بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

خواص میانگین‌پذیری گروهی برای جبرهای فون-نویمان

استاد راهنما :

دکتر محمد رضا میری

استاد مشاور:

دکتر امان ا... اسدی

نگارش :

مجید رجائی

شهریور ۸۷

به نام خدا

فرم شماره ۵

دانشگاه بیرجند

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تاریخ : ....

شماره : ....

پیوست : ....

صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تاییدات خداوند متعال جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی کارشناسی ارشد **آقای مجید رجایی**

به شماره دانشجویی: **۸۴۲۳۱۱۲۰۸۹** رشته: **ریاضی** گرایش: آنالیز دانشکده: علوم دانشگاه بیرجند

تحت عنوان :

" خواص میانگین پذیری گروهی برای جبرهای فون – نویمان "

به ارزش: ۶ واحد درساعت: ۱۰ روز: شنبه مورخ: ۸۷/۶/۲۳

با حضور اعضای محترم جلسه دفاع و نماینده تحصیلات تکمیلی به شرح ذیل تشکیل گردید :

سمت	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	آقای دکتر محمدرضا میری	استادیار	
استاد مشاور	آقای دکتر امان ا... اسدی	استادیار	
داور اول	آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد	استادیار	
داور دوم	آقای دکتر علیرضا جانفدا	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر حسین اقدامی	استادیار	

نتیجه ارزیابی به شرح زیر مورد تایید قرار گرفت:

☑ قبول (با درجه: عالی و امتیاز: (۱۸/۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود

۱- عالی (۲۰-۱۸) ۲- بسیار خوب (۱۷/۹۹ – ۱۶) ۳- خوب (۱۵/۹۹ – ۱۴) ۴- قابل قبول (۱۳/۹۹ – ۱۲)

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

تشکر و قدردانی

با سپاس به در گاه ایزد لایزال و بی‌همتایی که قلم را آفرید و نور امید را در دلم زنده داشت و یاریم کرد تا این پایان نامه به اتمام رسید.

از استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر محمد رضا میری و استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر امان ا... اسدی که در تمام مراحل کار راهنمای من بودند تا این رساله به فرجام رسید، صمیمانه قدردانی می‌کنم.

از اساتید محترم داور آقایان دکتر علیرضا جانفدا و دکتر حاج محمد محمدی نژاد که زحمت مطالعه این پایان نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین فرصت را غنیمت شمرده از اساتید گروه ریاضی و کارکنان دانشگاه بیرجند به خصوص استاد ارجمند و فرزانه جناب آقای پرویز حسن‌پور و مدیر گروه محترم جناب آقای دکتر حسین فضائلی که با راهنمایی‌ها و حمایت‌های بی‌دریغشان راهنما و پشتیبان من در به اتمام رساندن این مهم بودند، کمال تشکر را دارم و از خداوند منان برای ایشان پیروزی و بهروزی را در تمام مراحل زندگی خواهانم.

همچنین از خانواده محترم خود به خصوص پدر و مادر مهربانم و همسر عزیزم که اگر حمایت‌ها و از خود گذشتگی‌های بی‌دریغشان نبود این مهم به انجام نمی‌رسید، کمال تشکر را دارم. امید است که این کار ناقابل جبران ذره‌ای از زحماتشان باشد.

چکیده:

در سال ۱۹۹۰ بکا مفهوم میانگین‌پذیری نمایش‌های یکانی از گروه موضعاً فشرده G روی فضای هیلبرت H را مطرح کرد. ما در این پایان نامه به بررسی این مفهوم و ارتباط آن با میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری درونی گروه G می پردازیم.

لاوو و پاترسون در سال ۲۰۰۵ G- میانگین‌پذیری جبر فون– نویمان M را تعریف کردند. ما در ادامه به بررسی این مفهوم و معادل‌های آن پرداخته و سپس شرایطی را بررسی می کنیم که تحت آن شرایط می توان G- میانگین‌پذیر بودن یا نبودن M را با استفاده از خاصیت نقطه- ثابت M_* مشخص کرد.

کلمات کلیدی:

نمایش یکانی ، میانگین‌پذیری ، G-A- مدول باناخ ، جبر فون– نویمان ، G- میانگین‌پذیری ، خاصیت نقطه-ثابت

فهرست:

مقدمه :

یکی از مسائل بسیار مهم آنالیز تابعی مسئله میانگین‌پذیری است که از دهه ۱۹۶۰ میلادی شروع شده و تاکنون ادامه دارد. سرچشمه این بحث به نظریه انتگرال برمی‌گردد. در سال ۱۹۰٤ لبگ[1] با مطالعه توابع حقیقی کراندار تعریف شده بر $\mathbb{R}$ نظریه انتگرال ریمان را گسترش داد. وی در ادامه مفهوم اندازه E را برای هر زیر مجموعه کراندار $\mathbb{R}$ با خواص زیر معرفی کرد :

الف) دو مجموعه قابل انطباق دارای یک اندازه هستند.

ب) اندازه یک اجتماع متناهی یا شمارش‌پذیر از مجموعه‌های دو بدو مجزا برابر است با مجموع اندازه های این مجموعه ها.

ج) اندازه بازه [۰ , ۱] برابر یک است.

در ادامه با پی‌گیری‌های هاسدورف (۱۹۱٤) ، باناخ (۱۹۲۳) ، تارسکی[2] و فون نویمان (۱۹۲۹) مسئله منجر به مشخص کردن یک تابعک خطی M روی فضای برداری $L^{\infty}(G)$ از توابع حقیقی کراندار روی گروه موضعاً فشرده G شد به طوری که برای هر $f \in L^{\infty}(G)$:

$$I) f \geq 0 \Rightarrow M(f) \geq 0$$

$$II) M({}_x f) = M(f)$$

$$III) M(1) = 1$$

و M را یک میانگین روی G گوئیم ([۲۱]).

لازم به ذکر است که مفهوم میانگین‌پذیری تا سال ۱۹۷۳ فقط برای گروه‌ها به کار می رفت. در سال ۱۹۷۳ اولین بار توسط جانسون[3] میانگین‌پذیری جبرهای باناخ مطرح شد. با این تعریف جهان تازه‌ای برای مطالعه جبرهای باناخ به روی ریاضیدانان گشوده شد و تفاوت جبرهای باناخ از همدیگر بیشتر مشهود گردید.

---

[1] Lebeague
[2] Tarski
[3] Johnson

پس از جانسون ، دلز[4] و باده[5] در یک کار مشترک در سال ۱۹۸۷ مفهوم میانگین‌پذیری ضعیف جبرهای باناخ را مطرح کردند که حالت خاصی از مفهوم میانگین‌پذیری است.

در سال ۱۹۹۰ بکا[6] مفهوم میانگین‌پذیری را به میانگین‌پذیری نمایش‌های یکانی از گروه موضعاً فشرده G روی فضای هیلبرت H توسیع داد ([۱]). که ما در فصل دوم به بررسی این مفهوم و ارتباط آن با مفهوم میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری درونی گروه G می‌پردازیم. در ادامه استک[7] در سال ۲۰۰۳ مفهوم عمل به طور میانگین‌پذیر از G روی W^*-جبر M را تعریف کرد ([۲٤]) و لاوو[8] و پاترسون[9] با الهام گرفتن از آن در سال ۲۰۰۵ مفهوم G- میانگین‌پذیری جبرهای فون-نویمان را مطرح کردند ([۱۲]). ما در فصل‌های چهار، پنج و شش این پایان‌نامه به بررسی این مفهوم و معادل-های آن می پردازیم.

[4] Dales
[5] Bade
[6] Bekka
[7] Stokke
[8] Lau
[9] Paterson

فصل اول

تعاریف و پیشنیازها

در این فصل به معرفی و یادآوری چند مفهوم خاص و قضایایی که در طول این پایان‌نامه به آنها نیازمندیم می‌پردازیم.

فضای باناخ

تعریف ۱.۱. نگاشت $\|.\|:X\to[0,+\infty)$ را یک نرم گوییم هر گاه به ازای هر $x,y\in X$ و اسکالر $\alpha\in F$ داشته باشیم:

الف ـ $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$.

ب ـ $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$

ج ـ $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

اگر این نگاشت فقط دارای دو خاصیت ب و ج باشد، آن را یک شبه نرم می‌نامیم.

تعریف ۲.۱. فضای برداری X (روی میدان اعداد حقیقی یا مختلط) را به همراه $\|.\|$، یک فضای نرم‌دار گوییم.

فضای نرم‌دار $(X,\|.\|)$ را فضای باناخ گوییم هر گاه نسبت به متر تعریف شده با نرم $\left(d(x,y)=\|x-y\|\right)$، کامل باشد.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد، فضای تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را فضای دوگان X نامیده و با X^* نمایش می‌دهیم و برای هر $f\in X^*$، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|=\sup\{|f(x)|:\|x\|\le 1,x\in X\}$$

اگر $x\in X$ و $f\in X^*$ آنگاه $\hat{x}\in X^{**}$ (X^{**} دوگان دوگان X یا دوگان دوم X می‌باشد.) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{x}(f)=f(x)$$

نگاشت $\hat{}: X \to X^{**}$, $x \mapsto \hat{x}$ را که یک ایزومتری خطی است، نگاشت طبیعی می‌گوییم. یعنی:

$$\|\hat{x}\| = \|x\| \qquad \text{و} \qquad \widehat{ax+y} = a\hat{x} + \hat{y}$$

تعریف ۴.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار باشد، فضای نرم‌دار M را پیش دوگان X گوییم و آن را با X_* نمایش می‌دهیم هر گاه $M^* = X$.

ـ فضای هیلبرت:

تعریف ۵.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای حاصلضرب داخلی گوییم هر گاه به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H، یک عدد مختلط مانند $< x, y >$، به نام حاصلضرب داخلی یا حاصلضرب اسکالر x و y چنان مربوط شده باشد، که قواعد زیر برقرار باشند:

۱) $< x, y > = \overline{< y, x >}$،

۲) $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$،

۳) اگر $x, y \in H$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ آنگاه $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$،

۴) به ازای هر $x \in H$، $< x, x > \geq 0$،

۵) $< x, x > = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

هر فضای حاصلضرب داخلی را می‌توان با تعریف $\|x\| = < x, x >^{\frac{1}{2}}$ نرم‌دار کرد.

فضای هیلبرت یک فضای حاصلضرب داخلی است که نسبت به متر تعریف شده توسط نرم حاصل از ضرب داخلی یک فضای کامل باشد.

قضیه ۶.۱. اگر M یک زیر فضای خطی بسته از فضای هیلبرت H و $h \in H$ باشد. آنگاه:

I) اگر f_0 عضو یکتای M باشد به طوری که $\|h-f_0\|=dist(h,M)$ آنگاه $h-f_0 \perp M$.

II) اگر $f_0 \in M$ به طوری که $h-f_0 \perp M$ آنگاه $\|h-f_0\|=dist(h,M)$.

برهان. (قضیه I.۲.۶-[۳])

اگر $A \subseteq H$ باشد. تعریف می‌کنیم:

$$A^{\perp}=\{f \in H : f \perp g, \forall g \in A\}$$

در این صورت $A^{\perp}$ یک زیرفضای بسته H می‌باشد.

بنا به قضیه قبل اگر M یک زیرفضای خطی بسته H باشد و $h \in H$ عضو یکتای f_0 در M موجود است که $h-f_0 \perp M$. بنابراین اگر تعریف کنیم: $\begin{array}{c} P: H \to M \\ h \mapsto f_0 \end{array}$ آنگاه P خوش‌تعریف است و قضیه زیر را داریم.

قضیه ۷.۱ اگر M یک زیرفضای خطی بسته H و $h \in H$ باشد. فرض کنیم Ph عضو یکتایی در M باشد که $h-Ph \perp M$. آنگاه:

I) P یک تبدیل خطی روی H است،

II) برای هر $h \in H$، $\|Ph\| \le \|h\|$،

III) $P^2=P$، (که P^2 ترکیب P با خودش است.)

IV) $\ker P = M^{\perp}$ و $ranP=M$.

برهان. (قضیه I.۲.۷-[۳])

تعریف ۸.۱ تبدیل خطی پیوسته $P: H \to M$، تعریف شده در قضیه قبل را تصویر متعامد H روی M می‌نامیم و معمولاً با P_M نمایش می‌دهیم.

لم زیر نتیجه‌ای مشهور از قضیه هان ـ باناخ است.

لم ۹.۱. اگر X یک فضای نرمدار و M یک زیرفضای خطی بسته X باشد، $x_0 \in X \setminus M$ و $d = dist(x_0, M)$، آنگاه $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = 1$ و برای هر $x \in M$؛ $f(x) = 0$ و $\|f\| = d^{-1}$

برهان. (نتیجه III.۶.۸-[۳])

قضیه ۱۰.۱. اگر X یک فضای نرمدار و Y یک زیرفضای خطی X باشد.

آنگاه:

$$\overline{Y} = \bigcap \left\{ \ker f : f \in X^*, Y \subseteq \ker f \right\}$$

برهان. فرض کنیم $N = \bigcap \left\{ \ker f : f \in X^*, Y \subseteq \ker f \right\}$ اگر $f \in X^*$ و $Y \subseteq \ker f$ چون f پیوسته است پس $\overline{Y} \subseteq \ker f$ بنابراین $\overline{Y} \subseteq N$.

حال اگر $x \notin \overline{Y}$ در این صورت $dist(x, \overline{Y}) > 0$ لذا بنا به لم قبل $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = 1$ و برای هر $x \in \overline{Y}$، $f(x) = 0$ بنابراین $x_0 \notin N$ در نتیجه $N \subseteq \overline{y}$ و این اثبات را کامل می‌کند. ■

ـ توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره:

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. به ازای هر $x^* \in X^*$ تعریف می‌کنیم:

$$P_{x^*}(x) = \left| x^*(x) \right|$$

در این صورت P_{x^*} یک شبه نرم است و توپولوژی تعریف شده توسط خانواده شبه نرم‌های $\left\{ P_{x^*} : x^* \in X^* \right\}$ روی X را توپولوژی ضعیف (wk) گوییم و با $\sigma(X, X^*)$ نشان می‌دهیم.

همچنین اگر به ازای هر $x \in X$، تعریف کنیم:

$$P_x(x^*) = |x^*(x)|$$

در این صورت P_x نیز یک شبه نرم است و توپولوژی تعریف شده توسط خانواده $\{P_x : x \in X\}$ را روی X^*، توپولوژی ضعیف ـ ستاره (wk^*) گوییم و با $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهیم.

C^* ـ جبر

تعریف ۱۲.۱. یک جبر A، فضای برداری با نگاشت دو خطی $\begin{cases} A \times A \to A \\ (a,b) \mapsto a.b \end{cases}$ است که برای هر $a,b,c \in A$:

$$a.(b.c) = (a.b).c$$

جبر A را یکدار گوییم هرگاه A نسبت به ضرب دارای عنصر واحد باشد.

تعریف ۱۳.۱. اگر $\|.\|$ یک نرم روی جبر A باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$:

$$\|ab\| \le \|a\|\,\|b\|$$

(A و $\|.\|$) را یک جبر نرم‌دار نامیم و اگر A یک جبر یکدار نرم‌دار باشد کـه: $\|1\| = 1$، A را یـک جبر نرم‌دار یکانی گوییم.

تعریف ۱۴.۱. یک جبر نرم‌دار کامل را جبر باناخ و یک جبر نرم‌دار یکانی کامل را جبر بانـاخ یکـانی نامیم.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. یـک برگـشت روی A نگاشـتی مانـند $\begin{cases} A \to A \\ x \mapsto x^* \end{cases}$ است که برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$:

I) $(x^*)^* = x$

II) $(x+y)^* = x^* + y^*$

III) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$

IV) $(xy)^* = y^* x^*$

جبر A همراه با یک برگشت را یک $*$- جبر گوییم و برای هر $x \in A$، x^* را الحاقی x می‌نامیم.

تعریف ۱.۱۶. A را یک $*$- جبر نرم‌دار گوییم اگر A یک جبر نرم‌دار با برگشت $x \to x^*$ باشد.

به طوری که برای هر $x \in A$، $\|x\| = \|x^*\|$.

علاوه بر این اگر A نسبت به نرم خود کامل باشد، A را یک $*$- جبر باناخ می‌گوییم.

تعریف ۱.۱۷. A را یک C^*- جبر گوییم هر گاه A یک $*$- جبر باناخ باشد به طوری که برای

هر $x \in A$: $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

تعریف ۱.۱۸. فرض کنیم A یک C^*- جبر باشد و $a \in A$:

الف) a را خود الحاق گوییم هر گاه $a^* = a$،

ب) a را نرمال گوییم هرگاه $a^* a = a a^*$،

ج) a را یکانی گوییم هرگاه a نرمال باشد و $a^* a = 1$،

د) طیف a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 - \lambda a \notin Inv(A)\}$$

که $Inv(A)$ مجموعه تمام عناصر معکوس‌پذیر A می‌باشد.

هـ) a را مثبت گوییم هرگاه a خودالحاق باشد و $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$.

مجموعه تمام عناصر مثبت a را با A^+ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۹.۱. اگر A یک C^*- جبر و $a \in A^+$ باشد آنگاه عضو یکتای $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که: $b^2 = a$.

برهان. (قضیه ۲.۲.۱-[۱٤])

قضیه ۲۰.۱. اگر A یک عضو دلخواه C^*- جبر A باشد، آنگاه $a^* a \in A^+$.

برهان. (قضیه ۲.۲.٤-[۱٤])

نتیجه ۲۱.۱. برای هر $a \in A$ عضو یکتای $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که: $b^2 = a^* a$.

برهان. فرض کنیم $a \in A$ بنا به قضیه (۲۰.۱)، $a^* a \in A^+$ در نتیجه بنا به قضیه (۱۹.۱)، $b \in A^+$ وجود دارد به طوری که: $b^2 = a^* a$. ■

در این صورت برای هر $a \in A$، $|a|$ را به صورت $|a| = b = (a^* a)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۲۲.۱. اگر A یک C^*- جبر و $a \in A$ دلخواه و $u \in A$ یکانی باشد، آنگاه:

$$|uau^*| = u|a|u^*$$

برهان. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم:

$$(u|a|u^*)^2 = (uau^*)^*(uau^*)$$

برای این منظور داریم:

$$(u|a|u^*)^2 = u|a|u^*u|a|u^* = u|a|^2u^* = ua^*au^* = ua^*u^*uau^* = (uau^*)^*(uau^*)$$

پس: $|uau^*| = u|a|u^*$. ■

تعریف ۲۳.۱. فرض کنیم A یک جبر برگشتی و f یک فرم خطی روی A باشد. فرم خطی f^* روی A را که با $x \mapsto \overline{f(x^*)}$ تعریف می‌شود، الحاقی f می‌نامیم.

در این صورت برای فرم‌های خطی f و g و $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم:

$$I)\ (f^*)^* = f$$
$$II)\ (f+g)^* = f^* + g^*$$
$$III)\ (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$$

همچنین فرم خطی f را خودالحاق گوییم هرگاه $f = f^*$.

تعریف ۱.۲٤. فرض کنیم A یک جبر برگشتی باشد. فرم خطی f روی A را مثبت گوییم هرگاه برای هر $x \in A$، $f(xx^*) \geq 0$.

قضیه ۱.۲۵. فرض کنیم A یک C^*- جبر و g یک فرم خطی بسته خودالحاق روی A باشد. زوج یکتای (g^+, g^-) از فرم‌های مثبت روی A وجود دارند به طوری که: $g = g^+ - g^-$ و $|g| = g^+ + g^-$.

برهان. (قضیه ۱۲.۳.٤-[۵])

$g = g^+ - g^-$ را تجزیه جردن g می‌نامیم.

تعریف ۱.۲٦. اگر H و K فضاهای هیلبرت روی میدان F باشند. تابع $u: H \times K \to F$ را یک فرم یک و نیم خطی گوییم اگر برای هر $h, g \in H$ ، $k.f \in K$ و $\alpha, \beta \in F$:

$$I)\ u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h,k) + \beta u(g,k)$$
$$II)\ u(h, \alpha k + \beta f) = \bar{\alpha} u(h,k) + \bar{\beta} u(h,f)$$

تعریف ۱.۲۷. فرض کنیم B یک C^*- جبر باشد. ایده‌آل A از B را یک ایده‌آل اساسی گوییم اگر ایده‌آل غیر صفر از B وجود نداشته باشد که اشتراک آن با A صفر باشد. یا به طور معادل

$$b \in B, bA = \{0\} \Rightarrow b = 0$$

تعریف ۲۸.۱. اگر A یک C^*- جبر باشد. C^*- جبر یکتای $M(A)$ وجود دارد که A یک ایده‌آل اساسی آن است. همچنین $M(A)$ ماکسیمال است. یعنی هر C^*- جبر دیگر با این خاصیت مشمول در $M(A)$ است (صفحه ۱۴-[۱۱]). $M(A)$ را جبر ضربگر A می‌نامیم.

- C^*- جبر $B(H)$:

فرض کنیم H و K دو فضای هیلبرت باشند و T یک تبدیل خطی از H به K باشد، نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Th\| : h \in H, \|h\| \le 1\}$$

T را کراندار نامیم هر گاه $\|T\| < \infty$ باشد. مجموعه همه عملگرهای کراندار از H به K را با $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم، و برای $H = K$، $B(H,K) = B(H)$.

گزاره ۲۹.۱.

I) اگر $T,S \in B(H,K)$ آنگاه $T+S \in B(H,K)$ و $\|T+S\| \le \|T\| + \|S\|$،

II) اگر $\alpha \in F$ و $T \in B(H,K)$ آنگاه $\alpha T \in B(H,K)$ و $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$،

III) اگر $T \in B(H,K)$ و $S \in B(K,L)$ آنگاه $ST \in B(H,L)$ و $\|ST\| \le \|S\| \|T\|$،

برهان. (گزاره II.۱.۲ -[۳])

قضیه ۳۰.۱. اگر $u : H \times K \to F$ یک فرم یک و نیم خطی کراندار با کران M باشد، آنگاه عملگرهای یکتای $T \in B(H,K)$ و $S \in B(K,H)$ وجود دارند به طوری که برای هر $h \in H$ و $k \in K$:

$$u(h,k) = <Th,k> = <h,Sk> \qquad (*)$$

و $\|S\| \le M$ و $\|T\|$.