بسم الله الرحمن الرحيم

١٠٧٩٩٦

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی(معادلات دیفرانسیل)

غیر قابل کنترل بودن حل معادله غیر خطی موج

توسط:

محبوبه نیک خو

استاد راهنما:

دکتر فرامرز تهمتنی

تیرماه ۸۷

به نام خدا

غیر قابل کنترل بودن حل معادله غیر خطی موج

به وسیله‌ی:

محبوبه نیک خو

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی کاربردی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:--عالی--

دکتر فرامرز تهمتنی، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته). ....

دکتر اسماعیل حسام الدینی، استادیار بخش ریاضی..

دکتر کاظم مصالحه، استادیار بخش ریاضی..

تیرماه ۱۳۸۷

تقدیم به

خانواده ام

سپاسگزاری

حمدوسپاس پروردگاری که نعمت آموختن را به من عنایت فرمـود و بـدین وسـیله موجبات بهره مندی از دریای بی کران علم و دا نش را در محضر اسـاتید بزرگـواری چون جناب دکتر تهمتنی و سایراساتید گرانقدررا نصیبم نمود.

اکنون که به لطف پروردگار مهربان،مقطعی دیگررا به پایان مـی رسـا نـم، لازم مـی دارم مراتب تقدیر وتشکر خودرا ازحمات بی شا ئبـه دکتـر فرامـرز تهمتنـی، اسـتاد راهنما و آقایان دکتر مصالحه و دکتر حسام الدینی به عنوان اساتید مـشاور، تقـدیم محضرایشان نمایم.امیدوارم بتوا نم ادامه دهنده راه این عزیزان باشم ورسالتی راکـه بر عهده دارم به نحو احسن به ا نجام برسا نم.

در پایان از خا نواده ام به ویژه پدرو مادر و همسر مهربا نم که بـدون همیـاری آنـان موفق به انجام این کار نمی شدم صمیما نه تشکروقدردا نی می نمایم.

چکیده

غیر قابل کنترل بودن حل معادله غیر خطی موج

به وسیله ی

محبوبه نیک خو

معادلات دیفرانسیل دارای انواع متفاوتی است که این تفاوت حاصل از طبقه بندی های مختلف است .معادلات دیفرانسیل را بر حسب خطی بودن، می توان به دو نوع معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی تقسیم بندی کرد.

بر طبق این طبقه بندی ها یکی از انواع معا لات دیفرانسیل، معادله دیفرانسیل نیمه خطی مرتبه دوم می باشد که معادله موج وگرما از این دسته می باشند.

شکل کلی این گونه معادلات همیشه دارای جواب قابل کنترل نمی باشد. بنابراین در بسیاری از مسائل، به جای به دست آوردن جواب کلی، با به دست آوردن انرژی سیستم که از لحاظ کا ربردی از اهمیت ویژه ای در مسائل فیزیکی برخور دار است، رفتار جواب سیستم را مورد بررسی قرار می دهند.

در این پایان نامه به بحث درباره وجود یا عدم وجود جواب سراسری برای دسته ای از این معادلات با شرایط اولیه مشخص پردازیم

در فصل ۳ حل دسته ای از معادلات غیر خطی موج را مورد بررسی قرار می دهیم.در این راستا ابتدا تابع انرژی وسپس تابع فعال مسئله را یافته و سپس با فرض منفی بودن انرژی اولیه، نشان می دهیم که در یک زمان متناهی مشخص ، جواب غیر قابل کنترل است

در فصل ۴وجود جواب سراسری را برای یک معادله نیمه خطی گرما، بررسی می کنیم و سپس گرادیان جواب را تخمین زده و افت انرژی را در این معادله نشان می دهیم

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

۱-۱ مقدمه

پیشرفت چشمگیرعلم فیزیک در دو قرن اخیر را باید مرهون نظریه معادلات دیفرانسیل دانست.نظریه معادلات که شامل معادلات دیفرانسیل معمولی[1] و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی[2] است، شاخه ای از آنالیزریاضی می باشد که رابطه نزدیکی با فیزیک دارد.

این معادلات، اساس فیزیک نظری را تشکیل می دهند.اواسط قرن هیجده،دالمبرت[3] مساله تار مرتعش را مطرح کرد و اولین دسته از معادلات دیفرانسیل مشتقات جزیی را به دست آورد.بعد از آن اویلر[4] به این معادله علاقه مند شد و شرایط یکتایی جواب را بررسی کرد.روش اویلر در یافتن جوابهای مسائل مقدار مرزی به شکل سریهای مثلثاتی بود که این روش بعد ها توسط دانیل برنولی[5] در حل مساله تار مرتعش به کار برده شد.بعدها لاگرانژ[6] و لاپلاس[7] نیز این گونه مسائل را پیگیری کردند.

اویلردرکارهایش به سایرمعادلات دیفرانسیل جزیی نیز پرداخته است نظریات وی را می‌توان به عنوان اصول اولیه معادلات دیفرانسیل جزیی دانست.روش سری های مثلثاتی برای به دست آوردن جواب مسائل مقدار مرزی توسط فوریه[8] کامل شد.

---

[1] Ordinary differential equation (O.D.E)
[2] Partial differential equation (P.D.E)
[3] D'Alembert
[4] Euler
[5] Bernoulli
[6] Lagrange
[7] Laplace
[8] Fourier

کاربرد این روش در نظریه هدایت گرما ،تحت عنوان سری های فوریه ،در آنالیز ریاضی کـاربرد دارد.معادلات دیفرانسیل جزئی زمانی وارد بخش دیگـری از فیزیـک نظـری شـد کـه لاپـلاس دریافت پتانسیل عمل متقابل بین دو جسم، در معادله‌ای که معادله لاپلاس نام دارد صدق مـی کند.در آغاز قرن نوزدهم نظریه عمومی پتانسیل توسط گرین[۹]، گاوس [۱۰] و پواسـن[۱۱] بیـان شـد. این نتایج راهی در نظریه معادلات دیفرانسیل جزئی گشودند کـه بـا فیزیـک ارتبـاط مـستقیم داشته و در آن به مسائل مقدار مرزی پرداخته می‌شود.

اوج شکوفایی این مبحث در قرن بیستم بود که کوشی[۱۲]،ریمان[۱۳] ، و پوانکاره[۱۴] از محققان آن دوره بودند.

نظریه معادلات دیفرانسیل جزیی با انتشار مقالات والترا[۱۵] و فردهـولم[۱۶] بـه نقطـه اوج خـود رسید.کارهای این دو تن به ابداع نظریه معادلات انتگرالـی منجـر شـد.در ایـن نظریـه قـضایای جدیدی در وجود جواب مسائل مقدار مرزی، به ویژه در نظریه پتانـسیل ،اثبـات و نتـایج قابـل توجهی نیز به دست آمد.

در چند دهه اخیر روش های جدیدی ابداع شده اند که بر آنالیز تابعی و نظریـه توزیـع هـا و توابع تعمیم یافته استوارند.در این زمینه از کارهای سوبولو[۱۷] می توان نام برد.

این نظریه زنده و پویا ، اکنون عرصه مهمترین تحقیقات ریاضی است و هر روزه مطلبی جالب و نکته ای جدید از آن مطرح می شود.

---

[۹] Green
[۱۰] Gauss
[۱۱] Poisson
[۱۲] Cauchy
[۱۳] Riemann
[۱۴] Poincare
[۱۵] Volterra
[۱۶] Friedholm
[۱۷] Sobolov

۲-۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با رابطه ای به شکل زیر می توان تعریف کرد:

$$F(x,y,\ldots,u,u_x,u_y,\ldots,u_{xx},u_{xy},\ldots)=0 \qquad (۱-۲-۱)$$

که شامل متغیر های مستقل $x,y,\ldots$ و یک تابع u از این متغیر ها ومشتقات جزیی $u_{xx},u_{xy},\ldots$ از این تابع می باشد. برای تسهیل در نماد گذاری، مشتق‌گیری جزیی را به صورت زیر صورت نمایش می دهیم.به عنوان مثال $\frac{\partial u}{\partial x}$ را به صورت u_x و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را به صورت u_{xx} نشان می دهیم.

معادلات دیفرانسیل جزئی رده بندی‌های متفاوتی‌دارد دو نوع‌از مهم ترین رده بندی‌ها عبارتند از:

مرتبه یک معادله دیفرانسیل جزئی :که برابرست با بالاترین مرتبه مشتق جزئی ظاهرشده درمعادله.

خطی یا غیرخطی بودن معادله دیفرانسیل جزئی : که در یک معادله دیفرانسیل خطی متغیر وابسته u وهمه مشتقاتش به صورت خطی ظاهر می شوند ولی در معادلات غیرخطی یکی از عوامل غیرخطی است.درمسائل کاربردی،معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم خطی به دلیل کاربرد فراوانشان از اهمیت ویژه ای برخوردارند.

معادلات نیمه خطی[۱۸] یکی از انواع معادلات غیرخطی می‌باشند. در این معادلات عاملی که بیشترین مرتبه را دارد دارای ضریب خطی است ولی در مراتب پایین ترغیرخطی می‌باشند.

ازانواع معادلات نیمه خطی معادله موج [۱۹] و معادله گرما[۲۰] می باشد که دراین پایان نامه ما با این دو معادله سروکارداریم و بیشتر در مورد آنها صحبت خواهیم کرد.

سه نوع اصلی از معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم عبارتند از:

۱) **معادلات سهموی** که روندهای شارش گرما وپخش را توصیف می کنند.

۲) **معادلات هذلولوی** که دستگاههای مرتعش وحرکت موج را توصیف می کنند.

۳) **معادلات بیضوی** که پدیده های حالت پایدار را توصیف می کنند.

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مجموعه ای ازتمام جواب های معادله می‌باشد. جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی ، دارای یک ثابت دلخواه(اختیاری) می‌باشد

---

[۱۸] Quasi- Linear
[۱۹] Wave-Equation
[۲۰] Heat-Equation

درحالی که جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی ، دارای یک تابع دلخواه است. در اکثر موارد جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جزئی باید در شرایط دیگری موسوم به شرایط مقدار مرزی یا شرایط مقدار اولیه که از فیزیک مسئله ناشی می شود ، صدق کند. اعمال این شرایط در معادلات دیفرانسیل جزئی به علت وجود تنوع زیاد درانتخاب تابع دلخواه ، در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار مشکل تر است. به همین علت، جواب های معادلات دیفرانسیل جزئی ، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

بنابراین‌در بسیاری ازمسائل ، به جای به دست آوردن جواب کلی، با بدست آوردن انرژی سیستم که از لحاظ کاربردی‌ازاهمیت ویژه‌ای در مسائل فیزیکی برخورداراست، رفتار جواب سیستم رامورد بررسی قرار می‌دهند. این‌روش که ما نیز ازآن استفاده خواهیم کرد ، به روش انرژی مرسوم است.

در معادلات دیفرانسیل جزئی که در آنها یکی از متغیرهای مستقل ، زمان می باشد، مقادیر متغیر وابسته وغالباً مشتق زمانی آن در یک لحظه خاص، مثلا $t = 0$ می تواند جزء داده های مسئله باشد. معمولاچنین شرایطی را شرایط اولیه می نامند. به هرحال شرایط اولیه را می توان همچون شرایط مرزی در یک نمودار($n+1$) بعدی در نظر گرفت که یک بعد آن زمان است.

تحلیل های زیادی برای تعیین شرایط مرزی صورت گرفته است به طوری که با قرار دادن شرایط مرزی روی معادلات دیفرانسیل جزئی ، جواب های یکتا وپایدار برای معادلات دیفرانسیل به دست بیاید.

سه نوع شرایط مرزی اساسی وجود دارد که غالباً در شرح پدیده های فیزیکی رخ می دهد. این شرایط عبارتند از:

۱) **شرایط دیریکله**[۲۱] : در این نوع شرایط u در هر نقطه از مرز داده شده تعریف شده است.

۲) **شرایط نویمن**[۲۲] : در این نوع شرایط مقدار مشتق نرمال u یعنی $\frac{\partial u}{\partial n}$ در هر نقطه از مرز داده شده ، معلوم می باشد.

۳) **شرایط کوشی** : در این حالت اگر یکی از متغیرهای مستقل مثلا زمان (t) باشد. مقدار uو $\frac{\partial u}{\partial t}$ در زمان $t = 0$ (یعنی مقادیر اولیه uو $\frac{\partial u}{\partial t}$) معلوم می باشد.

Dirichlet [۲۱]
Numann [۲۲]

فصل دوم

مفاهیم و پیش نیازها

۲- مفاهیم و پیش نیازها

۲-۱ مقدمه

با توجه به این که ابزار کار ما در ریاضیات همان تعاریف و مفاهیم اولیه مـی باشـند ، درایـن فصل سعی خواهیم کرد که این مفاهیم و پیش نیاز ها را به طور مفید و مختصر بیان‌کنیم .

۲-۲ تعاریف اولیه

عملگر لاپلاس[۱]

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، nمتغیر مستقل در یک فضای n-بعدی باشند. در این صورت عملگر لاپلاس به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \qquad (۱-۲-۲)$$

چگالی شار یا میدان واگرایی (div):

فرض کنید داشته باشیم:

$$F(x, y) = M(x, y)\vec{i} + N(x, y)\vec{j} \qquad (۲-۲-۲)$$

---

[۱] Laplace

دراین صورت چگالی شار F در نقطه (x,y) که با $divF(x,y)$ نشان داده می شودبه صورت زیر تعریف می‌شود:

$$divF(x,y)=\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial N(x,y)}{\partial y} \qquad (۲-۲-۳)$$

ما این‌تعریف‌رابرای یک تابع دو مولفه ای بیان کرده‌ایم.به راحتی می‌توان این‌تعریف رابرای یک تابع با n مولفه بسط داد.

فضای L^{P}

فرض کنیم p عدد حقیقی و مثبتی باشد. تابع اندازه پذیر f کـه روی $\Omega\subseteq R^{n}$ تعریـف شـده است را متعلق به فضای $L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ گویند هرگاه:

$$\int_{\Omega}|f(x)|^{p}\,dx<\infty$$

از آنجایی که

$$|f+g|^{p}\le 2^{p}(|f|^{p}+|g|^{p})$$

بنابراین مجموع دو تابع متعلق به $L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ در $L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ است. ازطرفی‌چون برای‌تابع f که متعلق به $L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ است، αf نیز در $L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ است، $\alpha f+\beta g$ نیزمتعلق به این فضا است. لذا فضاهای L^{P} خطی هستند. برای هر $f\in L^{\mathrm{P}}(\Omega)$ تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{\mathrm{P}}=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^{\mathrm{P}}\,dx\right)^{\frac{1}{\mathrm{P}}}$$

با توجه به این تعریف می‌بینیم که $\|f\|_{\mathrm{P}}=0$ اگر و تنها اگر تقریباً همه جـا روی Ω ، $f=0$ واگر α عدد حقیقی مثبتی باشد در این صورت

$$\|\alpha f\|_{\mathrm{P}}=|\alpha|.\|f\|_{\mathrm{P}}$$

همچنین برای $p \le 1$

$$\| f+g \|_p \le \| f \|_p + \| g \|_p$$

نرم بی نهایت ($ess\sup$):

فرض کنید داشته باشیم $f \in L^\infty$. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = ess\sup f = \inf\{c > 0 : |f(x)| \le c\} \qquad (۴-۲-۲)$$

و یا به عبارت دیگر:

$$\|f\|_\infty = ess'\sup\ f = \inf\{ c > 0 : m\{x : |f(x)| > c\} = 0\} \qquad (۵-۲-۲)$$

و این دقیقاً همان تعریف نرم در فضای L^∞ می‌باشد.

طول عمر جواب[۲]

سوپریمم همه T ها، به طوریکه بر روی $[0,T)\times R^n$ جواب وجود داشته باشد، طول عمرجواب یک معادله نامیده می شود.که این عـدد را بـا $T_{\max}$نـشان مـی‌دهـیم و دارای سـه حالـت زیـر می‌باشد.

۱- جواب سراسری[۳] است اگر $T_{\max} = +\infty$.

۲- جواب غیر سراسری[۴] است اگر $T_{\max} < +\infty$.

۳- جواب در زمان متناهی غیر قابل کنترل[۵] است اگر $0 < T_{\max} < +\infty$

Lifespan [۲]
Global [۳]
Nonglobal [۴]
Blow up [۵]

۲-۳ فضای سوبولو

در این قسمت به تعاریف و قضایایی درباره فضای سوبولو می پردازیم کـه در فـصل‌هـای‌آینـده ازآنها استفاده خواهیم کرد.

فرض کنید $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ یک چند تایی مرتب باشد به طوری که:

$$\alpha_i \in N_0 = \{0,1,2,3,\ldots\} \qquad \forall i = 0,1,2,3,\ldots n$$

تعریف می کنیم:

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad |\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n \qquad (۲-۳-۱)$$

حال فرض کنید Ω یک مجموعه باز در R^n باشد. فضای $C^k(\Omega)$ برابر مجموعـه تمـام توابـع مختلط پیوسته مانند u می باشدکه برای $|\alpha|\le k$, $D^{\alpha}u$ نیز پیوسته و کراندار باشد.هم چنـین $\|u\|_{C^k}$را یک نرم در C^kبه صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha|<k} \sup\left|D^{\alpha}u(x)\right| \qquad (۲-۳-۲)$$

هم چنین $C_\circ^{\infty}(\overline{\Omega})$ یک زیر فضای خاص $C^{\infty}(\Omega)$ می باشد کـه شـامل تمـام توابـع $u\in C^{\infty}(\Omega)$ است که مشتقات متوالی آن ها تا بی نهایت پیوسته بوده و علاوه بر این روی کـران Ω داشـته باشیم:

$$D^{\alpha}u = \circ, \qquad \forall\alpha\in N_\circ^n \qquad (۲-۳-۳)$$

تعریف فضای سوبولو:

فرض کنید $K\in N$ و $p\in[1,\infty)$ باشد.فضای سوبولو $W^{K,p}(\Omega)$ عبـارت اسـت از یـک فـضای خطـی از همـه تـابع هـای $u\in L^p(\Omega)$ بـه قـسمی کـه $D^{\alpha}u\in L^p(\Omega)$ بـرای همـه $\alpha\in N_\circ^n$ با $|\alpha|\le K$هم چنین فضای سوبولو زیر فضای خطی نرم دار با نرم $\|\cdot\|_{K.p.\Omega}$ می باشد به طوریکه:

$$\left\| u \right\|_{K.p.\Omega} = \left(\sum_{\alpha \le K} \left\| D^{\alpha} u \right\|_{p.\Omega}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (۴-۳-۲)$$

$$\left\| u \right\|_{K.\infty,\Omega} = ess\ \sup_{\alpha \le K} \left\| D^{\alpha} u \right\| \qquad (۵-۳-۲)$$

اگر $p = ۲$ باشد این فضا یک فضای هاسدورف[۶] با ضرب داخلی زیر می باشد:

$$\left\langle u,v \right\rangle_{K,2,\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le K} \left(D^{\alpha} u(x) \right) \overline{\left(D^{\alpha} v(x) \right)}\, dx \qquad (۶-۳-۲)$$

در این حالت می نویسیم :

$$W^{K,2} = H^{K}(\Omega) \qquad (۷-۳-۲)$$

هم‌چنین‌فضای $W_{\circ}^{K,p}(\Omega)$ بستاری[۷] از $C_{\circ}^{\infty}(\Omega)$ در $W^{K,p}(\Omega)$ می باشدکه‌دراین‌حالت نیز داریم:

$$W_{\circ}^{K,2} = H_{\circ}^{K}(\Omega) \qquad (۸-۳-۲)$$

۲-۴ معادله انتگرالی لاگرانژ_ گرین

فرض کنید داشته باشیم $u \in C^{1}(\Omega)$ و هم چنین $\frac{d}{dn}$ نشاندهنده مشتق جهتی در جهت بردار نرمـال خـارجی $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ روی $\partial\Omega$ و $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ و ایـن کـه dS_x یـک جزکوچک از سطح وانتگرال نسبت به متغیر x باشد. در این صورت ما انتگرال جزء به جزء را بـه صورت زیر بیان می کنیم:

$$\int_{\Omega} v^{T} D_{k} u dx = \int_{\partial\Omega} v^{T} u \xi_{k} dS_{x} - \int_{\Omega} \left(D_{k} v^{T} \right) u\, dx \qquad (۱-۴-۲)$$

---

[۶] Hazdorf space
[۷] Closure

که در آن u,v توابع برداری متعلق به $C^1(\Omega)$ می باشند.
حال فرض کنید که L یک عملگر دیفرانسیلی خطی باشد و داشته باشیم :

$$Lu = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u \qquad (۲-۴-۲)$$

که درآن a_αها یک ماتریس مربع را در $C^m(\overline{\Omega})$ به وجود می آورند. حال با استفاده از رابطه انتگرال جزء به جزء و با جایگذاری Lu به جای $D_k u$ در آن، به رابطه زیر می رسیم:

$$\int_\Omega v^T \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u dx = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(v^T a_\alpha(x)\right) u\, dx + \int_{\partial\Omega} M(v,u,\xi) dS_x$$

(۳-۴-۲)

مجموع مشتقات در هر کدام از عبارت های بالاحداکثر $m-1$ است. تابع Mدر صفحه انتگرال گیری خطی می باشد.و یکتا نیست.اما به مرتبه انتگرال جزء به جزء گفته شده وابسته است.
رابطه (۲-۴-۳) همان رابطه **لاگرانژ_ گرین** برای عملگر Lمی باشد. این رابطه به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\int_\Omega v^T Lu\, dx = \int_\Omega \left(\widetilde{L}v\right)^T u\, dx + \int_{\partial\Omega} M(v,u,\xi) dS_x \qquad (۴-۴-۲)$$

جایی که $\widetilde{L}$ عملگر الحاقی Lاست و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\widetilde{L}v = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_\alpha(x)^{\mathrm{T}} v\right) \qquad (۵-۴-۲)$$

به عنوان مثال می توان در نظر گرفت: $L=\Delta$. در این صورت با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int_\Omega v\,\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_i v u_{x_i} \xi_i dS_x - \int_\Omega \sum_i v_{x_i} u_{x_i} dx \qquad (۶-۴-۲)$$

رابطه بالا را به صورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\int_\Omega v\,\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{du}{dn} dS_x - \int_\Omega \sum_i v_{x_i} u_{x_i} dx \qquad (۷-۴-۲)$$

اما با به کار بردن بیش از یک مرتبه انتگرای جزء به جزء به دست می آوریم:

$$\int_{\Omega} v\,\Delta u\,dx = \int_{\Omega} u\,\Delta v\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)dS_x \qquad (۲-۴-۸)$$

۲-۵ نامساوی های اساسی

در این بخش چند نامساوی مهم را که ابزار کار ما در این پایان نامه می باشند بیان و اثبات خواهیم کرد.

۲-۵-۱ نامساوی هولدر[۸]

فرض کنید p,q نماهای مزدوج باشند بدین معنی که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و هم چنین $1<p<\infty$.حال اگر Xیک فضای اندازه با اندازه μ باشدو نیز f,g توابعی اندازه پذیرروی X باشند بطوری که:

$$f,g : X \to [0,\infty)$$

در این صورت داریم:

$$\int_X fg\,d\mu \le \left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (۲-۵-۱)$$

اثبات:فرض کنید داشته باشیم:

$$A=\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad B=\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

هر گاه داشته باشیم $A=0$ یا $B=0$آن گاه $f=0$ یا $g=0$ پس نامساوی هولدربرقرار است.اگر $A>0$ و $B=\infty$ و یا $B>0$ و $A=\infty$ آنگاه نامساوی هولدر باز هم بر قرار است.پس‌فرض می‌کنیم که: $0<A<\infty, \qquad 0<B<\infty$

---

[۸] Holder