بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

فضا های خطی نرم دار فازی

استاد راهنما:

دکتر اکبر نظری

مؤلف:

مریم سینایی

شهریورماه ۱۳۸۶

ب

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مریم سینائی

استاد راهنما : دکتر اکبر نظری

داور ۱ : دکتر عباس حسنخانی

داور ۲ : دکتر محمدعلی ولی

نمایندە تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به پدربزرگوار و مادر مهربانم

سرمایه های جاودان زندگی ام

و

به همسر مهربانم

با عشق

تشکر و قدردانی

بهترین سپاس ها شایسته پروردگار سبحان که پرتو هدایتش روشنگر تاریکی هاست . خداوند مهربان را شکر گزارم که توفیق آموختن و فرصت اندیشیدن را به من عطا فرمود، تا از پی سالها تحصیل در یا بم که آنچه جستنی است تنها اوست .

با تشکر و قدر دانی از پدر و مادر بزرگوارم که تمام لحظات زندگی ام با وجود گرمشان پر فروغ است. توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند . در برابر قدمهایشان زانوی ادب بر زمین می گذارم و با قلبی مملو از عشق و محبت و خضوع بر دستانشان بوسه می زنم . سرو وجودشان همیشه سر سبز و استوار .

با سپاس ازدو خواهر مهربانم که زیباترین لحظات زندگی را در کنارشان تجربه کرده ام . از همسر مهربانم به خاطر همراهی صمیمانه و بی دریغشان قدر دانی می کنم .

از استاد راهنمای دلسوز و گرانقدرم جناب آقای دکتر اکبر نظری که درتمام مدت تحصیل راهنما ومشوق من بوده اند کمال تشکر را دارم.

همواری آنچه را که تا به امروز پیموده ام مدیون تلاشهای قابل تقدیر تمامی اساتیدی می دانم که از آغاز یاری ام داده اند .از اساتید بزرگوار آقایان دکتر محمد علی ولی و دکترعباس حسنخانی به خاطر وقت و حوصله ای که صرف مطالعه و داوری این پایان نامه نمودند تشکر می کنم و سلامتی و توفیق روز افزونشان را آرزو می کنم .

از سرکارخانم کریمی مسئول دفتر معاونت پژوهشی و تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی و کامپیوتر و سرکار خانم باوفا که با حوصله و دقت فراوان تایپ کامپیوتری رساله را بر عهده داشته اند تشکر و قدردانی می نمایم .

در پایان از همه دوستان عزیزم که در طول مدت تحصیل وجودشان مایه تشویق و همراهی ام بود قدر دانی می کنم . باشد که در تمام زندگی سعادت و نیکبختی نصیبشان گردد.

چکیده

در این پایان نامه عملگرهای کراندار فازی مورد بحث قرار می گیرند . در فصل اول([۵] و[۶] و[۸])، فضاهای ۲- نرم و n- نرم را بررسی خواهیم کرد .

در فصل دوم([۲] و[۱۲] و[۱۳]) فضاهای خطی n- نرم فازی و فضاهای خطی نرم دار فازی معرفی می شوند .در فصل سوم ([۱۲]) ، برخی از نتایج مربوط به یک نرم فازی و α -نرم های وابسته به آن اثبات می گردند .

در فصل چهار ([۱۲]) ، تعاریفی از انواع مختلف پیوستگی فازی نگاشتها و کرانداری فازی عملگرهای خطی ارا ئه می گردد و برخی از ویژگیهای آنها مطالعه می شود .

فصل پنجم ([۱۲]) به مفهوم نرم فازی یک عملگر خطی کراندار فازی قوی اختصاص داده شده است و در فصل ششم مفهوم فضاهای دوگان فازی را معرفی می کنیم وتام بودن فضاهای دوگان فازی ضعیف را اثبات می کنیم .

در فصل هفتم قضیه هان- باناخ روی یک فضای خطی نرم دار فازی اثبات می شود .

مقدمه

در این پایان نامه به بررسی نرم فازی ،فضای خطی نرم دار فازی و سپس عملگرهای خطی کراندار فازی از یک فضای خطی نرم دار فازی به فضای خطی نرم دار فازی دیگر پرداخته ایم،همچنین پیوستگی ها و کراندارهای مختلف عملگرهای خطی روی فضای خطی نرم دار فازی از قبیل پیوستگی فازی،پیوستگی فازی دنباله ای،پیوستگی فازی ضعیف و قوی و کرانداری فازی ضعیف و قوی را تعریف کرده ایم و ارتباطهای جالب میان این مفاهیم نیز بررسی شده اند .

اینک تاریخچه مختصری از موضوعات به کار رفته در این پایان نامه را بیان می کنیم.

مفهوم فضای ۲- متری و فضاهای ۲- نرم برای اولین بار توسط در دهه ۱۹۶۰معرفی شده است و بعد از آن قضایای فضاهای ۲- نرم و n- نرم توسط [۱۰] kimو[۳] Misiakو[۸] Malceski گسترش پیدا کرد.

[۱۱,۹,۴,۱] تعاریف مختلفی از نرم فازی روی یک فضای خطی توسط محققان معرفی شده است .

در سال ۱۹۹۲،[۴] Felbin ایده ای از یک نرم فازی روی یک فضای خطی به وسیله نسبت دادن یک عدد حقیقی فازی به هر عنصر فضای خطی را بیان کرد.

در سال ۱۹۹۴، Cheng,Mordeso [۹] نمونه ای دیگر از یک نرم فازی روی یک فضای خطی را معرفی کردند،همچنین آنها عملگر های خطی فازی را نیز تعریف کردند.

اخیراً(در سال ۲۰۰۳میلادی)[۷] Zhu,Xiao در حالت معمولی دوباره نمونه ای از تعریف نرم فازی [۴] Felbin روی یک عملگر خطی از یک فضای خطی نرم دار فازی به فضای خطی نرم دار دیگر فازی را بیان کرده اند .

فهرست

عنوان صفحه

فصل اول

فضاهای نرم‌دار

۱-۱ فضاهای ۲- نرم

تعریف ۱. ۱. ۱. X را یک فضای برداری از بعد d که $2 \le d < \infty$ قرار دهید. یک ۲- نرم روی X یک تابع $\|.,.\| : X \times X \to R$ است که چهار خاصیت زیر را داراست:

(۱) $\|x, y\| = ۰$ اگر و فقط اگر x,y وابسته خطی باشند.

(۲) $\|x, y\| = \|y, x\|$

(۳) $\|x, \alpha y\| = |\alpha| \|x, y\|$, $\alpha \in R$

(۴) $\|x, y + z\| \le \|x, y\| + \|x, z\|$

زوج $(X, \|.,.\|)$ را یک فضای ۲- نرم گویند.

مثال ۱. ۱. ۲. یک مثال استاندارد و بدیهی از یک فضای ۲- نرم، R^2، با ۲- نرم زیر است:

مساحت بین مثلث با رئوس بردارهای ۰ و x و y

درنظر داشته باشید که در هر فضای ۲-نرم $(x, \|.,.\|)$ داریم؛ $\|x, y\| \ge 0$ و برای هر $\alpha \in R$ و $x, y \in X$ ، $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$. همچنین اگر x و y و z وابسته خطی باشند (مثلاً برای $d=۲$) آنگاه:

$$\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\| \ , \ \|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$$

فرض کنید فضای ۲-نرم $(X, \|.,.\|)$ داده شده است، می‌توانیم یک توپولوژی برای آن از طریق تعریف زیر از حد یک دنباله بدست آوریم:

یک دنبالهٔ (x_n) در X همگرا به x در X گفته می‌شود، اگر برای هر $y \in X$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ در این حالت می‌نویسیم، $\lim_{n\to\infty} x_n := x$ و x را حد دنبالهٔ (x_n) می گوییم.

منحصر به فردی حد یک دنبالهٔ همگرا را به این صورت بیان می‌کنیم که، فرض کنیم دنبالهٔ (x_n) همگـرا بـه دو حـد مجـزای y,x در X باشـد، $z \in X$ را انتخـاب مـی‌کنـیم بـه طـوری کـه $\|x-y,z\| \neq ۰$ و $n \in N$ را به اندازه کافی بزرگ می‌گیریم به طوری که همزمان $\|x_n - x,z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$ و $\|x_n - y,z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$.

آنگاه باتوجه به نامساوی مثلثی، به دست می‌آوریم:

$$\|x-y,z\| \leq \|x-x_n,z\| + \|x_n - y,z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\| + \frac{1}{2}\|x-y,z\| = \|x-y,z\|$$

که غیرممکن است. بنابراین در صورت وجود حد، $\lim_{n\to\infty} x_n$ باید منحصر به فرد باشد.

در اینجا $(X,\|.,.\|)$ را یک فـضای ۲-نـرم کـه X فـضایی از بعـد d و $2 \leq d < \infty$ اسـت در نظـر می‌گیریم و همچنین مجموعهٔ ثابت $\{u_1,\dots,u_d\}$ را پایه‌ای برای X می‌گیریم، حال مطالـب زیـر را خواهیم داشت:

لـم ۱. ۱. ۳. دنبالـهٔ (x_n) در X همگـرا بـه $x \in X$ اسـت اگـر و فقـط اگـر بـرای هـر $i = 1,\dots,d$ ، $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x,u_i\| = 0$.

برهان. کافی است نشان دهیم که اگر برای هـر $i = 1,\dots,d$ ، $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x,u_i\| = 0$ آنگـاه برای هر $y \in X$ ، $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x,y\| = 0$. $\alpha_1,\dots,\alpha_d \in R$ وجـود دارنـد بـه طـوری کـه y را می‌توان به صورت $y = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_d u_d$ بنویسیم و باتوجه به نامساوی مثلثی داریم:

$$\|x_n - x,y\| \leq |\alpha_1| \|x_n - x,u_1\| + \dots + |\alpha_d| \|x_n - x,u_d\|$$

حال برای همه nهای به قدر کافی بزرگ رابطه برقرار است.

در ادامه لم بالا، لم زیر را خواهیم داشت:

لـــــم ۱. ۱. ٤. دنبالـــهٔ (x_n) در X همگرابـــه $x \in X$ اســـت اگـــر و فقـــط اگـــر $\lim_{n\to\infty} \max\{\| x_n - x, u_i \| : i = 1, \dots, d\} = 0$.

مطلب بالا ما را به تعریف یک نرم روی X به صورت زیر راهنمایی می‌کند:

باتوجه به پایه $\{u_1, \dots, u_d\}$ می‌توانیم یک نرم روی X تعریف کنیم، که آن را با $\| 0 \|_\infty$ نمایش دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| x \|_\infty := \max\{\| x, u_i \| : i = 1, \dots, d\}$$

توجه داشته باشید که: $\| x \|_\infty = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$. $\| \alpha x \|_\infty = | \alpha | \| x \|_\infty$ و برای هر $x, y \in X$, $\alpha \in R$, $\| x + y \|_\infty \le \| x \|_\infty + \| y \|_\infty$

در حالت معمولی برای $1 \le P < \infty$، تابع $\| 0 \|_p$ روی X به وسیله $\| x \|_p := \{\sum_{i=1}^{d} \| x, u_i \|^p\}^{\frac{1}{p}}$ تعریف می‌کنیم که یک نرم روی X است. اما از آنجا که X متناهی‌البعد است، همه این نرم‌ها معادلند و در اینجا تنها با $\| . \|_\infty$ کار می‌کنیم، مگر اینکه در جایی نرم دیگری نیاز داشته باشیم.

باید توجه داشته باشیم که انتخاب پایه‌ها در اینجا ضروری نیست. اگر ما پایه دیگری برای X انتخاب کنیم، مثل $\{V_1, \dots, V_d\}$ و باتوجه به آن $\| . \|_\infty$ را تعریف کنیم، آنگاه نرم نتیجه شده هم ارز با نرم تعریف شده باتوجه به $\{u_1, \dots, u_d\}$ است.

باتوجه به نرم بدست آمده $\| . \|_\infty$لم قبل را دوباره بیان می‌کنیم:

لم ۱. ۱. ٥. دنباله (x_n) در X همگرابه $x \in X$ است اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x \|_\infty = 0$

باتوجه به نرم بدست آمده $\| 0 \|_\infty$، می‌توانیم گوی‌های باز $\beta_{\{u_1, \dots, u_d\}}(x, r)$ به مرکز x و شعاع r را به وسیلهٔ

$$\beta_{\{u_1, \dots, u_d\}}(x, r) := \{y : \| x - y \|_\infty < r\}$$

تعریف کنیم.

باتوجه به این گوی‌ها ازلم بالا خواهیم داشت.

لم ۱. ۱. ۶. دنباله (x_n) در X همگرابه $x \in X$ است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $N \in N$ به طوری که $n \geq N$ نتیجه دهند($\varepsilon > 0$) $x_n \in \beta_{\{u_1,\dots,u_d\}}(x,\varepsilon)$

حال باتوجه به لم‌های گفته شده خواهیم داشت:

قضیه ۱. ۱. ۷. هر فضای ۲-نرم متناهی‌البعد یک فضای نرم‌دار است و توپولوژی آن به وسیلهٔ نـرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ تولید می‌شود.

مثال ۱. ۱. ۸. $X = R^2$ را با نرم $\|x, y\|$ =: فضای متوازی‌الاضلاع که ترکیب خطی متناهی بـه وسیله بردارهای y,x است (= دوبار فضای مثلث با بردارهای $y,x,0$) که به طـور دقیـق بـه وسـیلهٔ فرمول

$$\| x, y \| = | x_1 y_2 - x_2 y_1 |, \; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

داده شده است.

پایـــه‌هـــای اســـتاندارد $\{i, j\}$ را بـــرای R^2 در نظـــر بگیریـــد. در ایـــن صـــورت $\| x, j \| = | x_1 |, \| x, i \| = | x_2 |$ وبنابراین نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ باتوجه به $\{i, j\}$ برابر است با:

$$\| x \|_\infty = \max \{ | x_1 |, | x_2 | \} \qquad , \quad x = (x_1, x_2)$$

بنابراین در اینجا نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$، دقیقاً همان نرم یکنواخت روی R^2 است. بنابراین گـوی $\beta_{\{i,j\}}(x, r)$ یک دایره به مرکز x وشعاع r اسـت. از آنجـا کـه نـرم بدسـت آمـده معـادل بـا نـرم اقلیدسی روی R^2 است، نتیجه می‌گیریم که R^2 مجهز به ۲-نرم بالا چیزی جـز صـفحهٔ اقلیدسـی نیست.

ملاحظه ۱. ۱. ۹. فضای ۲- نرم $(\mathrm{R}^d, \|.,.\|)$ که $\|\mathrm{x}, \mathrm{y}\|$ =: فضای متوازی الاضلاع که ترکیب خطی متناهی به وسیلهٔ y,x است، فضای نرم داراست که نرم آن معادل نرم اقلیدسی است.

برهان. برای هر $x=(x_1,\dots,x_d)$ و $y=(y_1,\dots,y_d)\in R^d$ ، ۲- نرم $\|\mathrm{x}, \mathrm{y}\|$ ممکن است دقیقاً به وسیلهٔ فرمول،

$$\|x,y\|=\{(\sum_{i=1}^{d} x_i^2)(\sum_{j=1}^{d} y_j^2)-(\sum_{i=1}^{d} x_i y_i)^2\}^{1/2}$$

داده شود.

$\{e_1,\dots,e_d\}$ را پایه استاندارد برای R^2 قرار دهید. آنگاه برای هر $j=1,\dots,d$ داریم:

$$\|x,e_j\|=\{(\sum_{i=1}^{d} x_i^2)-x_j^2\}^{1/2}$$

و بنابراین نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ باتوجه به $\{e_1,\dots,e_d\}$ برابر است با:

$$\|x\|_\infty=\max\left\{\{(\sum_{i=1}^{d} x_i^2)-x_j^2\}^{1/2}\ ; j=1,\dots,d\right\}$$

$\|.\|_E$ را نیز نرم اقلیدسی روی R^2 قرار دهید. آنگاه برای هر $\mathrm{x}\in\mathrm{R}^d$ خواهیم داشت:

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_E\le\sqrt{2}\,\|x\|_\infty$$

بنابراین نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ معادل با نرم اقلیدسی است.

توجه ۱. ۱. ۱۰. برای فضای ۲-نرم $(\mathrm{R}^d,\|.,.\|)$ ملاحظه داشته باشید که:

$$\|x\|_2^2=\sum_{j=1}^{d}\|x,e_j\|^2=(d-1)\sum_{i=1}^{d} x_i^2$$

یعنی $\|.\|_2$ حاصلضربی از نرم اقلیدسی است.

اکنون قضیه نقطه ثابت برای فضاهای ۲- باناخ متناهی‌البعد را ثابت می‌کنیم. (درنظر داشته باشید که $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲- باناخ است، اگر هر دنباله کوشی در X، یعنی هر دنبالهٔ (x_n) در X که برای هر $y \in X$, $\lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n, y \| = 0$ همگرا به xای در X باشد). اما ابتدا لم زیر را می‌آوریم:

لم ۱. ۱. ۱۱. $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲- باناخ است، اگر و فقط اگر $(X,\|.,.\|_\infty)$ یک فضای باناخ باشد.

برهان. از لم ۱. ۱. ۸ داریم، همگرایی در ۲- نرم معادل همگرایی در نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ است، بنابراین کافی است نشان دهیم که (x_n) باتوجه به ۲- نرم کوشی است اگر وفقط اگر باتوجه به نرم بدست آمده کوشی باشد، و دنباله (x_n) نیز باتوجه به ۲- نرم کوشی است اگر و فقط اگر برای هر $y \in X$, $\lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n, y \| = 0$ اگر و فقط اگر برای هر $i = 1,\dots,d$، $\lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n, u_i \| = 0$ اگر و فقط اگر $\lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n \|_\infty = 0$ اگر و فقط اگر (x_n) باتوجه به نرم بدست آمده کوشی باشد.

نتیجه ۱. ۱. ۱۲. قضیه نقطه ثابت. فرض کنید $(X,\|.,.\|)$ یک فضای ۲- باناخ باشد. T را نگاشتی از X به X قرار دهید به طوری که برای هر $x, y, z, \in X$،

$$\| Tx - Ty, z \| \le k \| x - y, z \|$$

و k یک ثابت در $(0,1)$ است. در این صورت T یک نقطه ثابت منحصر به فرد در X دارد.

برهان. باتوجه به نرم بدست آمده $\|.\|_\infty$ برای نگاشت T خواهیم داشت:

$$\| Tx - Ty \|_\infty \le k \| x - y \|_\infty$$

از آنجا که $(X,\|.,.\|_\infty)$ یک فضای باناخ است، به وسیله قضیه نقطه ثابت برای فضاهای باناخ نتیجه می‌گیریم که T یک نقطه ثابت منحصر به فرد در X دارد.

۲-۱ فضاهای n- نرم

تعریف ۱. ۲. ۱. $n \in N$ و X را یک فضای حقیقی مقدار از بعد $d \geq n$ قرار دهید (d در اینجا می‌تواند نامتناهی باشد) یک تابع حقیقی مقدار $\|.,\ldots,.\|$ روی X^n با خاصیت‌های زیر:

(۱) $\| x_1,\ldots,x_n \| = 0$ اگر و فقط اگر $x_1,\ldots,x_n$ وابسته خطی باشند.

(۲) $\| x_1,\ldots,x_n \|$ تحت هر جایگشت پایاست

(۳) برای هر $\alpha \in R$ ، $\| x_1,\ldots,x_{n-1},\alpha x_n \| = |\alpha| \, \| x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \|$

(۴) $\| x_1,\ldots,x_{n-1},y+z \| \leq \| x_1,\ldots,x_{n-1},y \| + \| x_1,\ldots,x_{n-1},z \|$

را یک n- نرم روی X گویند و زوج $(X,\|.,\ldots,.\|)$ را یک فضای n- نرم می‌گویند.

مثال ۱. ۲. ۲. یک مثال بدیهی از فضای n– نرم، $X = R^n$ با n– نرم زیر است:

$$\| x_1,\ldots,x_n \|_E := abs\left(\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

به طوری که برای هر $i = 1,\ldots,n$ ، $x_i = (x_{i1},\ldots,x_{in}) \in R^n$ (E،فضای اقلیدسی است).

در نظر داشته باشید که در فضاهای n– نرم $(X,\|.,\ldots,.\|)$ برای مثال خاصیت‌های زیر را نیز داریم:

برای همهٔ $x_1,\ldots,x_n \in X$ ، $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1} \in R$ ، $\| x_1,\ldots,x_n \| \geq 0$ و

$$\| x_1,\ldots,x_{n-1},x_n \| = \| x_1,\ldots,x_{n-1},x_n + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{n-1} x_n \|$$

از این به بعد $n \geq 2$ و $(X,\|.,\ldots,.\|)$ را یک فضای n– نرم از بعد $d \geq n$ فرض می‌کنیم.

مجموعهٔ $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ در X را مجموعه‌ای مستقل خطی قرار می‌دهیم. باتوجه به $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ تابع $\|.,\ldots,.\|_\infty$ روی X^{n-1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| x_1,\ldots,x_{n-1} \|_\infty := \max \{ \| x_1,\ldots,x_{n-1},\alpha_i \| : i = 1,\ \ldots,n \}$$

حال نتیجه زیر را داریم:

قضیه ۱. ۲. ۳. تابع $\|.,\ldots,.\|_\infty$ یک $(n-1)$- نرم روی X است.

برهان. (۱) اگر $x_1,\ldots,x_{n-1}$ وابسته خطی باشند، آنگاه برای هر $i=1,\ldots,n$، $\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|=0$ و بنـابراین $\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty=0$. بـرعکس اگـر $\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty=0$، آنگـاه باتوجـه بـه اینکـه $x_1,\ldots,x_{n-1}$ و α_i برای هر $i=1,\ldots,n$ وابسته خطی‌اند، $\|x_1,\ldots,x_{n-1},\alpha_i\|=0$ و این مطلب تنها وقتی اتفاق می‌افتد که $x_1,\ldots,x_{n-1}$ وابستهٔ خطی باشند.

(۲) از آنجا که $\|x_1,\ldots,x_{n-1},\alpha_i\|=0$ تحت هر جایگـشت $\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ پایـا اسـت، پـس طبـق تعریف $\|x_1,\ldots,x_{n-1}\|_\infty$ نیز تحت هر جایگشت پایا است.

(۳) $$\begin{aligned}\|x_1,\ldots,x_{n-2},\alpha x_{n-1}\|_\infty&=\max\{\|x_1,\ldots,x_{n-2},\alpha x_{n-1},\alpha_i\|:i=1,\ldots,n\}\\&=|\alpha|\max\{\|x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1},\alpha_i\|:i=1,\ldots,n\}\\&=|\alpha|\,\|x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}\|_\infty\end{aligned}$$

(۴) ملاحظه کنید،

$$\begin{aligned}\|x_1,\ldots,x_{n-2},y+z\|_\infty&=\max\{\|x_1,\ldots,x_{n-2},y+z,\alpha_i\|:i=1,\ldots,n\}\\&\le\max\{\|x_1,\ldots,x_{n-2},y,\alpha_i\|:i=1,\ldots,n\}\\&\quad+\max\{\|x_1,\ldots,x_{n-2},z,\alpha_i\|:i=1,\ldots,n\}\\&=\|x_1,\ldots,x_{n-2},y\|_\infty+\|x_1,x_{n-2},z\|_\infty\end{aligned}$$

بنابراین $\|.,\ldots,.\|_\infty$ یک $(n-1)$- نرم را روی X تعریف می‌کند.

نتیجه ۱. ۲. ٤. هر فضای n- نرم یک فضای (n-r) –نرم برای همه $r=1,\ldots,n-1$ است. بخصوص هـر فضای n– نرم یک فضای نرم‌دار است.

در همین جا به n– نرم‌ها بسنده می‌کنیم امادر n– نرم‌ها نیز بحـث گـسترده اسـت و حالتهـای متنـاهی‌البعـد استاندارد و نامتناهی و همچنین همگرایی، دنباله‌های کوشی و تام بودن نیز بررسی شده است که بـه برهـان قضیه نقطه ثابت منجر می‌شوند. [۵]

فصل دوم

فضاهای خطی فازی