فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان نامه به معرفی حلقه‌های قویاً خوش‌ترکیب و بررسی شرایطی که تحت آن حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی قویاً خوش‌ترکیب شود، می پردازیم.
بنابر تعریف، یک حلقه را خوش‌ترکیب گوییم، هرگاه هر عضوش به صورت حاصل جمع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکال نوشته شود؛ و یک حلقه را قویاً خوش‌ترکیب گوییم، هرگاه هر عضو آن را بتوان به صورت حاصل جمع یک عنصر خودتوان و یک عنصر یکال که با هم جابه جا می شوند، نوشت.
در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد استفاده در فصول بعدی بیان شده اند.
در فصل دوم، ابتدا حلقه‌های n-خوش‌ترکیب را معرفی کرده و برخی از نتایج و قضایای راجع به این حلقه‌ها را بیان می‌کنیم، سپس با تعریف شرط (SI) بر روی حلقه‌ی R نشان می‌دهیم که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها بر روی حلقه‌ی R که دارای شرط (SI) است، خوش‌ترکیب نیست.(در حالت کلی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها، خوش‌ترکیب، قویاً خوش‌ترکیب، ضعیفاً خوش‌ترکیب، و n-خوش‌ترکیب نیست.) همچنین به معرفی حلقه‌های قویاً خوش‌ترکیب و به طور یکتا (قویاً) خوش‌ترکیب می‌پردازیم و لمی را اثبات می‌کنیم که در فصل‌های بعدی بسیار از آن استفاده خواهیم کرد و با استفاده از این لم نشان می‌دهیم که حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی بر روی حلقه‌های موضعی خنثی (به عنوان مثال حلقه‌های تعویض‌پذیر موضعی) قویاً خوش‌ترکیب است.
در فصل سوم به بیان شرایط لازم و کافی برای قویاً خوش‌ترکیبی حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی می‌پردازیم. در ابتدا عمل‌گر Bl را برروی زیرمجموعه‌ای از R تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر $U(R) = \mathrm{Bl}(J(R))$ باشد، آن‌گاه $\mathbb{T}_n(R)$ قویاً خوش‌ترکیب است. سپس با استفاده

از این عمل‌گر مجموعه‌های پیوسته‌ی $J_i(R)$ را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مجموعه‌های J_i می‌توانند شرایط دقیق‌تری را برای قویاً خوش‌ترکیبی حلقه‌ی $\mathbb{T}_n(R)$ بیان کنند، که البته این شرایط کافی هستند اما لازم نیستند. در ادامه‌ی فصل با تعریف h-حلقه، عکس مطلب بالا را اثبات می‌کنیم.

در فصل چهارم با استفاده از حلقه‌ی سری‌های توانی کج، مثال‌هایی از حلقه‌های موضعی غیرخنثی ارائه می‌دهیم. همچنین نشان می‌دهیم که حلقه‌ی $\mathbb{T}_n(R[[x;\sigma]])$، اگرچه $R[[x;\sigma]]$ حلقه‌ی موضعی غیرخنثی باشد، قویاً خوش‌ترکیب است. در ادامه‌ی فصل حلقه‌ی سری‌های توانی صوری ${}_\sigma A_\tau$ را بر روی حلقه‌ی تعویض پذیر موضعی R که دارای دو درون‌ریختی حلقه‌ای σ و τ که با هم جابه‌جا می‌شوند، می‌باشد، معرفی می‌کنیم و نتایج و مثال‌های ارائه شده در مورد حلقه‌ی سری‌های توانی کج را نیز برای این حلقه بیان می‌کنیم.

در فصل پنجم تعمیمی از حلقه‌های ماتریس‌های بالا مثلثی و کامل را با عنوان حلقه‌های وقوع ($I(X,R)$) بر روی مجموعه‌ی جزئاً مرتب به طور موضعی متناهی معرفی می‌کنیم و لم‌هایی را در مورد این حلقه‌ها ارائه می‌دهیم. در ادامه بعضی از نتایج گفته شده در فصل‌های قبلی را برای این حلقه‌ها توسیع می‌دهیم و نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ی موضعی خنثی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $I(X,R)$ قویاً خوش‌ترکیب است.

در این پایان نامه، $J(R)$، $U(R)$، $Z(R)$ و $Id(R)$ نشان‌دهنده‌ی رادیکال جیکوبسون، گروه یکال‌های R، مرکز R، و مجموعه‌ی خودتوان‌های R هستند.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل ابتدا تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز را بیان می‌کنیم و به معرفی بعضی حلقه‌ها و ویژگی‌های آن‌ها که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، می‌پردازیم. در انتها با معرفی عنصر جبری یک حلقه فصل اول را به پایان می‌رسانیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. عضو $x \in R$ را مقسوم علیه صفر[۱] می‌نامیم، هرگاه عضوی مانند $y \in R$ مخالف صفر موجودباشد، به طوری‌که $xy = ۰$.*

تعریف ۲.۱.۱. *هر حلقه‌ی تعویض‌پذیر یک‌دار که مقسوم‌علیه صفر نداشته باشد را حوزه‌صحیح[۲] می‌نامیم.*

تعریف ۳.۱.۱. *هر حلقه‌ی یک‌دار که هرعضو غیرصفر آن یکال باشد را حلقه‌ی تقسیم[۳] می‌گوییم.*

[۱] zero divisor
[۲] integral domain
[۳] division ring

تعریف ۴.۱.۱. *حلقه‌ی تقسیم تعویض پذیر میدان[۴] نام دارد.*

تعریف ۵.۱.۱. *میدان F را یک میدان اول[۵] می نامیم، هرگاه F شامل هیچ زیر میدان سره نباشد.*

قضیه ۱.۱.۱. *زیر میدان اول هر میدان با $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Z}_p$ که p عددی اول است، یک‌ریخت است.*

اثبات. ر.ک.[۲۳]

تعریف ۶.۱.۱. *مرکز حلقه‌ی R را توسط مجموعه‌ی زیر تعریف می‌کنیم :*

$$Z(R) = \{a \in R \mid ra = ar, \text{به ازای هر}\ r \in R\}.$$

تعریف ۷.۱.۱. *عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ توان[۶] گوییم، اگر عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $a^n = ۰$.*
ایدال I از حلقه‌ی R را پوچ[۷] گوییم اگر هر عضو آن پوچ توان باشد.
ایدال I را پوچ توان گوییم هرگاه $I^n = ۰$، برای عدد صحیح مثبت n.
اگر R یک حلقه باشد، قرار می‌دهیم $N(R) = \{a \in R \mid \text{یک عضو پوچ‌توان است}\ a\}$ ، ایدال پوچ حلقه‌ی R.

گزاره ۱.۱.۱. *اگر a عضو پوچ توان حلقه ی R باشد، آن‌گاه $a + ۱$ و $a - ۱$ وارون پذیرند، زیرا $(۱ - a)(۱ + a + a^۲ + \cdots + a^{n-۱}) = ۱ - a^n$.*

[۴] field
[۵] prime field
[۶] nilptoent
[۷] nil ideal

تعریف ۸.۱.۱. *عنصر e متعلق به حلقه‌ی R را خودتوان[۸] گوییم، هرگاه $e^{۲} = e$.*

هر حلقه‌ی ناصفر حداقل دو عنصر خودتوان دارد و اگر e عنصر خودتوان باشد، آن‌گاه $۱ - e$ نیز خودتوان است زیرا،

$$(۱ - e)^{۲} = ۱ - e - e + e^{۲} = ۱ - e - e + e = ۱ - e.$$

تعریف ۹.۱.۱. *ایدال M از حلقه‌ی R را ماکسیمال[۹] گوییم، هرگاه اگر N ایدالی از R باشد، به‌طوری‌که $M \subset N \subset R$، آن‌گاه $N = M$ یا $N = R$.*

تعریف ۱۰.۱.۱. *ایدال N از حلقه‌ی تعویض پذیر R، $(N \neq R)$ یک ایدال اول[۱۰] است، در صورتی که به ازای هر $a, b \in R$ اگر $ab \in N$ آن‌گاه داشته باشیم، $a \in N$ یا $b \in N$.*

چند نکته: در هر حلقه‌ی تعویض پذیر و یک‌دار R،

(۱) ایدال M از R ماکسیمال است اگر و تنها اگر R/M میدان باشد.

(۲) ایدال N از R اول است اگر و تنها اگر R/N حوزه‌ی صحیح باشد.

(۳) هر ایدال ماکسیمال یک ایدال اول است.

تعریف ۱۱.۱.۱. *اگر R حلقه ای تعویض پذیر و یک‌دار باشد و $a \in R$، ایدال $\{ra \mid r \in R\}$ متشکل از تمام مضرب‌های a ایدال اصلی تولید شده توسط a نامیده می شود و به صورت $< a >$ نمایش داده می شود. ایدالی چون N از R یک ایدال اصلی[۱۱] است، در صورتی که عضوی مانند $a \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N =< a >$.*

---

[۸] idempotent
[۹] maximal ideal
[۱۰] prime ideal
[۱۱] principal ideal

مثال ۱.۱.۱. *ایدال $< x >$ در $F[x]$، به وضوح متشکل از تمام چندجمله‌ای‌های $F[x]$ است که در آن ها جمله‌ی ثابت صفر است.*

تعریف ۱۲.۱.۱. *عنصر a متعلق به حلقه‌ی R را شبه منظم راست[۱۲] می‌نامیم، هرگاه $b \in R$ وجودداشته باشد، به‌طوری‌که $a + b + ab = ۰$.*
به طور مشابه، عنصر a را شبه منظم چپ[۱۳] گوییم، هرگاه $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $b + a + ba = ۰$. اگر عنصر $a \in R$ شبه منظم راست و شبه منظم چپ حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه a را شبه منظم می‌گوییم.

گزاره ۲.۱.۱. *عنصر a متعلق به حلقه‌ی R شبه منظم است اگر و تنها اگر $a + ۱$ وارون پذیر باشد.*

اثبات. ر.ک.[۲۳] بخش ۲.۲.

گزاره ۳.۱.۱. *هر عنصر پوچ توان حلقه‌ی R یک عنصر شبه منظم آن حلقه است.*

اثبات. اگر $a \neq ۰$ عضو پوچ توان حلقه‌ی R باشد، m را کوچک ترین عدد طبیعی در نظر می‌گیریم که $a^m = ۰$. در این صورت داریم $aa^{m-۱} = a^{m-۱}a = a^m = ۰$، بنابراین a مقسوم علیه صفر است. حال اگر قرار دهیم $b = -a + a^۲ - a^۳ + ... + (-۱)^{m-۱}a^{m-۱}$، با یک محاسبه‌ی ساده به دست می‌آوریم که $a + b + ab = ۰$. پس هر عنصر پوچ توان یک حلقه، عنصر شبه منظم آن حلقه است. □

[۱۲] right quasi regular
[۱۳] left quasi regular

تعریف ۱.۱.۱۳. اگر R و R' حلقه باشند، تابع $f : R \longrightarrow R'$ را یک هم‌ریختی حلقه‌ای[۱۴] می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $a, b \in R$، دو شرط زیر در مورد آن برقرار باشد:

(۱) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(۲) $f(ab) = f(a)f(b)$

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ یک هم‌ریختی حلقه‌ای باشد

(۱) اگر f یک به یک باشد، f را تک‌ریختی حلقه‌ای[15] می‌نامیم.

(۲) اگر f پوشا باشد، f را بروریختی حلقه‌ای[۱۶] می‌نامیم.

(۳) اگر f یک به یک و پوشا باشد، f را یک‌ریختی حلقه‌ای[۱۷] می‌نامیم.

(۴) اگر $R = R'$، f را درون‌ریختی حلقه‌ای[۱۸] می‌نامیم.

(۵) اگر $R = R'$ و f یک به یک و پوشا باشد، f را خودریختی حلقه‌ای[۱۹] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۵. گوییم حلقه‌ی R در حلقه‌ی R' می نشیند، هرگاه یک تک‌ریختی حلقه‌ای، $f : R \longrightarrow R'$ وجود داشته باشد. در این صورت R' را یک توسیع R می‌نامیم.

گزاره ۱.۱.۴. فرض کنیم M یک گروه آبلی باشد. مجموعه‌ی تمام درون‌ریختی‌های M را با $EndM$ نشان می‌دهیم. این مجموعه تحت جمع و ترکیب توابع تشکیل یک حلقه می‌دهد. پس

---

[۱۴] ring homomorphism
[۱۵] ring monomorphism
[۱۶] ring epimorphism
[۱۷] ring isomorphism
[۱۸] ring endomorphism
[۱۹] ring automorphism

داریم $(EndM, +, \circ)$ حلقه‌ی درون‌ریختی‌های گروه آبلی M [۲۰] با جمع و ضرب توابع به صورت زیر:

$$(f+g)(a) = f(a) + g(a),$$
$$(f \circ g) = f(g(a)).$$

اثبات. ر.ک.[۲۳]

تعریف ۱۶.۱.۱. حلقه‌ی R را موضعی[۲۱] گوییم، هرگاه فقط یک ایدال ماکسیمال داشته باشد.

لم ۱.۱.۱. اگر R حلقه‌ی تعویض‌پذیر و $a \in R$، آن‌گاه a عضو وارون‌پذیر R است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدال ماکسیمال M از R داشته باشیم $a \notin M$، یعنی اگر و تنها اگر a بیرون هر ایدال ماکسیمال R واقع باشد.

اثبات. ر.ک.[۲۴]

لم ۲.۱.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد. در این صورت R موضعی است اگروتنهااگر مجموعه‌ی عضوهای وارون‌ناپذیر R ایدال R باشد.

اثبات. ر.ک.[۲۴]

تذکر ۱.۱.۱. اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، در این صورت ایدال ماکسیمال منحصر به فرد R دقیقاً همان مجموعه عضوهای وارون ناپذیر R است.

[۲۰] endomorphism ring of abelian group M

[۲۱] local ring

تعریف ۱.۱.۱۷. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. رادیکال جیکوبسون[۲۲] حلقه‌ی R را اشتراک تمام ایدال‌های ماکسیمال R تعریف می‌کنیم، و با $J(R)$ نشان می‌دهیم.*

چند نکته:

(۱) اگر R حلقه‌ی موضعی باشد، آن‌گاه $J(R)$ ایدال ماکسیمال منحصر به فرد R است.

(۲) اگر R حلقه‌ی یک‌دار باشد، آن‌گاه :

$$J(R) = \{r \in R \mid \text{وارون‌پذیر است } 1 + ra \,,\ \text{برای هر } a \in R\}.$$

(۳) اگر R حلقه‌ی موضعی باشد ، آن‌گاه $R = J(R) \bigcup U(R)$ و R فقط دارای عناصر خودتوان بدیهی است.

(۴) اگر $f : R \longrightarrow S$ بروریختی حلقه ای باشد، آن‌گاه $f(J(R)) \subseteq J(S)$.

(۵) به ازای هر حلقه‌ی R، $N(R) \subseteq J(R)$.

(۶) $1 + J(R) \subseteq U(R)$.

(۷) $1 + U(R) \subseteq J(R)$.

قضیه ۱.۱.۲ (قضیه کوچک ودربورن[۲۳]). *هر حلقه‌ی تقسیم متناهی یک میدان متناهی است.*

تذکر ۱.۱.۲. *هر میدان متناهی از مرتبه‌ی توانی از یک عدد اول است.*

[۲۲] Jacobson radical

[۲۳] Wedderburn's little theorem

تذکر ۳.۱.۱. *هر میدان p^n عضوی روی $\mathbb{Z}_p$ جبری است.*

تعریف ۱۸.۱.۱. *گیریم R یک حلقه‌ی تعویض‌پذیرو S زیر مجموعه‌ای از R باشد. S را یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته[۲۴] R گوییم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر $x, y \in S$، داشته باشیم $xy \in S$.*

مثال ۲.۱.۱. *اگر $\{P_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ایدال‌های اول حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد، آن‌گاه $S := R - \bigcup_{i\in I} P_i$ یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته‌ی R است.*

لم ۳.۱.۱. *فرض کنیم S زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی تعویض پذیر R باشد. رابطه‌ی $\sim$ روی $R \times S$ را برای $(a, s), (b, t) \in R \times S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.*

$$(a, s) \sim (b, t) \in R \times S \Longleftrightarrow \exists u \in S : (at - bs)u = 0$$

در این صورت رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی $R \times S$ است.

اثبات. ر.ک.[۲۴] لم ۵.۱.

چند تذکر:

(۱) به‌ازای $(a, s) \in R \times S$ رده‌ی هم‌ارزی شامل (a, s) را با a/s و مجموعه‌ی رده‌های هم‌ارزی $\sim$ را با $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $S^{1-}R$ تحت عمل‌های

$$\frac{a}{s}\frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \qquad , \qquad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{ta + sb}{st}$$

به ازای a, b متعلق به R و s, t متعلق به S، حلقه‌ای تعویض‌پذیر است. این حلقه‌ی جدید $S^{-1}R$ حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S نامیده می‌شود.

[۲۴] multiplicatively closed subset

(۲) عضو صفر حلقه‌ی $S^{-1}R$، $0/1$ و عضو همانی آن $1/1$ است.

(۳) فرض کنیم $a \in R$ و $s \in S$ در این صورت $a/s = 0_{S^{-1}R}$ اگروتنهااگر $t \in S$ وجودداشته باشد به طوری که $t(1a - 0s) = 0$، یعنی اگروتنهااگر $t \in S$ وجودداشته باشد که $ta = 0$.

(۴) حلقه‌ی $S^{-1}R$ صفر است، یعنی $0/1 = 1/1$، اگروتنهااگر $t \in S$ وجودداشته باشد که $t1 = 0$، یعنی اگروتنهااگر $0 \in S$.

(۵) نگاشت طبیعی پوشای $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ با ضابطه‌ی $f(a) = a/1$ برای هر $a \in R$ وجوددارد.

(۶) به طور کلی حتی اگر $0 \notin S$ و لذا $S^{-1}R$ صفر نباشد، هم‌ریختی حلقه‌ای طبیعی $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ لزوماً یک به یک نیست، از بند (۳)ی فوق نتیجه می‌شود که

$$Kerf = \{a \in R : ta = 0\}.$$

(۷) اگر S زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از حلقه‌ی تعویض‌پذیر R و $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ هم‌ریختی حلقه‌ای طبیعی باشد، آن‌گاه:

(۱) به ازای هر $s \in S$، $f(s) = s/1$ در $S^{-1}R$ وارون‌پذیر و $1/s$ وارون آن است.

(۲) بنابر بند (۶) فوق، اگر $a \in Kerf$ آن‌گاه $s \in S$ وجوددارد که $sa = 0$.

(۳) هر عضو a/s از $S^{-1}R$ را (که در آن $a \in R$ و $s \in S$) می‌توان به صورت $a/s = f(a)(f(s))^{-1}$ نوشت، زیرا

$$\frac{a}{s} = \frac{a}{1}\frac{1}{s} = \frac{a}{1}(\frac{s}{1})^{-1} = f(a)(f(s))^{-1}.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. گیریم R حلقه‌ی تعویض‌پذیر باشد و P ایدال اول حلقه‌ی R. توجه می‌کنیم که $S = R - P$، زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از R است. حلقه‌ی خارج قسمتی $S^{-1}R$ را با R_p نشان می‌دهیم. این حلقه، یک حلقه‌ی موضعی با ایدال ماکسیمال یکتای

$$M = \{\lambda \in R_p \mid \lambda = \frac{a}{s}, a \in P, s \in S\}$$

است. این حلقه را حلقه‌ی حاصل از موضعی سازی[۲۵] R در P می‌نامیم.

۱.۲ مدول‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم M یک گروه جمعی آبلی و R یک حلقه باشد، گوییم M یک R-مدول راست است، هرگاه تابع $\varphi : M \times R \longrightarrow M$ وجود داشته باشد، به‌طوری که به ازای هر $m, n \in M$ و هر $r, s \in R$ اصول موضوع زیر برقرار باشند:

(۱) $(m+n)r = mr + nr$،

(۲) $m(r+s) = mr + ms$،

(۳) $(mr)s = m(rs)$،

به‌علاوه اگر R یک‌دار باشد،

(۴) $m1_R = m$.

در این صورت M را یک R-مدول یکانی[۲۶] می‌نامیم.

اگر R یک حلقه‌ی تقسیمی باشد، M را یک R-فضای برداری می‌نامیم. تعریف مشابهی برای R-مدول چپ وجود دارد. در حالتی که R حلقه‌ای تعویض‌پذیر باشد، هر R-مدول راست یک R-مدول چپ است.

[۲۵] localization

[۲۶] unitary R-module

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنیم M و N، R-مدول باشند. تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک R-هم‌ریختی می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $r \in R$ و هر $m, n \in M$ داشته باشیم:*

(۱) $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(۲) $f(mr) = f(m)r$.

اگر f یک به یک (پوشا) باشد، آن را یک R-تک‌ریختی (R-برووریختی) می‌نامیم.
اگر $M = N$، f را یک R-درون‌ریختی می‌نامیم.
اگر f یک به یک و پوشا باشد، آن را R-یک‌ریختی می‌نامیم.

گزاره ۱.۲.۱. *اگر M یک R-مدول باشد، آن‌گاه مجموعه ی R-درون‌ریختی‌های M تحت جمع و ترکیب توابع تشکیل یک حلقه می‌دهد، که حلقه‌ی R-درون‌ریختی‌های M نام دارد و با End_RM نشان می‌دهیم.*

اثبات. ر.ک.[۲۳]

تعریف ۳.۲.۱. *گیریم M یک R-مدول باشد. زیر مدول S از M را کوچک گوییم، هرگاه برای هر زیر مدول $N \subseteq M$، اگر $S + N = M \Longleftarrow N = M$. اگر S زیر مدول کوچک[۲۷] M باشد می‌نویسیم، $S \subseteq_s M$.*

گزاره ۲.۲.۱. *اگر R-مدول M دارای زیرمدول ماکسیمال باشد، آن‌گاه $J(M) = \sum_{i\in I} N_i$ به‌طوری‌که، N_i زیر مدول کوچک M است.*

[۲۷] small submodule

اثبات. نشان می‌دهیم اگر N زیر مدول کوچک دلخواهی از M باشد، آن‌گاه N درون هر زیرمدول ماکسیمال P از M است. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $N \nsubseteq P$، چون P زیر مدول ماکسیمال M است داریم $N + P = M$، که بنابر تعریف زیر مدول کوچک به دست می‌آوریم $P = M$ و به تناقض می‌رسیم؛ بنابراین $\sum_{i \in I} N_i \subseteq J(M)$.

برای اثبات عکس، گیریم $x \in J(M)$ باشد. نشان می‌دهیم xR زیر مدول کوچکی از M است. یعنی اگر $xR + Q = M$، آن‌گاه $Q = M$. برای این کار نشان می‌دهیم M دارای زیر مدول ماکسیمالی است که شامل x نمی‌باشد و به این صورت به تناقض می‌رسیم. قرار می‌دهیم $F = \{P \subseteq M \ : \ Q \subseteq P \ , \ x \notin P\}$. $F \neq \phi$ زیرا $Q \in F$. واضح است که هر زنجیر $\{P_i\}_{i \in I}$ در F دارای کران بالای $\bigcup_{i \in I} P_i$ است. پس بنابر لم زورن[۲۸]، F دارای عضو ماکسیمال P است. ادعا می‌کنیم P زیر مدول ماکسیمال M است. نشان می‌دهیم اگر $P \subsetneq L$، آن‌گاه $L = M$. واضح است که $Q \subseteq P \subsetneq L$، بنابراین $Q \subsetneq L$؛ اما باید داشته باشیم $L \notin F$، چون P عضو ماکسیمال F است و این یعنی $x \in L$ است. بنابراین $xR \subseteq L$، از طرفی $Q \subseteq L$، پس $L = M$. $\square$

۳.۱ حلقه‌ی ماتریس‌ها

تعریف ۱.۳.۱. *اگر R یک حلقه باشد، تابعی چون*

$$A : \{۱, ۲, ..., n\} \times \{۱, ۲, ..., n\} \longrightarrow R$$

را یک ماتریس $n \times n$ می‌نامیم، که به ازای هر $۱ \leq i \leq n$ و هر $۱ \leq j \leq n$ تصویر (i, j) تحت A را با a_{ij} نشان می‌دهیم و آن را درایه‌ی (i, j)م ماتریس A می‌نامیم.

ماتریس $n \times n$، A را با (a_{ij}) نشان می‌دهیم، و مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های متعلق

[۲۸] Zorn lemma

به حلقه‌ی R را با نماد $\mathbb{M}_n(R)$ مشخص می‌کنیم. یعنی

$$\mathbb{M}_n(R) = \{(a_{ij}) : a_{ij} \in R, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

اگر A, B دو عنصر $\mathbb{M}_n(R)$ باشند، $A+B$ ماتریسی است که درایه‌ی (i,j)م آن مجموع درایه‌های (i,j)م A و B است. به سادگی به دست می‌آید که جمع دو ماتریس خواص شرکت‌پذیری و تعویض‌پذیری را داراست. ماتریسی که همه‌ی درایه‌های آن $0 \in R$ باشند را با 0 نشان می‌دهیم؛ برای هر $A \in \mathbb{M}_n(R)$، $A + 0 = 0 + A = A$ و اگر قرار دهیم $B = (-a_{ij})$ آن‌گاه $A + B = B + A = 0$. بنابراین مجموعه‌ی $\mathbb{M}_n(R)$ تحت عمل جمع تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد.

حال ضرب A در B را چنین تعریف می‌کنیم، $C = AB = (c_{ij})$ که در آن

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

درایه‌ی c_{ij} از ضرب درایه‌های سطر iام A در درایه‌های نظیرشان که در ستون jام B هستند و سپس جمع آن‌ها به دست می‌آید. عمل ضرب ماتریس‌ها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است، زیرا اگر $B = (b_{ij})$، $A = (a_{ij})$ و $C = (c_{ij})$ سه عنصر دلخواه $\mathbb{M}_n(R)$ باشند، درایه‌ی (i,j)م $(AB)C$ برابر با $\sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{n} (a_{ij}b_{jk})c_{k1}$ و همین درایه در $A(BC)$ برابر است با $\sum_{\substack{k=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij}(b_{jk}c_{k1})$، حال با توجه به این نکته که R حلقه است، به راحتی می‌توان اثبات کرد که این دو عبارت مساوی هستند، و به این ترتیب داریم $A(BC) = (AB)C$. همچنین عمل ضرب نسبت به عمل جمع دارای خاصیت توزیع‌پذیری چپ است، زیرا درایه‌ی (i,j)م ماتریس $A(B+C)$ برابر است با $\sum a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum a_{ik}b_{kj} + \sum a_{ik}c_{kj}$، که عبارت اول سمت راست، درایه‌ی (i,j)م AB و عبارت دوم، درایه‌ی (i,j)م AC می‌باشد. بنابراین داریم $A(B+C) = AB + AC$. به همین صورت می‌توان نشان داد که $(B+C)A = BA + CA$. حال اگر قرار دهیم

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

آن‌گاه به ازای هر $A \in \mathbb{M}_n(R)$ خواهیم داشت $AI_n = I_nA = A$. به این صورت نشان دادیم که برای هر $n > ۱$، $\mathbb{M}_n(R)$ تحت اعمال جمع و ضرب ماتریس‌ها یک حلقه است.

قضیه ۱.۳.۱. *اگر R یک حلقه باشد، به ازای هر $n > ۱$، R در $\mathbb{M}_n(R)$ می‌نشیند.*

اثبات. اگر $a \in R$ باشد، ماتریس (a_{ij}) را که در آن $a_{ii} = a$ و اگر $i \neq j$، $a_{ij} = ۰$ است را با aI_n نشان می‌دهیم. اکنون تابع $f : R \longrightarrow \mathbb{M}_n(R)$ را با تساوی $f(a) = aI_n$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم f یک تک‌ریختی حلقه‌ها است. یعنی f یک هم‌ریختی حلقه‌ها است و یک به یک است. اما داریم

$$f(ab) = (ab)I_n = (aI_n)(bI_n) = f(a)f(b)$$

،

$$f(a+b) = (a+b)I_n = aI_n + bI_n = f(a) + f(b)$$

حال اگر $f(a) = f(b)$ در این صورت داریم $aI_n = bI_n$ که بنابر تساوی دو ماتریس به دست می‌آوریم $a = b$. □

تعریف ۲.۳.۱. *ماتریس $n \times n$، A بالا مثلثی[۲۹] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای $i > j$، $A_{ij} = ۰$؛ یعنی هرگاه همه‌ی درایه‌های واقع درزیر قطراصلی آن صفر باشند.*
حال اگر برای $i < j$ داشته باشیم $A_{ij} = ۰$؛ ماتریس $n \times n$، A را پایین مثلثی[۳۰] می نامیم.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنیم R حلقه‌ی تعویض‌پذیر با عنصر همانی باشد و $A, B \in \mathbb{M}_n(R)$، آن‌گاه*

(۱) $|AB| = |A||B|$

[۲۹] upper triangular matrice
[۳۰] lower triangular matrice

(۲) *اگر A در $\mathbb{M}_n(R)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A|$ در R یکال است.*

(۳) $|A^t| = |A|$

(۴) *اگر $A = (a_{ij})$ ماتریس مثلثی باشد، آن‌گاه* $|A| = a_{۱۱}a_{۲۲}\cdots a_{nn}$.

اثبات. ر.ک.[۲۲]

گزاره ۱.۳.۱. *اگر $A = (a_{ij})$ ماتریس $n \times n$ بر روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر یک‌دار R باشد و $A^a = adjA = (b_{ij})$ را ماتریس $n \times n$ای در نظر گیریم، به‌طوری که $b_{ij} = (-۱)^{i+j}|A_{ij}|$، آن‌گاه* $AA^a = |A|I_n = A^aA$.

اثبات. ر.ک.[۲۲]

گزاره ۲.۳.۱. *ماتریس $n \times n$، $A = (a_{ij})$ بر روی حلقه‌ی تعویض‌پذیر یک‌دار R وارون‌پذیر است اگروتنهااگر $|A|$ در R یکال باشد. در این حالت* $A^{-۱} = |A|^{-۱}A^a$.
توجه می‌کنیم که اگر R میدان باشد، آن‌گاه $|A|$ یکال است اگر وتنها اگر $|A| \neq ۰$.

اثبات. $\Leftarrow$) با توجه به گزاره‌ی قبل، فرض کنیم $|A|$ در R یکال است، بنابراین $|A|^{-۱}A^a \in \mathbb{M}_n(R)$. واضح است که $(|A|^{-۱}A^a)A = I_n = A(|A|^{-۱}A^a)$. بنابراین ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن $A^{-۱} = |A|^{-۱}A^a$ است.
$\Rightarrow$) اگر A وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $AA^{-۱} = I_n$. بنابراین $|A||A^{-۱}| = |AA^{-۱}| = |I_n| = ۱$، یعنی $|A||A|^{-۱} = ۱$. پس $|A|$ در R یکال است. □

تعریف ۳.۳.۱. *گیریم S و T حلقه باشند.گوییم M یک (S,T)-دو مدول[۳۱] یا به طور خلاصه، یک دو مدول است، هرگاه M یک S-مدول چپ و یک T-مدول راست باشد که به ازای هر*

[۳۱] (S,T)-bimodule

$s \in S$ و $x \in M$ و $t \in T$، داشته باشیم $s(xt) = (sx)t$. در این حالت M را به صورت ${}_SM_T$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۳.۴. اگر S و T حلقه باشند و M یک (S,T)-دو مدول، آن‌گاه مجموعه‌ی ماتریس‌های به فرم $\begin{pmatrix} s & m \\ 0 & t \end{pmatrix}$ یا $\begin{pmatrix} t & 0 \\ m & s \end{pmatrix}$ که $t \in T, m \in M, s \in S$، تحت جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل یک حلقه می‌دهد که حلقه‌ی ماتریس‌های مثلثی صوری[۳۲] نام دارد، و به صورت $\begin{pmatrix} S & M \\ 0 & T \end{pmatrix}$ یا $\begin{pmatrix} T & 0 \\ M & S \end{pmatrix}$ نشان می‌دهیم.

۱.۴ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $R[[x]]$ را مجموعه‌ی تمام دنباله‌های نامتناهی از عناصر R مانند $(a_۰, a_۱, ...)$ تعریف می‌کنیم. عمل جمع و ضرب روی $R[[x]]$ به صورت زیر تعریف می شود

$$(a_۰, a_۱, ...) + (b_۰, b_۱, ...) = (a_۰ + b_۰, a_۱ + b_۱, ...)$$

$$(a_۰, a_۱, ...)(b_۰, b_۱, ...) = (c_۰, c_۱, ...)$$

که در آن $c_n = \sum_{i=۰}^{n} a_i b_{n-i}$. با این جمع و ضرب، $R[[x]]$ یک حلقه می شود، که حلقه‌ی سری‌های توانی[۳۳] با ضرایب متعلق به R نام دارد. $x = (۰, ۱_R, ۰, ...) \in R[[x]]$ از x مجهول نام دارد. اگر R یک دار باشد، آن‌گاه $f = (a_۰, a_۱, ...) \in R[[x]]$، را به صورت $f = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i x^i$ نشان می دهیم.

[۳۲] formal triangular matrix ring
[۳۳] power series ring