mandelbrot

لذا برای بهبود این روش مدل‌های زیر معرفی شده‌اند تا این ناهماهنگی با بازار را برطرف کنند:

۱. مدل پرش-پخش^۱

۲. مدل تلاطم تصادفی^۲

۳. مدل تلاطم تصادفی و پرش-پخش^۳

مدل پرش-پخش

یکی از اشکالات روش‌های پیشین این بود که دینامیک قیمت دارایی پایه را فرآیند براونی هندسی در نظر می‌گرفتند و در واقع تغییرات قیمت در این مدل پیوسته فرض می‌شد. بسیاری از مطالعات نشان داده‌اند که در قیمت کالا پرش وجود دارد. در مقایسه با توزیع نرمال، لگاریتم فرآیندهای قیمت با پرش، اغلب دارای کشیدگی هستند یعنی دارای دم کلفتی می‌باشند که معمولاً در داده‌های واقعی بازار دیده می‌شوند. لذا مدل پرش-پخش را برای قیمت کالا پیشنهاد دادند که فرآیندی تصادفی است. مرتون [۱۰] و چند محقق دیگر پس از او این مدل را معرفی کردند که در آن μ و σ ثابت هستند و دینامیک قیمت با اضافه کردن یک فرآیند پواسن به فرآیند براونی هندسی تولید می‌شود. بنابراین قیمت سهام تحت این مدل توسط معادله دیفرانسیل تصادفی زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{j=1}^{N_t} Y_j\right), \quad (4.1)$$

که در آن Y_j اندازه پرش با توزیع مشخص داده شده و N_t یک فرآیند شمارش است.

^۱ Jump-Diffusion Model

^۲ Stochastic Volatility Model

^۳ Stochastic Volatility Model and Jump Diffusion Model

مدل تلاطم تصادفی

یکی از جذاب‌ترین جنبه‌های سری‌های زمانی مالی وقتی آشکار می‌شود که تلاطم بازده سهام در طول زمان تغییر می‌کند. خاصیت‌های آماری تلاطم بازده بطور گسترده‌ای در ادبیات مالی و اقتصادی مطالعه شده است. برای نمونه، مطالعات وسیعی در مدل‌سازی تلاطم سهام با تغییر تصادفی توسط هال و وایت^۱ [۱۱]، اندرسون^۲ [۱۲]، استین^۳ [۱۳]، ویگینس^۴ [۱۴]، هستون^۵ [۱۵]، اسکات^۶ [۱۶]، کاکس، اینگرسول و راس^۷ [۱۷]، جانسون و شانو^۸ [۱۸] و محققان دیگر انجام شده است. در این مدل، تلاطم خود در یک معادله دیفرانسیل تصادفی دیگر صدق می‌کند. بعنوان مثال دینامیک قیمت سهام در مدل هال و وایت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}dS_t &= \mu S_t dt + \sigma_t S_t dW_t, \\dY_t &= b Y_t dt + c Y_t dV_t,\end{aligned}\tag{۵.۱}$$

که در آن $f(y) = \sqrt{y}$ ، $\sigma_t = f(Y_t)$ و W_t و V_t حرکت‌های براونی ناهمبسته هستند. داده‌های تجربی نشان می‌دهند که تابع چگالی قیمت سهام با تلاطم تصادفی دم‌های کلفت‌تری نسبت به توزیع نرمال دارد.

^۱ Hull and White

^۲ Anderson

^۳ Stein

^۴ Wiggins

^۵ Heston

^۶ Scott

^۷ Cox, Ingersoll and Ross

^۸ Johnson and Shanno

مدل تلاطم تصادفی با پرش-پخش

تحقیقات تجربی مختلف منجر به ارائه مدل واقعی تری که شامل هر دو جمله تلاطم تصادفی و پرش است شده است. به عنوان مثال، بیتز^۱ [۱۹] و بخشی^۲ [۲۰] چنین مدل‌هایی را تحلیل کرده‌اند و نتایج آن‌ها نشان داده است که مدل‌های فوق برآزش بهتری با مشاهدات تجربی دارند.

مدل بلک-شولز با تغییرات مارکف

وجود رژیم متغیر^۳ در دینامیک بازار پدیده‌ای شناخته شده است. آنچه مکرراً مشاهده شده این است که انتقال بین چرخه اقتصاد انقباضی و انبساطی معمولاً به تغییرات معنی‌داری در بازده سهام، نرخ بازده و دیگر شاخص‌های مالی منجر می‌شود. در مدل با رژیم متغیر پارامترهای قیمت سهام (μ, σ) ، بین تعداد متناهی از حالت‌ها (با توجه به رفتار) بازار تغییر می‌کنند. این فرآیندها اولین بار توسط همیلتون^۴ [۲۱]، [۲۲] در اقتصادسنجی مالی در سال ۱۹۸۹ مطرح شدند. (همچنین به [۲۳] مراجعه شود.) در ادامه به معرفی این فرآیندها بطور اجمالی می‌پردازیم.

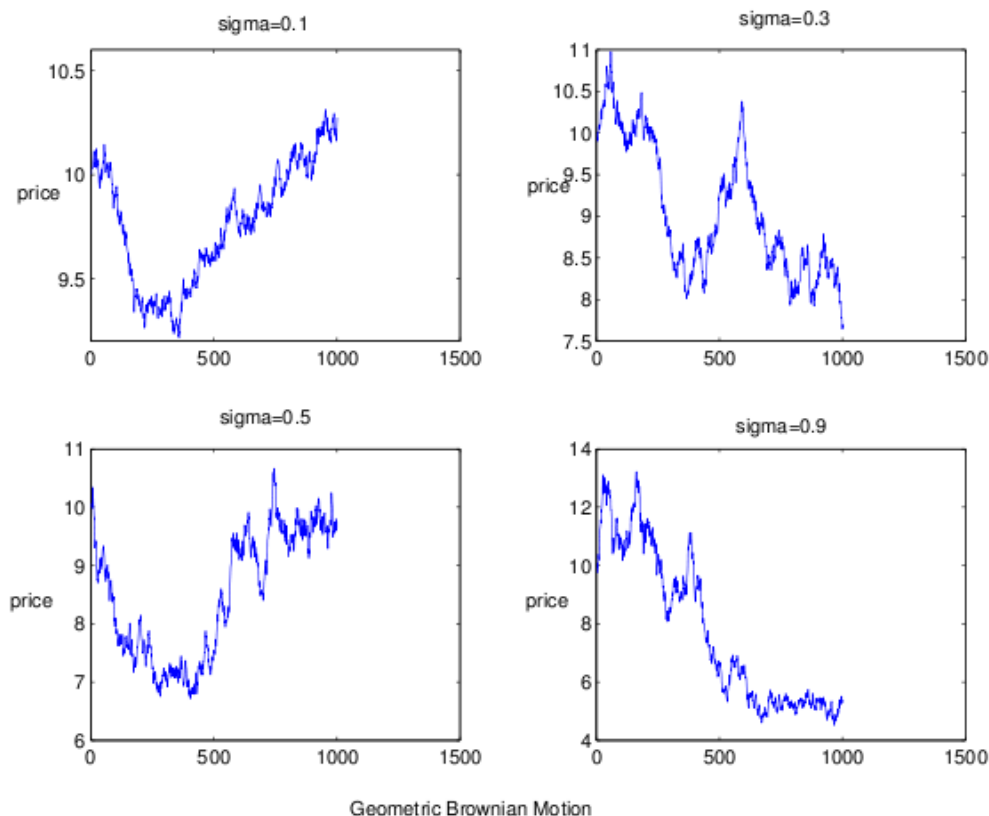
در شکل (۱.۱)، چهار رژیم متفاوت تلاطم را برای حرکت براونی هندسی شبیه‌سازی و مقایسه کرده‌ایم. نمودارها نوسانات متفاوتی از قیمت‌های دارایی را نشان می‌دهند، به این صورت که متناسب با افزایش تلاطم، تغییرات قیمت دارایی افزایش می‌یابد.

^۱ Bates

^۲ Bakshi

^۳ Regime Switching

^۴ Hamilton



شکل ۱.۱: شبیه‌سازی مسیرهای حرکت براونی هندسی با مقادیر متفاوت برای جمله پخش.

(توجه: مقیاس‌های عمودی متفاوت انتخاب شده است تا آشکارتر تفاوت قیمت مربوطه را منعکس کنند.) در بازار سهام، میانگین و واریانس قیمت بازار یا نرخ بازده بطور طبیعی به زمان وابسته هستند. لذا در کار مدل‌سازی مالی ایده خوبی نیست که همیشه پارامترهای قیمت دارایی پایه ثابت فرض شوند. بنابراین تعداد قابل قبولی رژیم برای پارامترها در نظر می‌گیریم تا بتوان بطور موفقیت آمیزی رفتار بازار واقعی را مدل کنیم. در سال‌های اخیر شاهد موفقیت دسته‌ای از مدل‌های قیمت، تحت عنوان مدل‌های با رژیم متغیر و یا مدل بلک-شولز با تغییرات مارکف^۱ بوده‌ایم. این مدل‌ها می‌توانند رفتار دسته‌ای از پارامترهای مالی در بازار را به شیوه‌ای دقیق و موشکافانه تعبیر و توجیه کنند. از آنجائیکه عامل

^۱ Black-Scholes Model with Markov Switching

اصلی کنترل حرکت در قیمت سهام، روند حرکتی بازار است، لازم است که در مدل‌ها به پارامترهای کلیدی اجازه داده شود در جهت حرکت بازار تغییر کنند. مدل با رژیم متغیر یکی از مدل‌هایی است که پارامترهای سهام به وضعیت یا رژیم بازار بستگی دارند و بین تعداد متناهی حالت تغییر می‌کنند. رژیم‌های بازار می‌توانند حالتی از اقتصاد پایه، حالت کلی سرمایه‌گذارها در بازار و عامل‌های اقتصادی دیگر را انعکاس دهند. در این مدل یک فرآیند مارکف مخفی^۱ به مدل حرکت براونی هندسی بلک-شولز برای نوسانات سهام اضافه می‌شود به این صورت که قیمت دارایی‌های پایه بوسیله فرآیند پخش گاوسی تولید می‌شوند و پارامترهای (μ, σ) مقادیر مختلفی وابسته به حالتی از فرآیند مارکف مخفی بخود می‌گیرند. برای درک بهتر این مبحث، یک سبد سرمایه‌گذاری متشکل از یک دارایی غیر ریسکی و یک دارایی ریسکی را در نظر بگیرید. دارایی غیر ریسکی دارای دینامیکی به صورت زیر است:

$$dB_t = \mu B_t dt, \quad (6.1)$$

که در آن B_t نشان دهنده قیمت یک واحد از دارایی غیر ریسکی در زمان t است و r نرخ بازده دارایی غیر ریسکی است. بطور کلی، می‌توان فرض کرد که r بوسیله یک فرآیند با رژیم متغیر تولید می‌شود. دینامیک دارایی ریسکی برابر است با:

$$dS_t = \mu_{X_t} S_t dt + \sigma_{X_t} S_t dW_t, \quad (7.1)$$

که در آن μ_{X_t} نرخ بازده دارایی و σ_{X_t} تلاطم دارایی ریسکی است. لذا فرض می‌کنیم پارامترهای μ_{X_t} و σ_{X_t} بوسیله فرآیند مارکف مخفی X_t - که مستقل از حرکت براونی است - مدل می‌شوند. فرض می‌کنیم X_t مقادیر متناهی $\{1, 2, \dots, m\}$ را بپذیرد و متناظر با آن نرخ بازده و تلاطم به ترتیب مقادیر $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$ و $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ را بخود می‌گیرند. بنابراین فرآیند رانش و تلاطم برای یک زمان خاص در یک حالت باقی می‌مانند و سپس با گذشت مدت زمانی تصادفی و با احتمالی مثبت به