بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حدس اردوش در زمینه تطابق در ابرگراف‌ها

سخنران: علی نصراصفهانی

زمان: شنبه ۹۲/۱۲/۲۴ ساعت ۹ صبح

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱- دکتر غلامرضا امیدی

۲- دکتر رضا رضاییان

۳- دکتر بهناز عمومی

۴- دکتر محمدرضا عبودی

چکیده

به دوتایی $H = (V, E)$ که V مجموعه‌ای متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های V است ابرگراف می‌گوییم. اعضای V را رئوس و اعضای E را یال‌های ابرگراف H می‌نامیم. به مجموعه‌ای از یال‌های H که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد یک تطابق گوییم. در سال ۱۹۶۵ اردوش حدس زد که یک ابرگراف n رأسی H که تعداد رئوس هر یال آن برابر k و اندازه بزرگ‌ترین تطابق آن برابر s است دارای یکی از دو ساختار زیر است

- H زیر ابرگرافی کامل روی $sk + k - 1$ رأس دارد و $n - sk - k + 1$ رأس دیگر آن، رئوس تنها می‌باشند،
- H متعلق به خانواده‌ای از ابرگراف‌ها می‌باشد که یال‌های آن همه‌ی k تایی‌هایی را شامل می‌شود که با یک مجموعه‌ی مشخص رئوس از اندازه‌ی s اشتراک دارند.

برای k و s دلخواه در حالت کلی، اردوش نشان داد که این حدس برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ برقرار است، یعنی تابع $g(k)$ وجود دارد که برای $n \geq g(k)s$ این حدس برقرار است.

بیشتر تلاش‌های صورت گرفته برای اثبات این حدس، سعی در بهبود این کران بوده است. سوداکو و همکارانش در سال ۲۰۱۲ نشان دادند حدس اردوش برای $n > 3k^2s$ برقرار است. فرانکل نیز در سال ۲۰۱۲ این کران را به $n > \frac{2k^2s}{log(k)}$ بهبود داد و در حالت خاص $k = 3$، این حدس را به اثبات رسانید. در این پایان‌نامه به بررسی کران‌های به‌دست آمده توسط فرانکل، سوداکو و همکارانش می‌پردازیم.

فرانکل در سال ۲۰۱۳ موفق شد کران بهتری برای حدس اردوش بیابد که اشاره‌ی مختصری نیز به آن خواهیم داشت.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

حدس اردوش در زمینه تطابق در ابرگراف‌ها

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

علی نصر اصفهانی

استاد راهنما

دکتر غلامرضا امیدی

اسفند ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای علی نصراصفهانی
تحت عنوان

حدس اردوش در زمینه تطابق در ابرگراف‌ها

در تاریخ ۹۲/۱۲/۲۴ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما   دکتر غلامرضا امیدی

۲– استاد مشاور   دکتر رضا رضاییان

۳– استاد داور۱   دکتر بهناز عمومی

۴– استاد داور۲   دکتر محمدرضا عبودی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر فرید بهرامی

سپاس خدای را که هر چه دارم از اوست. به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکنم.

اسفند ۱۳۹۲

کلیه حقوق مادی مترتّب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلّق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

فهرست مطالب

چکیده

به دوتایی $H = (V, E)$ که V مجموعه‌ای متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های V است ابرگراف می‌گوییم. اعضای V را رئوس و اعضای E را یال‌های ابرگراف H می‌نامیم. به مجموعه‌ای از یال‌های H که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد یک تطابق گوییم. در سال ۱۹۶۵ اردوش حدس زد که یک ابرگراف n رأسی H که تعداد رئوس هر یال آن برابر k و اندازه بزرگ‌ترین تطابق آن برابر s است دارای یکی از دو ساختار زیر است

- H زیر ابرگرافی کامل روی $sk + k - ۱$ رأس دارد و $n - sk - k + ۱$ رأس دیگر آن، رئوس تنها می‌باشند،

- H متعلق به خانواده‌ای از ابرگراف‌ها می‌باشد که یال‌های آن همه‌ی k تایی‌هایی را شامل می‌شود که با یک مجموعه‌ی مشخص رئوس از اندازه‌ی s اشتراک دارند.

برای k و s دلخواه در حالت کلی، اردوش نشان داد که این حدس برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ برقرار است، یعنی تابع $g(k)$ وجود دارد که برای $n \geq g(k)s$ این حدس برقرار است.

بیشتر تلاش‌های صورت گرفته برای اثبات این حدس، سعی در بهبود این کران بوده است. سوداکو و همکارانش در سال ۲۰۱۲ نشان دادند حدس اردوش برای $n > ۳k^۲s$ برقرار است. فرانکل نیز در سال ۲۰۱۲ این کران را به $n > \frac{۲k^۲s}{log(k)}$ بهبود داد و در حالت خاص $k = ۳$، این حدس را به اثبات رسانید. در این پایان‌نامه به بررسی کران‌های به‌دست آمده توسط فرانکل، سوداکو و همکارانش می‌پردازیم.

فرانکل در سال ۲۰۱۳ موفق شد کران بهتری برای حدس اردوش بیابد که اشاره‌ی مختصری نیز به آن خواهیم داشت.

فصل ۱

مقدمه

ترکیبیات حدی شاخه‌ای از ترکیبیات است که به مطالعه‌ی این موضوع می‌پردازد که یک مجموعه از اشیاء متناهی (اعداد، گراف‌ها، بردارها، مجموعه‌ها و ...) تحت شرایط از پیش تعیین شده چه مقدار بزرگ یا به چه اندازه می‌تواند کوچک باشد. بخش مهمی از ترکیبیات حدی را نظریه‌ی مجموعه‌های حدی تشکیل می‌دهد. در این نظریه اشیاء در واقع زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه‌ی n عضوی هستند و هدف تعیین بیشترین یا کمترین تعداد از این اشیاء است زمانی که شرایط خاصی روی آن‌ها رخ دهد. به عنوان مثال تعداد زیرمجموعه‌های $k-$عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی تحت این شرط که هر دو زیرمجموعه یکدیگر را قطع کنند به چه اندازه می‌تواند بزرگ باشد؟ یا تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی با این شرط که هیچ زیرمجموعه‌ای، شامل زیرمجموعه‌ی دیگری نشود حداکثر چه مقدار می‌تواند باشد؟

این دو مسئله‌ی مطرح شده جزء مسائل مشهور و بنام در ترکیبیات حدی است که اولی به قضیه‌ی اردوش-کو-رادو [۱] و دیگری به قضیه‌ی اسپرنر [۲] معروف است.

یکی دیگر از زمینه‌های ترکیبیات حدی، نظریه‌ی رمزی [۳] می‌باشد که در ادامه با بیان یک مثال ساده این نظریه را معرفی می‌کنیم.

حداکثر چند نفر در یک مهمانی می‌توان دعوت کرد به طوری که از هر سه نفر که در این مهمانی شرکت کرده‌اند دو نفر از آن‌ها با هم دوست باشند و دو نفر از آن‌ها با هم دوست نباشند؟ به عبارت دیگر هیچ سه نفری وجود نداشته باشد که هر سه با هم دوست باشند یا هر سه با هم رفاقتی نداشته باشند؟

اگر بخواهیم مسئله را با زبان نظریه گراف مدل کنیم، کافیست به هر شرکت‌کننده در این مهمانی یک رأس نظیر کنیم و دو رأس را به یکدیگر وصل می‌کنیم اگر و تنها اگر دو شخص نظیر با یکدیگر رابطه دوستی داشته باشند. در این صورت مسئله مطرح شده معادل است با این که در این گراف حداکثر تعداد رئوس چقدر می‌تواند باشد تا سه

[۱] Erdös-Ko-Rado

[۲] Sperner

[۳] Ramsey

رأس دوبه‌دو مجاور یا سه رأس دوبه‌دو نامجاور وجود نداشته باشد.

این مسئله جزء ساده‌ترین مسائلی است که نظریه رمزی تلاش می‌کند به آن پاسخ دهد. علیرغم ظاهر ساده مسائل مطرح شده در این حوزه، پاسخگویی به برخی از این سؤالات جزء دشوارترین و در عین حال مهم‌ترین و پرکاربردترین مسائل ریاضیات است.

قبل از معرفی موضوع این پایان‌نامه به بیان تعاریف مقدماتی نظریه گراف که در این نوشتار دانستن آن‌ها برای خواننده لازم است می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱ به دوتایی $G = (V, E)$ که V مجموعه‌ای متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دوتایی V است گراف می‌گوییم.

V را مجموعه‌ی رئوس و E را مجموعه‌ی یال‌های گراف G می‌نامیم. ▲

تعریف ۲.۱.۱ به دوتایی $H = (V, E)$ که V مجموعه‌ای متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های V است ابرگراف می‌گوییم.

همانند تعریف گراف، V را مجموعه‌ی رئوس و E را مجموعه‌ی یال‌های ابرگراف H می‌نامیم. در عمل چون نمایش ابرگراف‌ها به سهولت نمایش گراف‌ها نیست، آن‌ها را به صورت مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی مرجع نشان می‌دهند.

در تعریف فوق توجه کنید که اعضای E لزوماً از اندازه‌ی یکسان نیستند. ▲

تعریف ۳.۱.۱ در ابرگراف H، اگر اعضای مجموعه‌ی E همگی هم‌اندازه و از اندازه‌ی k باشند، آن‌گاه H را یک ابرگراف $k-$یکنواخت گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید v رأسی از گراف G باشد، آن‌گاه به تعداد یال‌های گراف G که شامل v می‌شوند، درجه‌ی رأس v گوییم و آن را با نماد $d(v)$ نمایش می‌دهیم.

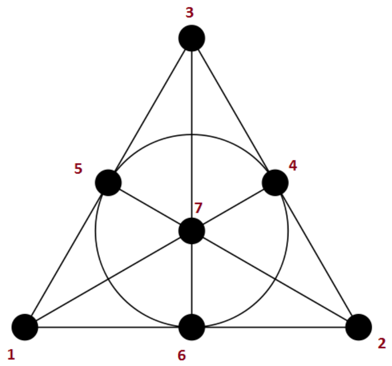
اگر درجه‌ی رأسی برابر صفر باشد، آن را رأس تنها می‌نامیم. ▲

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. به گراف H که مجموعه‌ی رئوسش همان مجموعه رئوس V و یال‌هایش زیرمجموعه‌ای از یال‌های E باشد، یک زیرگراف G گوییم و آن را با $H \subseteq G$ نمایش می‌دهیم. ▲

مثال ۶.۱.۱ شکل زیر یک ابرگراف ۳$-$یکنواخت روی مجموعه‌ی نقاط $\{۱, ۲, ۳, ..., ۷\}$ است که در آن مجموعه‌ی یال‌ها عبارت است از $E = \{۱۵۳, ۱۷۴, ۱۶۲, ۲۴۳, ۲۷۵, ۳۷۶, ۴۵۶\}$.

این ابرگراف، به طرح فانو معروف [۴] است. ▲

[۴] Fano



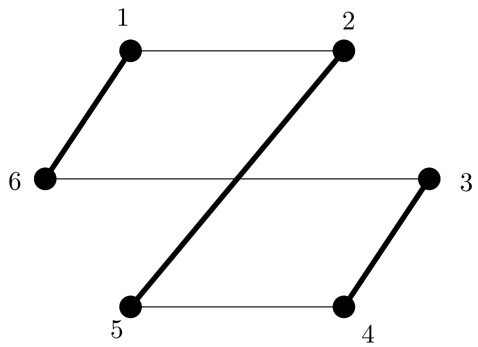
شکل ۱.۱: ابرگراف فانو

تعریف ۷.۱.۱ زیرمجموعه‌ای از رئوس یک گراف که دوبه‌دو به هم متصل باشند را یک خوشه می‌نامیم. ▲

تعریف ۸.۱.۱ گراف H را زیرگراف القایی G گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و هر یالی از گراف G که دو انتهای آن در $V(H)$ است یالی از H باشد. ▲

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید G یک گراف با مجموعه یال‌های $E(G)$ و $M \subseteq E(G)$ باشد، اگر هیچ دو یالی از M انتهای مشترکی نداشته باشند، آن‌گاه به مجموعه‌ی M یک تطابق می‌گوییم.
اگر تطابق M همه‌ی رأس‌های گراف G را شامل شود به آن یک تطابق کامل گوییم.
تطابق در ابرگراف نیز به صورت مشابه تعریف می‌شود. ▲

مثال ۱۰.۱.۱ یال‌هایی که در گراف زیر به صورت پررنگ مشخص شده‌اند، یک تطابق برای گراف زیر تشکیل می‌دهند.



شکل ۲.۱: یک تطابق در گراف

▲

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید که $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_t$ ابرگراف‌هایی روی مجموعه نقاط $\{1, 2, ..., n\}$ باشند، اگر یال‌های $F_1, F_2, \ldots, F_t$ که $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2, ..., F_t \in \mathcal{F}_t$ دو به دو مجزا باشند، آن‌گاه به مجموعه یال‌های

$\{F_1, F_2, ..., F_t\}$ یک تطابق رنگین کمان می‌گوییم. ▲

مثال ۱۲.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{F}_1$، $\mathcal{F}_2$ و $\mathcal{F}_3$ سه ابرگراف روی ۷ رأس باشند، در این صورت یال‌های A_3، B_1 و C_1 تشکیل یک تطابق رنگین کمان برای این ابرگراف‌ها را می‌دهند.

$$\mathcal{F}_1 = \{\underbrace{\{1,2,3\}}_{A_1}, \underbrace{\{1,4,6,7\}}_{A_2}, \underbrace{\{5,7\}}_{A_3}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\underbrace{\{2,3,6\}}_{B_1}, \underbrace{\{3,4,5\}}_{B_2}, \underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{B_3}\}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{\underbrace{\{1,4\}}_{C_1}, \underbrace{\{1\}}_{C_2}, \underbrace{\{6,7\}}_{C_3}\}$$

▲

قضیه ۱۳.۱.۱ برای هر n و k متعلق به مجموعه‌ی اعداد طبیعی داریم $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

اثبات این قضیه با استفاده از تعریف انتخاب، واضح خواهد بود.

تعریف ۱۴.۱.۱ مجموعه‌ای از ابرگراف‌های n رأسی k-یکنواخت که بزرگ‌ترین تطابق آن‌ها از اندازه‌ی s است و بیشترین تعداد یال ممکن را دارند با $M_k(n,s)$ نشان می‌دهیم. ▲

تعریف ۱۵.۱.۱ مجموعه‌ای از ابرگراف‌های n رأسی k-یکنواخت که هر یال از آنها با یک مجموعه رئوس از اندازه s اشتراک ناتهی دارد را با نماد $Cov_k(n,s)$ نمایش می‌دهیم. ▲

تعریف ۱۶.۱.۱ تابع $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ را محدب گوییم، هرگاه برای هر $0\le t\le 1$ و هر $x,y\in(a,b)$ داشته باشیم

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

. ▲

قضیه ۱۷.۱.۱ فرض کنید $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع محدب باشد. همچنین فرض کنید $x_1,\dots,x_n\in I$ و $\lambda_1,\dots,\lambda_n\ge 0$ به طوری که $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$، آن‌گاه

$$f(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i f(x_i).$$

این نامساوی به نامساوی ینسن [۵] معروف است.

برهان. با استقرا روی n و با استفاده از تعریف محدب بودن، به‌دست می‌آید. ■

تعریف ۱۸.۱.۱ رابطه‌ی ترتیب جزیی، یک رابطه‌ی دوتایی $\ll$ روی مجموعه‌ی P است اگر دارای خاصیت‌های بازتابی، پاد تقارنی و تراگذری باشد یعنی برای هر a، b و c در P

- $a \ll a$؛
- اگر $a \ll b$ و $b \ll a$ آن‌گاه $a = b$؛
- اگر $a \ll b$ و $b \ll c$ آن‌گاه $a \ll c$.

▲

۲.۱ معرفی موضوع

آن چه در این پایان‌نامه به آن پرداخته شده است یک حدس در زمینه ترکیبیات حدی است که توسط اردوش در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید و با وجود تمام تلاش‌هایی که برای اثبات یا رد آن صورت گرفته هنوز باز مانده است، البته در بعضی حالات خاص این حدس اثبات شده که در ادامه ضمن بیان حدس به کوشش‌هایی که در جهت اثبات آن صورت گرفته می‌پردازیم.

حدس ۱.۲.۱ [۴] فرض کنید H یک ابرگراف k-یکنواخت روی n رأس باشد که اندازه بیشترین تطابق آن s است. اگر H دارای بیشترین تعداد یال ممکن باشد، آن‌گاه

- H زیر ابرگرافی کامل روی $sk+k-1$ رأس است که $n-sk-k+1$ رأس دیگر آن، رئوس تنها می‌باشند یا
- متعلق به خانواده‌ای از ابرگراف‌ها است که یال‌های آن همه‌ی k تایی‌هایی را شامل می‌شود که با یک مجموعه‌ی مشخص رئوس از اندازه‌ی s اشتراک دارند یا به عبارت دیگر

$$e(H) \leq \max\left\{\binom{sk+k-1}{k}, \binom{n}{k} - \binom{n-s}{k}\right\}$$

قبل از بیان این حدس، حالت خاصی از آن در سال ۱۹۵۹ توسط اردوش و گالای به اثبات رسید [۵]. در واقع آن‌ها درستی حدس را برای حالت $k = ۲$ یعنی برای گراف‌ها نشان دادند.

در سال ۲۰۱۲، فرانکل [۶] نیز حالت $k = ۳$ این حدس را به اثبات رسانید [۱۰].

[۵] Jensen

[۶] Frankl

برای k و s در حالت کلی، اردوش نشان داد که این حدس برای n به اندازه‌ی کافی بزرگ برقرار است، یعنی تابع $g(k)$ وجود دارد که برای $n \geq g(k)s$ این حدس پایدار است [۴].

قضیه ۲.۲.۱ [۴] برای $n > g(k)s$ که $g(k)$ ثابتی برحسب k است، $M_k(n, s) = Cov_k(n, s)$.

بیشتر فعالیت‌های صورت گرفته در این زمینه سعی در بهبود این کران داشته‌اند. در همین راستا بالاباش [۷] ، دیکین [۸] و اردوش نشان دادند که برای $g(k) \geq ۲k^۳$، حدس برقرار است [۳]. در واقع آنها قضیه زیر را ثابت کردند.

قضیه ۳.۲.۱ [۳] فرض کنید $H = (V, E)$ ابرگرافی k-یکنواخت روی n رأس، دارای اندازه‌ی بیشترین تطابق s باشد به طوری که $n > ۲k^۳s$، آن‌گاه $M_k(n, s) = Cov_k(n, s)$.

سپس فرانکل و فوردی [۹] این کران را به $g(k) \geq ۱۰۰k^۲$ بهبود بخشیدند [۱۱].

در این پایان نامه ابتدا در فصل دوم نشان می‌دهیم که حدس اردوش برای $g(k) \geq ۳k^۲$ پابرجاست. بدین منظور ابتدا ابزار انتقال را تعریف کرده، چند لم و قضیه راجع به آن بیان می‌کنیم و در ادامه نیز حدس ۱.۲.۱ را برای ابرگراف‌های انتقال داده شده‌ای که تعداد رئوس آن‌ها از $۳k^۲s$ بیشتر است به اثبات می‌رسانیم.

در فصل سوم نیز حالت خاص $k = ۳$ را در نظر گرفته، با بیان مقدمات مورد نیاز و تقسیم‌بندی ابرگراف‌های ۳-یکنواخت به سه دسته‌ی $s = ۲$، $s = ۳$ و $s \geq ۴$، هر سه مورد را به طور جداگانه مورد بررسی قرار داده و اثبات می‌کنیم.

فصل چهارم همانند فصل دوم تمرکز خود را بر روی ابرگراف‌های انتقال داده شده معطوف می‌کنیم و بهترین کران موجود برای تعداد رئوس حدس ۱.۲.۱ را به دست می‌آوریم.

---

[۷] Bollobás

[۸] Daykin

[۹] Füredi

فصل ۲

بررسی حدس اردوش در حالت کلی

در این فصل یک برای کمترین تعداد رئوس ابرگرافی می‌یابیم که در حدس ۱.۲.۱ صدق می‌کند. برای این کار به معرفی ابزار انتقال نیاز داریم، آن را تعریف کرده، ابرگراف‌هایی که در حدس ۱.۲.۱ صدق می‌کنند را انتقال داده و در قالب قضیه‌ی زیر حدس ۱.۲.۱ را بیان و اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۴.۰.۲ [۱۲] برای هر n، k و s، که در رابطه‌ی $s < \frac{n}{3k^2}$ صدق کند، هر ابرگراف k-یکنواخت روی n رأس بدون s یال مجزا، حداکثر شامل $\binom{n}{k} - \binom{n-s+1}{k}$ یال است.

برای اثبات این قضیه از استقرا روی n و s استفاده خواهیم کرد. گام اصلی در اثبات این قضیه، منجر به بیان صورت دیگری از حدس ۱.۲.۱، موسوم به نسخه‌ی چندرنگی حدس اردوش گردید که توسط اهارونی [1] و هوارد [2] به طور مستقل بیان شد [۱].

حدس ۵.۰.۲ فرض کنید $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_s$ خانواده‌هایی از زیر مجموعه‌های k تایی یک مجموعه‌ی n عضوی باشند، اگر برای هر $1 \leq i \leq s$ $|\mathcal{F}_i| > \max\{\binom{n}{k} - \binom{n-s+1}{k}, \binom{ks-1}{k}\}$، آن گاه یک تطابق رنگین کمان از اندازه‌ی s وجود دارد.

مطالب این فصل عمدتاً برگرفته از منبع [۱۲] است.

۱.۲ معرفی ابزار انتقال

یکی از ابزارهای مهم و پرکاربرد در نظریه حدی مجموعه‌ها، ابزار انتقال می باشد که با به کارگیری آن، توجه و دقت خود را تنها به مجموعه‌هایی با ساختار مطمئن محدود می‌کنیم. در ادامه برای اثبات قضیه‌ی ۴.۰.۲، این تکنیک را معرفی نموده، چندلم در این باره بیان کرده و با استفاده از آن، اثبات قضیه‌ی ۴.۰.۲ را ارائه خواهیم کرد.

[1] Aharoni

[2] Howard

برای مطالعه‌ی بیشتر و داشتن پیش‌زمینه‌ای مناسب در مورد این تکنیک می‌توانید به مرجع [۸] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۱.۲ فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های هم اندازه $[n]$ باشند، دراین‌صورت برای i,j که $1 \leq i < j \leq n$ و برای هر $F \in \mathcal{F}$، $S_{ij}(F)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$S_{ij}(F) = \begin{cases} F \setminus \{j\} \cup \{i\} & j \in F, i \notin F, F \setminus \{j\} \cup \{i\} \notin \mathcal{F} \\ F & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

خانواده‌ی $S_{ij}(\mathcal{F})$ را نیز به صورت $S_{ij}(\mathcal{F}) = \{S_{ij}(F) : F \in \mathcal{F}\}$ تعریف می‌کنیم. ▲

فرض کنید برای هر i و j که $1 \leq i < j \leq n$ ، عمل انتقال را روی خانواده‌ی $\mathcal{F}$ انجام داده باشیم، در این صورت خانواده‌ی حاصل را با نماد $Sh(\mathcal{F})$ نشان می‌دهیم. در واقع نمی‌توان i و j با شرط $i < j$ یافت به طوری که $Sh(\mathcal{F}) \neq \mathcal{F}$.

لم ۲.۱.۲ [۱۲] $S_{ij}(\mathcal{F})$ در گزاره‌های زیر صدق می‌کند:

- $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$
- اگر $\mathcal{F}$، $k-$یکنواخت باشد، آن‌گاه $S_{ij}(\mathcal{F})$ نیز $k-$یکنواخت است.
- اگر خانواده‌های $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_s$ دارای این خاصیت باشند که هیچ زیرمجموعه‌ی $F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2, ..., F_s \in \mathcal{F}_s$ دو به دو مجزا نباشند، آن‌گاه خانواده‌های $S_{ij}(\mathcal{F}_1), S_{ij}(\mathcal{F}_2), ..., S_{ij}(\mathcal{F}_s)$ نیز دارای همین خاصیت هستند.

برهان. با توجه به تعریف انتقال، گزینه‌های اول و دوم به سادگی قابل مشاهده هستند، زیرا این عمل اندازه و تعداد مجموعه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

برای اثبات قسمت سوم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $F_1, F_2, ..., F_s$ موجود باشند به طوری که $S_{ij}(F_1), S_{ij}(F_2), ..., S_{ij}(F_s)$ دو به دو مجزا باشند در صورتی که طبق فرض می‌دانیم $F_1, F_2, ..., F_s$ دو به دو مجزا نیستند. بدون کاستن از کلیت مطلب می‌توانیم فرض کنیم که $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. اگر برای هر k، $F_k = S_{ij}(F_k)$ با فرض این‌که F_kها دو به دو مجزا نیستند به تناقض می‌رسیم. پس k چنان موجود است که $S_{ij}(F_k) \neq F_k$. اکنون سه حالت زیر را در مورد F_k بررسی می‌کنیم.

۱) F_k نه شامل i است و نه شامل j.

در این مورد با اعمال S_{ij} روی F_k طبق تعریف واضح است که $F_k = S_{ij}(F_k)$.

۲) F_k دارای i باشد، خواه j در آن باشد خواه نباشد.

باز هم طبق مورد اول $F_k = S_{ij}(F_k)$.

۳) F_k دارای j باشد اما i را در خود جای ندهد.

تنها در این حالت است که $F_k \neq S_{ij}(F_k)$.

چون عمل انتقال را برای i و j تعریف کرده‌ایم تنها حالتی که ممکن است این اتفاق رخ دهد این است که $j \in F_k$ و در این‌صورت $i \in S_{ij}(F_k)$. چون فرض کرده‌ایم که $F_۱$ و $F_۲$ اشتراک دارند، اگر این اشتراک در عضوی غیر از j مانند x اتفاق بیفتد آن‌گاه در $S_{ij}(F_۱)$ و $S_{ij}(F_۲)$ باید شاهد x نیز باشیم که این خلاف مجزا بودن $S_{ij}(F_k)$ ها طبق فرض است.

بنابراین تنها حالت ممکن که $S_{ij}(F_k)$ ها دوبه‌دو مجزا باشند این است که $S_{ij}(F_۱) = F_۱ \setminus \{j\} \cup \{i\}$ و $S_{ij}(F_k) = F_k$ برای $k \geq ۲$.

تا این‌جا نتیجه گرفته‌ایم که $F_۱$ و $F_۲$ فقط و فقط در عضو j اشتراک دارند و برای $k \geq ۲$، $F_k = S_{ij}(F_k)$. پس می‌توان $F_۱$ و $F_۲$ را به صورت زیر نوشت.

$F_۱ = A_۱ \cup \{j\}$ و $F_۲ = A_۲ \cup \{j\}$ که $A_۱$ و $A_۲$ کاملاً مجزا هستند. با اعمال S_{ij} روی $F_۲$، باید i را جایگزین j کنیم که در این صورت $F_۲ \neq S_{ij}(F_۲)$. پس تنها حالت ممکن این است که $F'_۲ = (A_۲ \cup \{j\}) \setminus \{j\} \cup \{i\}$ در $\mathcal{F}_۲$ واقع شود. اکنون با جایگزینی $F'_۲$ به جای $F_۲$ به مجموعه‌های مجزای $F_۱, F'_۲, \ldots, F_s$ دست پیدا می‌کنیم که این برخلاف فرض مطرح شده در صورت لم است. ■

قبل از بیان لم بعدی ابتدا انتقال‌های پیاپی $\{S_{in}\}_{۱\leq i\leq n-۱}$ را انجام داده به طوری که پس از آن، هیچ $\{S_{in}\}_{۱\leq i\leq n-۱}$ قابل اجرا نباشد. خانواده‌های به دست آمده را همان $\mathcal{F}_۱, \mathcal{F}_۲, \ldots, \mathcal{F}_s$ نامگذاری می‌کنیم و از هر $\mathcal{F}_i$ دو زیر خانواده‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_i(n) =& \{F \setminus \{n\} : F \in \mathcal{F}_i, n \in F\} \\
\mathcal{F}_i(\overline{n}) =& \{F : F \in \mathcal{F}_i, n \notin F\}
\end{aligned}
$$

برای درک هر چه بهتر عمل انتقال و نحوه‌ی به‌دست آوردن زیرخانواده‌های شده از هر $\mathcal{F}_i$، به ارائه‌ی مثالی کوچک و مفید از این مطلب می‌پردازیم.

مثال ۳.۱.۲ فرض کنید که $\mathcal{F}$ به صورت زیر باشد.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{&\{۱,۲,۳\}, \{۱,۵,۶\}, \{۱,۴,۷\}, \{۲,۴,۶\}, \{۲,۳,۴\}, \{۲,۴,۵\}, \\
&\{۲,۵,۷\}, \{۱,۲,۷\}, \{۱,۳,۷\}, \{۱,۶,۷\}, \{۱,۵,۷\}\}.
\end{aligned}
$$

در این صورت پس از انتقال‌های متوالی $S_{in}(\mathcal{F})$ داریم

$$\mathcal{F} = \{\{۱,۲,۳\},\{۱,۵,۶\},\{۱,۲,۴\},\{۲,۴,۶\},\{۱,۲,۵\},\{۱,۲,۶\},$$
$$\{۱,۲,۷\},\{۱,۳,۴\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۴,۵\},\{۱,۳,۵\}\}.$$

و $\mathcal{F}(n)$ و $\mathcal{F}(\overline{n})$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{F}(n) = \{\{۱,۲\}\}$$
$$\mathcal{F}(\overline{n}) = \{\{۱,۲,۳\},\{۱,۵,۶\},\{۱,۲,۴\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۴,۵\},$$
$$\{۲,۴,۶\},\{۱,۲,۵\},\{۱,۲,۶\},\{۱,۳,۴\},\{۱,۳,۵\}\}$$

▲

لم ۴.۱.۲ [۱۲] فرض کنید $\mathcal{F}_۱,\mathcal{F}_۲,\ldots,\mathcal{F}_s$ خانواده‌های انتقال یافته باشند جایی که هر $\mathcal{F}_i$، k_i-یکنواخت است و $\sum_{i=۱}^{s} k_i \leq n$. هم چنین فرض کنید که هیچ زیرمجموعه‌ی $F_۱ \in \mathcal{F}_۱, F_۲ \in \mathcal{F}_۲,\ldots,F_s \in \mathcal{F}_s$ دو به دو مجزا نیستند. آن گاه برای هر $۰ \leq r \leq s$ خانواده‌های $\mathcal{F}_۱(n),\ldots,\mathcal{F}_r(n),\mathcal{F}_{r+۱}(\overline{n}),\ldots,\mathcal{F}_s(\overline{n})$ دارای همان ویژگی هستند.

برهان. از برهان خلف استفاده می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $F_۱ \in \mathcal{F}_۱(n),\ldots,F_r \in \mathcal{F}_r(n)$ و $F_{r+۱} \in \mathcal{F}_{r+۱}(\overline{n}),\ldots,F_s \in \mathcal{F}_s(\overline{n})$ چنان وجود دارند که دو به دو مجزا هستند. با توجه به تعریف $\mathcal{F}_i(n)$ و $\mathcal{F}_i(\overline{n})$ می‌دانیم که برای $۱ \leq i \leq r$، $F_i \cup \{n\} \in \mathcal{F}_i$ و به ازای $r+۱ \leq i \leq s$، $F_i \in \mathcal{F}_i$.

حال اندازه‌ی $\bigcup_{i=۱}^{s} F_i$ را که همان تعداد عناصر متمایز در آن است را محاسبه می‌کنیم که چون F_iها دو به دو متمایزند این مقدار برابر است با

$$\sum_{i=۱}^{s}|F_i| = \sum_{i=۱}^{r}k_i - ۱ + \sum_{i=r+۱}^{s}k_i = \sum_{i=۱}^{s}k_i - r \leq n - r$$

چون F_iها زیرمجموعه‌های $[n]$ هستند و $|\bigcup_{i=۱}^{s}F_i|$ حداکثر $n-r$ شده است، بنابراین عناصر مجزای $x_۱,x_۲,\ldots,x_r$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $۱ \leq i \leq r$، $x_i \notin \bigcup_{i=۱}^{s}F_i$.

$F_i \cup \{n\}$ تحت عمل S_{x_in} ثابت است یعنی با به کاربردن این انتقال تغییری رخ نمی‌دهد زیرا طبق تعریف انتقال‌های پیاپی S_{in} را برای خانواده‌های $\mathcal{F}_k$ قبلاً به کار برده‌ایم. بنابراین مجموعه‌ی $F_i \cup \{x_i\} = (F_i \cup \{n\}) \setminus \{n\} \cup \{x_i\}$ باید در $\mathcal{F}_i$ باشد.

حال برای $۱ \leq i \leq r$، با قراردادن $F'_i = F_i \cup \{x_i\}$، این F'_iها همراه با F_i برای $r+۱ \leq i \leq s$، تشکیل s مجموعه‌ی مجزا از $\mathcal{F}_i$ها می‌دهند که خلاف فرض است. ■

۲.۲ نتیجه‌ی اصلی

در ادامه‌ی کار چند لم و نتیجه‌ی مورد نیاز را مطرح کرده و اثبات خواهیم کرد، پس از آن با استفاده از نتایج به‌دست آمده از اثبات آن‌ها، به اثبات قضیه‌ی ۴.۰.۲ خواهیم پرداخت. اما قبل از آن به بیان تعاریف مورد نیاز در این بخش می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۲ فرض کنید ی Ω و توزیع احتمال P داده شده باشد، یک متغیر تصادفی تابعی است مانند $X(\omega)$، روی Ω که مقداری روی $\mathbb{R}$ اختیار می‌کند. ▲

تعریف ۲.۲.۲ فرض کنید X یک متغیر تصادفی با توزیع احتمال $f(k)$ باشد، امید ریاضی متغیر تصادفی X که با نماد $\mathbb{E}(X)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k kf(k)$$

▲

مثال ۳.۲.۲ فرض کنید متغیر تصادفی X تعداد شیرها در پرتاب سه سکه باشد، در این صورت امید ریاضی X برابر است با

$$\mathbb{E}X = ۰ \cdot \frac{۱}{۸} + ۱ \cdot \frac{۳}{۸} + ۲ \cdot \frac{۳}{۸} + ۳ \cdot \frac{۱}{۸} = ۱/۵$$

تعبیر این مقدار این است که اگر به دفعات زیاد -مثلاً ۱۰۰۰ بار- این سه سکه را پرتاب کنیم انتظار داریم تعداد شیرهای رو شده برابر ۱۵۰۰ باشد. ▲

لم ۴.۲.۲ [۱۲] فرض کنید $\mathcal{F}_۱, \mathcal{F}_۲, \dots, \mathcal{F}_s$ خانواده‌هایی از زیرمجموعه‌های $[n]$ باشند به طوری که برای هر i، $\mathcal{F}_i$ شامل مجموعه‌هایی از اندازه ی k_i باشد، همچنین $|\mathcal{F}_i| > (s-۱)\binom{n-۱}{k_i-۱}$ و $n \geq \sum_{i=۱}^{s} k_i$. در این صورت s مجموعه‌ی مجزای $F_۱ \in \mathcal{F}_۱, F_۲ \in \mathcal{F}_۲, \dots, F_s \in \mathcal{F}_s$ وجود خواهد داشت.

برهان. اثبات را با استقرا روی s و n بیان خواهیم کرد. ابتدا پایه استقرا؛ حالت $s = ۱$ واضح است. برای s در حالت کلی ابتدا حالتی را که n کمترین مقدار ممکن خود را داشته باشد یعنی $n = \sum_{i=۱}^{s} k_i$، مسئله را اثبات می‌کنیم.

یک جایگشت یکنواخت تصادفی π روی $[n]$ را در نظر می‌گیریم و متغیرهای تصادفی مشخصه‌ی X_i را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$X_۱ = ۱$ اگر و تنها اگر $\{\pi(۱), \dots, \pi(k_۱)\}$ مجموعه‌ای در $\mathcal{F}_۱$ باشد و در غیر این صورت $X_۱ = ۰$، و در حالت کلی

X_j به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$X_j = \begin{cases} ۱ & \{\pi(k_۱+\cdots+k_{j-۱}+۱),\ldots,\pi(k_۱+\cdots+k_j)\} \in \mathcal{F}_j \\ ۰ & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

اکنون به خلاف، فرض می کنیم که s مجموعه‌ی مجزا از خانواده‌های مختلف وجود ندارد، پس بنابر تعریف X_jها داریم

$$X_۱+\cdots+X_s \leq s-۱ \tag{۱.۲}$$

از طرفی به راحتی می‌توان امید ریاضی X_iها را به‌دست آورد که همان احتمال وجود یک مجموعه k_i عضوی در $\mathcal{F}_i$ است، پس

$$\mathbb{E}(X_i) = \frac{|\mathcal{F}_i|}{\binom{n}{k_i}}.$$

و با توجه به فرض $|\mathcal{F}_i| > (s-۱)\binom{n-۱}{k_i-۱}$ و رابطه‌ی بالا داریم

$$\mathbb{E}(X_i) > \frac{(s-۱)\binom{n-۱}{k_i-۱}}{\binom{n}{k_i}} = (s-۱)\frac{k_i}{n}$$

با جمع بستن این نامساوی روی i و با توجه به این که $n=\sum_i k_i$ خواهیم داشت

$$\sum_i \mathbb{E}(X_i) > s-۱$$

که در تناقض با رابطه‌ی ۱.۲ است.

اکنون برای اثبات حکم استقرا، فرض کنیم $n > \sum_{i=۱}^{s} k_i$. با توجه به لم ۴.۱.۲ با به کاربردن انتقال‌های متوالی $\{S_{in}\}_{۱\leq i\leq n-۱}$ به خانواده‌های $\mathcal{F}_i$ می‌رسیم که طبق لم ۲.۱.۲ به لحاظ اندازه‌ی تطابق ماکزیمم رفتار یکسانی با خانواده‌های $\mathcal{F}_i$ اولیه دارند. در مرحله‌ی بعد هر $\mathcal{F}_i$ را به $\mathcal{F}_i(n)\cup\mathcal{F}_i(\overline{n})$ افراز می‌کنیم، اما به منظور پرهیز از مجموعه‌های تهی، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که i چنان وجود داشته باشد که $\{n\}\in\mathcal{F}_i$. بعد از باز نام‌گذاری می‌توان فرض کرد که این خانواده $\mathcal{F}_۱$ باشد.

چون $|\mathcal{F}_i| > (s-۱)\binom{n-۱}{k_i-۱}$ و در هر $\mathcal{F}_i$ حداکثر $\binom{n-۱}{k_i-۱}$ مجموعه شامل n وجود دارد، پس تعداد مجموعه‌های فاقد n حداقل برابر است با

$$|\mathcal{F}_i| > (s-۱)\binom{n-۱}{k_i-۱} - \binom{n-۱}{k_i-۱} = (s-۲)\binom{n-۱}{k_i-۱}$$

هر $\mathcal{F}_i$ بیشتر از $(s-۲)\binom{n-۱}{k_i-۱}$ مجموعه دارد که در حقیقت، این مجموعه‌ها زیرمجموعه‌های $[n-۱]$ می‌باشند. با