بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

توزیع مجانبی مقادیر ویژه از مرتبه بالاتر مسأله اشتورم — لیوویل در حالت n نقطه برگردان

استاد راهنما

آقای دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور

آقای دکتر حسین خیری

پژوهشگر

فرهاد دستمالچی ساعی

۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

معبودم! ای بود و نبودم! خدای من! عشق من! ای برتر از اندیشهٔ ناتوانم! ای همهٔ هستی من! ای زیباترین، ای کاملترین و ای بهترین آفرینندگان! نمی‌دانم کدامین واژه را به کار برم تا از بابت این آرامشی که به من عطا کردی تشکر کرده باشم. یا الهی و ربی من لی غیرک.

درود و سپاس یگانهٔ جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی: نعمت خداوندیت.

می دانم که نخواهم توانست سپاس خود را در قالب کلمات در آورده و شکرگزار تو باشم. لذا از کلام مولای متقیان علی (ع) کمک می گیرم و

«گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.»

به یاد پدر و مادر عزیزم

الهی! دست ناتوانم را گیر که اگر چه پیمان بشکستم
ولی از شوق تو دل را نگسستم

تا در آیی و دهی دست به دستم

که به حق، باده پرستم

و تو ای روح من و

ماتم و اندوه من و

صاحب این بحر به پا خاسته در عالم ظلمت

که به حکمت

غمم افزودی و

در یاد من سوخته دل بودی و

چون رود خروشان

به کویر دل سوزان

به جهان غم و خسران

عطش خاک نشاندی

و در آن روح دمیدی

به امیدی

که شناسد که تو تنها می هستی

آخر باده پرستی

و تو تنها کس و جاوید در این بادیه هستی.

گر چه از یاد پدر سوخته دل هستم و

یادش ندهم یکدم از این دستم و

شبها دگر از نغمهٔ روحانی او نیست خبر

تقدیم به:

همسر گرامیم

و

فرزندانم

علیرضا و امیر هادی

تقدیر و تشکر

در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. در این میان اساتیدی نیز هستند که همچون ستاره‌ای تابناک در آسمان علم و دانش و انسانیت درخشیده‌اند و گوشه‌ای از تاریکی جهل مرا به نور علم خود مزین کرده‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر جدیری اکبرفام و خانواده ایشان را که بارها و بارها از نظر علمی و همینطور روحی و روانی پشتیبان من بوده‌اند، جبران نماید. همچنین، می‌دانم که تا پایان عمر خود نخواهم توانست ذره‌ای از محبتهای دوست و برادر عزیزم جناب آقای دکتر خیری را جبران کنم. تنها کاری که می‌توانم در حال حاضر انجام دهم آن است که به این دو استاد گرامی بگویم سپاسگذارم.

بر خود لازم می‌دانم از بابت زحمات اساتید دیگرم از جمله جناب آقای دکتر رحیمی و دکتر ایواز، دکتر شهمراد مدیر محترم گروه ریاضی، همینطور دوستان بزرگوارم دکتر فغفوری، آقای تن‌آرا و تمامی اساتید و دوستانی که در طول دوران تحصیل مشوق من بوده‌اند، تشکر نمایم.

در پایان از زحمات جناب آقای دکتر حصارکی و دکتر قنبری اساتید داور خارجی و خانم دکتر بهرامی داور داخلی جلسه دفاعیه خود، جناب آقای دکتر نقی پور معاونت محترم پژوهشی دانشکده تشکر می‌کنم.

نام خانوادگی دانشجو: دستمالچی ساعی　　　　نام: فرهاد

عنوان: توزیع مجانبی مقادیر ویژه از مرتبه بالاتر مسأله اشتورم — لیوویل در حالت n نقطه برگردان

استاد راهنما : آقای دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام

استاد مشاور: آقای دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: دکتری　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: معادلات دیفرانسیل　　دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی　　تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۸۸　　تعداد صفحه: ۱۰۲

کلید واژه‌ها: معادله اشتورم— لیوویل، توزیع مجانبی، مقادیر ویژه، نقطه برگردان

چکیده

در این رساله، رفتار مجانبی مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل اشتورم — لیوویل

$$y'' + (\lambda r(x) - q(x))y = ۰, \quad ۰ < x < ۱$$

را استنتاج می‌کنیم که در آن $r(x)$ دارای n صفر موسوم به نقاط برگردان و λ پارامتر حقیقی و $q(x)$ انتگرالپذیر و کراندار روی $[۰, ۱]$ می‌باشد. همچنین در این رساله با استفاده از تکنیک به کار رفته توسط هاریس و تالاریکو در مقاله[۱۳] توزیع مجانبی مقادیر ویژه مثبت از مرتبه بالاتر با شرایط دیریکله، $y(۰) = y(۱) = ۰$، به دست می‌آوریم. تکنیک به کار برده شده متفاوت از روش ابرهارد و فرایلینگ[۶] می‌باشد. لازم به ذکر است جمله اول توزیع مجانبی مقادیر ویژه مثبت و منفی قبلاً توسط اتکینسون و مینگرالی[۲] به دست آمده است.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

نظریه نقطه برگردان از مباحث مهم در بررسی ماهیت و چگونگی جوابهای مجانبی معادلات دیفرانسیل عادی وابسته به یک پارامتر است. نظر به این که نقاط برگردان نقاط خاصی هستند، تجزیه و تحلیل آنها مستلزم یک شناخت و درک کامل از ماهیت مجانبی جواب‌های معادله دیفرانسیل مربوط است. در حقیقت، ماهیت رفتار جواب‌های مجانبی در همسایگی نقطه برگردان تغییر می‌کند.

امروزه روشهای عددی و توزیع مجانبی برای تقریب مقادیر ویژه در حد وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته و اغلب در مکانیک، فیزیک، الکترونیک و سایر شاخه‌های علوم طبیعی ظاهر شده است. به طور کلی، موفقیت‌های شایان توجهِ در مطالعه نظریه طیفی به ویژه در مسائل عکس برای معادله اشتورم — لیوویل حاصل شده است. مطالعات اولیه در این زمینه توسط برنولی، دالامبر، اویلر، لیوویل و اشتورم انجام گرفته است و می‌توان گفت که در قرن بیستم توسعه و پیشرفت‌های زیادی به دست آمده است.

در این رساله با توجه به اهمیت موضوع، هدف به دست آوردن توزیع مجانبی مقادیر ویژه معادله دیفرانسیل مشهور اشتورم — لیوویل

$$y'' + (\lambda r(x) - q(x))y = 0, \quad a \le x \le b$$

است که در آن نیاز به حل معادله و یا پیدا کردن جواب مجانبی نیست.

بسیاری از نتایج در حالت کلاسیک، $r(x) > 0$ ، توسط اینس [۱۵] و گوبرگ و کرین [۱۱] به دست آمده است. آنها فرمول مجانبی را برای تعداد صفرهای جواب غیر بدیهی توسعه دادند که برای تعیین تخمین مجانبی مقادیر ویژه مورد استفاده قرار می‌گیرد[۲].

یادآوری می‌کنیم که در حالت کلاسیک توزیع مجانبی مقادیر ویژه را می‌توانیم به وسیله تبدیل لیوویل به دست آوریم. در سال ۱۸۳۷ لیوویل رفتار جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی شامل یک پارامتر بزرگ را مورد بررسی قرار داد. وی با استفاده از تبدیلات

$$\xi(x) = \int \sqrt{r(x)}dx, \qquad y(x) = r^{\frac{-1}{4}}(x)W(\xi) \qquad (1.0)$$

معادله اشتورم — لیوویل را به صورت زیر درآورد

$$\frac{d^2W}{d\xi^2}+(\lambda-R(\xi))W(\xi)=0 \qquad (۲.۰)$$

که در آن

$$R(\xi)=\frac{r^{''}(x)}{4r^2(x)}-\frac{5r^{'2}}{16r}+\frac{q(x)}{r(x)}=-\frac{d^2}{r^{\frac{3}{4}}dx^2}(\frac{1}{r^{\frac{1}{4}}})+\frac{q(x)}{r(x)}.$$

تغییر متغیر فوق غالباً تبدیل لیوویل — گرین نامیده می‌شود. واضح است که اگر $r(x)$ دارای صفر یا ناهموار باشد، این تبدیل قابل اجرا نخواهد بود. با فرض این که $R(\xi)\in C^3[0,B]$، $B=\int_a^b r(x)dx$ و همچنین $R(\xi)$ دارای مقدار متوسط صفر در بازه $[0,B]$ باشد. در این صورت توزیع مجانبی مقادیر ویژه با شرایط مرزی دیریکله، $W(0)=W(\pi)=0$، به فرم زیر خواهد بود[۱۴].

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{\int_0^\pi R^2(x)dx-R^{'}(\pi)+R^{'}(0)}{8n^3\pi}+O(\frac{1}{n^4})$$

با وجود این، همان طور که ذکر شد این تقریب وقتی تابع وزن دارای صفر باشد با شکست مواجه می‌شود.

مسأله اشتورم — لیوویل به خاطر کاربردهای متعددش بسیار مورد توجه است. به عنوان مثال، پدیده‌های مشخصی در فیزیک مانند انتشار نور در یک محیط ناهمگن منجر به معادله اشتورم — لیوویل می‌شود که در آن تابع $r(x)$ در نقطه‌ای از بازه $[a,b]$ صفر است[۴۲]. اغلب در متون ریاضی صفرهای تابع $r(x)$ به نقاط برگردان معروف هستند.

تخمین مجانبی جوابها، موقعی که ضرایب هموار باشند به وسیله لانگر [22, 25] مورد بررسی قرار گرفته است. انگیزه اصلی او، علاقه‌اش در به کار گیری نظریه جوابهای مجانبی معادله در نواحی شامل صفرهای $r(x)$ بر اساس حقایق ریاضی بود. روش لانگر مبتنی بر تبدیل معادله داده شده به یک معادله ساده‌تر بود که به آسانی حل می‌شد. بررسی دقیق این مسأله توسط الور [32, 33, 34, 35] و ابرهارد و فرایلینگ [٦] انجام گرفته است. همچنین واسوف[۴۲] و لیونگ [۲۷] با استفاده از فرایند «دوختن» بررسیهای کاملی انجام داده‌اند.

نکته قابل ذکر این است که جمله اول در توزیع مجانبی مقادیر ویژه مثبت فقط به مقادیر مثبت $r(x)$ در $[a,b]$ بستگی دارد. با وجود این، به دست آوردن چنین نتایجی در حالتی که تابع وزن دارای صفر باشد یعنی تغییر علامت دهد(حالت غیر کلاسیک)، بسیار مشکل است. مسأله اشتورم — لیوویل نامعین روی یک بازه متناهی توسط

ریچاردسون در سال ۱۹۸۵ مورد بررسی قرار گرفته است[۳۷]. اتکینسون و مینگرالی (۱۹۸۶ —[۲]) تخمین مجانبی تعداد صفرها و بنابراین مقادیر ویژه مسأله اشتورم — لیوویل نامعین را پیدا کردند. آنها حدس جورگنز را (۱۹۶۴ — [۲۰]) را که به مدت ۲۰ سال به صورت مسأله باز مانده بود ثابت نمودند. در حقیقت اتکینسون و مینگرالی رابطه زیر را اثبات کردند[۲].

$$\sqrt{\lambda_n^+} = \frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{r_+(x)}dx} + O(1), \quad (n \to \infty)$$

که در آن $r_+(x) = max\{0\,, r(x)\}$ و λ_n^+ همان مقدار ویژه مثبت nام می‌باشد.

لازم به توضیح است که نامعین بودن مسأله ایجاب می‌کند که جملات اضافی بین $\frac{n\pi}{\int_a^b \sqrt{r_+(x)dx}}$ و $O(\frac{1}{n})$ وجود داشته باشد. در حالی که در حالت معین چنین جمله‌ای وجود ندارد[۳۱]. همچنین روش «دوختن» که در مقاله دیاچنکو [۴] استفاده شده است نشان می‌دهد که مجانبهای مقادیر ویژه مثبت تا سه جمله می‌تواند در حالت یک نقطه برگردان و دو نقطه برگردان به دست آید که در آن تابع $r(x)$ در نقاط انتهایی بازه $[a, b]$ منفی است.

هدف اصلی در این رساله یافتن توزیع مجانبی مقادیر ویژه در حالت n نقطه برگردان تا سه جمله می‌باشد که ترتیب ارائه مطالب با توجه به حالات مختلف تابع وزن $r(x)$ به شرح زیر است.

در فصل ۱ به تعاریف و نتایج اولیه نظریه اشتورم — لیوویل اشاره شده است.

در فصل ۲ توزیع مجانبی مقادیر ویژه معادله

$$y'' + (\lambda x^\alpha - q(x))y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \;\; \alpha > 0, \qquad x \in [0, 1],$$

مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل ۳ توزیع مجانبی مقادیر ویژه از مرتبه بالاتر معادله

$$y'' + (\lambda x^\alpha - q(x))y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \;\; \alpha > 0, \qquad x \in [a, b],$$

که درآن $a < 0 < b$ و α فرد می‌باشد مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل ۴ توزیع مجانبی مقادیر ویژه

$$y'' + (\lambda(x - x_\nu)^l h(x) - q(x))y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0, \;\; l \in N, \qquad x \in [a, b],$$

حل و بحث شده است که در آن $a < 0 < b$ و نقطه برگردان x_ν از مرتبه دلخواه l می‌باشد.

بالاخره در فصل ۵ توزیع مجانبی مقادیر ویژه از مرتبه بالاتر معادله

$$y'' + (\lambda(x-x_1)^{l_1}(x-x_2)^{l_2}\cdots(x-x_n)^{l_n}h(x) - q(x))y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \;\; l_i \in N, \quad x \in [0,1],$$

در چهار حالت مورد بررسی قرار گرفته است که در آن نقاط برگردان x_1، x_2،...، x_n به ترتیب از مرتبه‌های l_1، l_2،...، l_n در نظر گرفته شده‌اند.

از این رساله مقاله‌های [۳۸] و [۳۰] به چاپ رسیده است.

فصل ۱

تعاریف و نتایج اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل مقدمه‌ای بر نظریه طیفی اشتورم – لیوویل در بازه متناهی را ارائه می‌دهیم و مطالعه‌ای در زمینه خواص مسأل مقدار مرزی اشتورم – لیوویل خواهیم داشت. به ویژه قضیه وجودی و رفتار مجانبی مقادیر ویژه و توابع ویژه را اثبات می‌کنیم. نشان می‌دهیم که مجموعه توابع ویژه مسأله مقدار مرزی کامل است و پایه‌ای برای $L_2(0,\pi)$ تشکیل می‌دهد. همچنین خواص نوسانی توابع ویژه را بیان و ثابت می‌کنیم n امین تابع ویژه دقیقاً دارای n صفر در بازه $(0,\pi)$ است.

۲.۱ تعاریف اولیه

معادله

$$y'' + (\lambda r(x) - q(x))y = 0 \tag{۱.۱}$$

را با شرایط مرزی دلخواه در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱.۱ مسأله مقدار اولیه مربوط به معادله (۱.۱) را در نظر می گیریم. مقادیری از λ که به‌ازای آنها مسأله مقدار اولیه دارای جواب‌های غیر بدیهی باشد **مقادیر ویژه** مسأله و جواب‌های متناظر را **توابع ویژه** می نامند. تابع $q(x)$ به **تابع پتانسیل** ، $r(x)$ به **تابع وزن** و مجموعه مقادیر ویژه به **طیف مسأله** مشهور هستند.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $I=[a,b]$ و $r(x)$ پیوسته و I_+ مجموعه x هائی از I باشد که به‌ازای آنها $r(x)>0$ و I_- مجموعه x هائی از I که به ازای آنها $r(x)<0$ و همچنین I_0 مجموعه x هائی باشد که در آنها $r(x)=0$. اگر هر یک از مجموعه‌های I_+ و I_- دارای اندازه لبگ مثبت باشد، آنگاه تابع وزن $r(x)$ را **نامعین** گوئیم. بعلاوه ریشه‌های تابع وزن، **نقاط برگردان** نامیده می‌شوند.

به عنوان مثال این حالت در برخی از مسائل فیزیک مانند معادله $-((1-x^2)y')'=-\lambda xy$، $-1<x<1$، در تئوری انتقال الکترون ظاهر می‌شود. یا معادله یک بعدی شرودینگر که یکی از معادلات اساسی در مکانیک کوانتم است به صورت زیر بیان می‌شود

$$-\frac{\hbar}{2m}y''(x)+(V(x)-E)y(x)=0,$$

که در آن m جرم ماده و $\hbar$ ثابت پلانک تقسیم بر 2π است. تابع پتانسیل $V(x)$ توصیف کننده میدان پتانسیل، یک مقدار ویژه E به عنوان سطح انرژی و تابع ویژه متناظر معرف تابع موج ماده می‌باشد.

تعریف ۳.۱ منظور از مسأله اشتورم – **لیوویل کلاسیک** آن است که تابع وزن $r(x)$ روی بازهٔ $[a,b]$ تابع اکیداً مثبت باشد.

۳.۱ نتایج اولیه در حالت کلاسیک

مسأله مقدار مرزی $L:=L(q(x),h,H)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\ell(y):=-y''+q(x)y=\lambda y,\qquad 0<x<\pi \tag{۲.۱}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0,\qquad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \tag{۳.۱}$$

که در آن $q(x) \in L_2(0,\pi)$، λ پارامتر حقیقی، h و H مقادیر حقیقی ثابت هستند که ℓ همان اپراتور اشتورم – لیوویل است.

تعریف ۴.۱ تابعی که در هر نقطه از فضای مختلط تحلیلی باشد تابع تام نامیده می‌شود.

برای هر تابع تام نماد $M_f(r)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$M_f(r) = max_{|z|=r} f(z)$$

تعریف ۵.۱ تابع تام از مرتبه متناهی نامیده می‌شود هرگاه به‌ازای r به اندازه کافی بزرگ، رابطه زیر برقرار باشد

$$\exists k > 0 : \quad M_f(r) < e^{r^k}$$

بزرگترین کران پایین k را مرتبه تابع تام $f(z)$ می‌نامند.

حال فرض کنید $C(x,\lambda)$، $S(x,\lambda)$، $\varphi(x,\lambda)$ و $\psi(x,\lambda)$ جواب‌های معادله (۲.۱) با شرایط اولیه زیر باشند

$$C(0,\lambda) = 1, \qquad C'(0,\lambda) = 0, \qquad S(0,\lambda) = 0, \qquad S'(0,\lambda) = 1,$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \qquad \varphi'(0,\lambda) = h, \qquad \psi(\pi,\lambda) = 1, \qquad \psi'(\pi,\lambda) = -H,$$

به‌ازای هر x ثابت، توابع $C(x,\lambda)$، $S(x,\lambda)$، $\varphi(x,\lambda)$ و $\psi(x,\lambda)$ توابع تام نسبت به λ از مرتبه $\frac{1}{2}$ هستند. واضح است که توابع ϕ و ψ در روابط (۳.۱) صدق می‌کنند. به عبارت دیگر

$$U(\varphi) := \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \quad V(\psi) := \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0$$

حال نماد $\Delta(\lambda)$ را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\Delta(\lambda) = < \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) > \qquad (۴.۱)$$

که درآن $<.,.>$ به صورت

$$< y(x), z(x) >:= y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$$

تعریف شده و آن رونسکین y و z نامیده می‌شود. تابع $\Delta(\lambda)$ را تابع مشخصه مسأله L می‌نامند. می‌دانیم که $< \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) >$ با توجه به فرمول لیوویل — آبل رونسکین به x بستگی ندارد. بنابراین با قراردادن $x = 0$ و $x = \pi$ در (۴.۱) خواهیم داشت

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi) \tag{۵.۱}$$

تابع $\Delta(\lambda)$ تابع تام نسبت به λ بوده و دارای تعداد شمارا، ریشه است.

۱.۳.۱ مقادیر ویژه

قضیه ۶.۱ مقادیر ویژه مسأله مقدار مرزی L، $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$، همان ریشه‌های تابع مشخصه $\Delta(\lambda)$، هستند و توابع $\varphi(x,\lambda_n)$ و $\psi(x,\lambda_n)$ توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه λ_n هستند. همچنین دنباله $\{\beta_n\}$ طوری وجود دارد که

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n), \qquad \beta_n \neq 0 \tag{۶.۱}$$

برهان . فرض کنیم λ_0 یک صفر $\Delta(\lambda)$ باشد. پس بنابه شرایط مرزی $U(\varphi), V(\psi)$ داریم $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0\varphi(x,\lambda_0)$، که در آن $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ در شرایط مرزی صدق می‌کنند. بنابراین λ_0 یک مقدار ویژه است و $\psi(x,\lambda_0), \varphi(x,\lambda_0)$ توابع ویژه متناظر با λ_0 هستند. حال فرض کنیم λ_0 مقدار ویژه L باشد و y_0 یک تابع ویژه متناظرش باشد. در این صورت $U(y_0) = V(y_0) = 0$. واضح است که $y_0(0) \neq 0$. بدون خلل به کلیت فرض کنیم $y_0(0) = 1$، در این صورت $y_0'(0) = h$ و در نتیجه $y_0(x) = \varphi(x,\lambda_0)$. از طرفی

$$\Delta(\lambda_0) = V(\varphi(x,\lambda_0)) = V(y_0(x)) = 0,$$

یعنی برای هر مقدار ویژه یک تابع ویژه وجود دارد. □

با تعریف نماد

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{۷.۱}$$

رشته اعداد $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ را اعداد وزنی و مجموعه $\{\lambda_n,\alpha_n\}$ را داده طیفی L می‌نامند.

قضیه ۷.۱ رابطه زیر برقرار است

$$\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n) \tag{۸.۱}$$

که در آن اعداد β_n به وسیله رابطه (۶.۱) معین شده و داریم

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n}.$$

برهان . چون

$$-\psi''(x,\lambda_n)+q(x)\psi(x,\lambda_n)=\lambda\psi(x,\lambda_n),\ \ -\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda\varphi(x,\lambda_n)$$

داریم

$$\frac{d}{dx}<\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)>=(\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n),$$

واز آنجا

$$(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)dx=<\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda_n)>|_0^\pi=-\Delta(\lambda)+\Delta(\lambda_n)$$

حال اگر $\lambda\to\lambda_n$، آنگاه

$$\int_0^\pi \psi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)dx \doteq -\dot{\Delta}(\lambda_n)$$

و حکم برقرار است. □

قضیه ۸.۱ مقادیر ویژه $\{\lambda_n\}$ و توابع ویژه متناظر $\varphi(x,\lambda_n)$ و $\psi(x,\lambda_n)$ حقیقی بوده و تمامی ریشه‌های $\Delta(\lambda)$ ساده هستند. به عبارت دیگر $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. بعلاوه، توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه متمایز در $L_2(0,\pi)$ متعامد می‌باشند.

برهان . فرض کنیم λ_k و λ_n به ترتیب مقادیر ویژه با توابع ویژه $y_k(x)$ و $y_n(x)$ باشند. در این صورت به وسیله انتگرال‌گیری جزبه‌جز داریم

$$\int_0^\pi \ell y_n(x) y_k(x) dx = \int_0^\pi y_n(x) \ell y_k(x) dx,$$

و از آنجا

$$\lambda_n \int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx = \lambda_k \int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx,$$

و یا

$$\int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx = 0.$$

بعلاوه، فرض کنیم $\lambda^0 = u + iv, \quad v \neq 0$ مقدار ویژه غیر حقیقی با تابع ویژه $y^0(x) \neq 0$ باشد. چون $q(x)$، h و H حقیقی هستند بنابراین $\bar{\lambda^0} = u - iv$ نیز مقدار ویژه متناظر با تابع ویژه $\bar{y^0}(x)$ است. چون $\lambda^0 \neq \bar{\lambda^0}$، داریم

$$\| y^0 \|_{L_2}^2 = \int_0^\pi y^0(x) \bar{y^0}(x) = 0,$$

و این تناقض است پس تمامی مقادیر ویژه حقیقی بوده و به طبع آن توابع ویژه متناظر $\varphi(x,\lambda_n)$ و $\psi(x,\lambda_n)$ نیز حقیقی می‌باشند. چون $\alpha_n, \beta_n \neq 0$، لذا بنابه قضیه ۷.۱ نتیجه می‌گیریم $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. □

مثال ۹.۱ در مسأله L فرض کنید $q(x) = 0$، $h = H = 0$ و $\lambda = \rho^2$. در این صورت در مسأله مقدار مرزی

$$y'' + \rho^2 y = 0, \qquad 0 < x < \pi$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0,$$

روابط زیر به آسانی قابل بررسی هستند

$$C(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) = \cos \rho x,$$

$$S(x,\lambda)=\frac{\sin\rho x}{\rho},$$

$$\psi(x,\lambda)=\cos\rho(\pi-x),$$

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos nx,\ \beta_n=(-1)^n,$$

$$\Delta(\lambda)=-\rho\sin\rho\pi.$$

واضح است که $\lambda_n=n^2,\ n\geq 0$ ریشه‌های معادله $\Delta(\lambda)=0$ بوده و در نتیجه همان مقادیر ویژه مسأله فوق است.

لم ۱۰.۱ فرمول‌های مجانبی زیر به طور یکنواخت نسبت به $x\in[0,\pi]$ وقتی $|\rho|\to\infty$ برقرار هستند.

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\rho x+O(\tfrac{1}{|\rho|}exp(|\tau|x))=O(exp(|\tau|x)),$$
$$\varphi'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+O(exp(|\tau|x))=O(|\rho|exp(|\tau|x)),\qquad (۹.۱)$$

$$\psi(x,\lambda)=\cos\rho(\pi-x)+O(\tfrac{1}{|\rho|}exp(|\tau|(\pi-x)))=O(exp(|\tau|(\pi-x))),$$
$$\psi'(x,\lambda)=\rho\sin\rho(\pi-x)+O(exp(|\tau|(\pi-x)))=O(|\rho|exp(|\tau|(\pi-x))),\qquad (۱۰.۱)$$

که در آن $\lambda=\rho^2$ و $\tau=Im\rho$.

برهان . ر. ک. [۱۰]. □

قضیه اساسی زیر وجود و رفتار مجانبی مقادیر ویژه مسأله L را بیان می‌کند.

قضیه ۱۱.۱ مسأله مقدار مرزی L، دارای مجموعه شمارایی از مقادیر ویژه $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ است و به‌ازای $n\geq 0$ داریم

$$\rho_n=\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{\omega}{n\pi}+\frac{k_n}{n},\qquad \{k_n\}\in l_2 \qquad (۱۱.۱)$$

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos nx+\frac{\xi_n(x)}{n},\qquad |\xi_n(x)|\leq C \qquad (۱۲.۱)$$