بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

عنوان:

z^0-ایده‌آل‌ها در حلقه توابع پیوسته

پژوهشگر:

فاطمه ابراهیمی‌فر

استاد راهنما:

دکتر مصطفی قادرمزی

استاد مشاور:

دکتر صابر ناصری

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

اسفند ماه ۱۳۹۰

تعهد نامه***

اینجانب فاطمه ابراهیمی‌فر دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز دانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه گروه ریاضی تعهد می نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

فاطمه ابراهیمی‌فر

۱۳۹۰/۱۲/۱۷

تقدیم به...

پدر و مادر عزیزم

و

استاد راهنمای بزرگوارم؛

دکتر مصطفی قادرمزی

تقدیر و تشکر...

در آغاز خداوند بی‌همتا را سپاس می‌گویم که در سایه‌ی لطف و رحمتش به من این توفیق را عنایت فرمود تا گامی دیگر در مسیر علم و دانش و معرفت برداشته و قطره‌ای از دریای بیکران دانش که در تجلی آفرینش است را مورد کنکاش قرار دهم.

بی شک تحقق این امر و به انجام رساندن این رساله جز با بهره‌گیری از راهنمایی، مساعدت و همکاری اساتید گرامی، کمک‌های دلسوزانه‌ی دوستان و خانواده‌ی عزیزم امکانپذیر نبود. لذا وظیفه‌ی خود می‌دانم که تشکر خود را از تمامی این عزیزان ابراز نمایم.

از زحمات بی‌دریغ و مساعدت‌های دلسوزانه‌ی استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر مصطفی قادرمزی که علاوه بر این رساله افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از کمک‌ها و زحمات استاد مشاور بزرگوارم جناب آقای دکتر صابر ناصری که علاوه بر این رساله افتخار شاگردی ایشان را در دوران تحصیل داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از همه‌ی اساتید گروه ریاضی دانشگاه کردستان که در محضر ایشان کسب علم نموده‌ام به ویژه از داور داخلی این رساله جناب آقای دکتر محمدظاهر کاظمی‌بانه صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم.

در پایان از خانواده‌ی عزیزم به پاس اینکه همواره در تمامی لحظات زندگی‌ام حامی و پشتیبان بنده بودند سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی ویژگی‌های z°-ایده‌آل‌ها پرداخته‌ایم. فضاهایی را شناسایی کرده‌ایم که در آن z-ایده‌آل‌ها و z°-ایده‌آل‌ها یکی هستند و به کمک z°-ایده‌آل‌ها فضاهای گسسته‌ی پایه‌ای، فضاهای ناهمبند شدید و P-فضاها را شناسایی کرده‌ایم. در آخر دو فضای توپولوژی تقریباً P-فضا، X و Y که P-فضا نیستند ساخته‌ایم که در $C(X)$ هر z°-ایده‌آل اول یا ایده‌آل اول مینیمال است یا ایده‌آل ماکسیمال است و در $C(Y)$، z°-ایده‌آل اولی وجود دارد که نه ایده‌آل اول مینیمال است نه ایده‌آل ماکسیمال است.

واژه‌های کلیدی: z°-ایده‌آل،z-ایده‌آل فضای ناهمبند شدید، فضای گسسته پایه‌ای، صفر-مجموعه، P-فضا، تقریباً P-فضا، ایده‌آل ماکسیمال، ایده‌آل اول مینیمال، ایده‌آل اول،z°-ایده‌آل اول، فضای هاوسدورف، فضای کاملاً منظم ،مقسوم‌علیه صفر.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مبحث حلقه توابع پیوسته در یک نگاه کلی ارتباط خواص توپولوژی فضای Xو خواص جبری حلقه توابع پیوسته حقیقی روی آن یعنی $C(X)$ است. علاوه بر ویژگی‌های جبری که هر حلقه‌ای داراست، این حلقه به واسطه‌ی ارتباطش با ویژگی‌های توپولوژی Xاهمیت دارد. بسیاری از ایده‌آل‌ها را در این حلقه می‌توان به کمک مفاهیم توپولوژی ساخت که این امر در هر حلقه‌ای میسر نیست. در چنین وضعیتی است که می‌توان بین خواص جبری حلقه $C(X)$ و خواص توپولوژی X ارتباط برقرار کرد که یکی از اهداف مهم مطالعه‌ی حلقه توابع پیوسته است. یکی از این ایده‌آل‌ها با این ویژگی بارز، z-ایده‌آل است که ابتدا توسط کهلز[۱] [۱۶] و در حلقه توابع پیوسته معرفی شد و از آن زمان تاکنون مورد توجه ریاضی‌دانان بوده است با گذشت زمان انواع دیگری از این ایده‌آل‌ها مطرح گردید. در سال ۱۹۹۹ نوع دیگری از این ایده‌آل‌ها به نام z°-ایده‌آل‌ها را در حلقه $C(X)$ ارائه دادند که ابتدا در حلقه‌های کاهشی با عنوان d-ایده‌آل‌ها مطرح شده بود.

یکی از اهداف مهم مطالعه‌ی حلقه توابع پیوسته برقراری ارتباط بین ویژگی‌های جبری حلقه‌ی $C(X)$ و ویژگی‌های توپولوژی X است که ما در این پایان‌نامه به کمک z°-ایده‌آل‌ها به این ارتباط پرداخته‌ایم.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. فصل اول مفاهیم و قضایای از جبر جابه‌جایی، توپولوژی، نظریه مجموعه‌ها و $C(X)$ که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده کرده ایم آورده شده است.

در فصل دوم z-ایده‌آل‌ها در حلقه $C(X)$ معرفی شده، مجموع z-ایده‌آل‌ها و کوچکترین z-ایده‌آل شامل یک ایده‌آل و بزرگترین z-ایده‌آل در یک ایده‌آل بررسی شده است. نشان داده‌ایم جمع دو z-ایده‌آل، یک z-ایده‌آل است. در بخش دوم فصل دوم، βX به عنوان فشرده‌سازی از X معرفی شده است.

[۱] Kohls

در فصل سوم به مطالعه z°-ایده‌آل‌ها در حلقه $C(X)$ پرداخته‌ایم. z°-ایده‌آل در حلقه $C(X)$ را تعریف کرده‌ایم و چند معادل جبری و توپولوژی برای z°-ایده‌آل را معرفی کرده‌ایم. علاوه بر این نشان داده‌ایم اشتراک دلخواه از z°-ایده‌آل‌ها،z°-ایده‌آل است و هر ایده‌آل اول مینمال،z°-ایده‌آل است. نشان داده‌ایم هر z°-ایده‌آل در $C(X)$ یک z-ایده‌آل است اما عکس آن لزوماً برقرار نیست که آن را با یک مثال بیان کرده‌ایم. نشان داده‌ایم اگر یک ایده‌آل در $C(X)$ شامل مقسوم‌علیه‌های صفر باشد آنگاه آن ایده‌آل مشمول در یک z°-ایده‌آل است. علاوه بر این کوچکترین z°-ایده‌آل شامل یک ایده‌آل که تمام عناصرش مقسوم‌علیه صفر است و بزرگترین z°-ایده‌آل در یک ایده‌آل که تمام عناصرش مقسوم‌علیه صفر است بررسی شده است. نشان داده‌ایم:
هر z°-ایده‌آل در $C(X)$ اصلی است اگر و تنها اگر فضای X ناهمبند پایه‌ای باشد.
هم‌چنین، اشتراک دلخواه از z°-ایده‌آل‌های پایه‌ای در $C(X)$ اصلی است اگر و تنها اگر X ناهمبند شدید باشد.

بعلاوه:

X، P-فضا است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل در $C(X)$ شامل مقسوم‌علیه‌های صفر، z°-ایده‌آل باشد.

هم‌چنین، X تقریباً P-فضا است اگر و تنها اگر هر z-ایده‌آل در $C(X)$، z°-ایده‌آل باشد.

به‌ویژه نشان داده‌ایم جمع دو z°-ایده‌آل در $C(X)$ لزوماً z°-ایده‌آل نیست اما اگر فضای X ناهمبند پایه ای باشد جمع دو z°-ایده‌آل در $C(X)$، z°- ایده‌آل است. به‌سادگی نشان داده‌ایم اگر هر z°-ایده‌آل اول در $C(X)$ ماکسیمال باشد، آنگاه X، P-فضا است که از آن نتیجه می‌شود اگر X تقریباً P-فضا باشد ولی P-فضا نباشد، z°-ایده‌آل اولی در $C(X)$ وجود دارد که ماکسیمال نیست. هم‌چنین اگر فضای X تقریباً P-فضا باشد ولی P-فضا نباشد، z°-ایده‌آل اولی در $C(X)$ وجود دارد به‌طوری‌که ایده‌آل اول مینیمال نیست. در بخش سوم همین فصل به این دو سؤال پاسخ مثبت داده‌ایم:

۱) آیا تقریباً P-فضایی که P-فضا نباشد وجود دارد که هر z°-ایده‌آل اول در $C(X)$ یا ایده‌آل اول مینیمال باشد یا ایده‌آل ماکسیمال باشد؟

۲) آیا تقریباً P-فضایی وجود دارد که دارای یک z°--ایده‌آل اول باشد که نه ایده‌آل اول مینیمال باشد و نه ایده‌آل ماکسیمال باشد؟

فصل ۱

تعاریف اولیه و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و نکات اولیه که در فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌شود، می‌پردازیم.

۱.۱ تئوری مجموعه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد. رابطه‌ی $\leq$ در A را یک رابطه ترتیبی جزئی نامند هرگاه:

۱) به ازای هر $a \in A$، $a \leq a$

۲) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$

۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$

توضیح: فرض کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. برای هر $a, b \in A$، $sup\{a, b\}$ را با $a \vee b$ و $inf\{a, b\}$ را با $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه جزئاً مرتب $(A, \leq)$ را یک مشبکه می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a, b \in A$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ وجود داشته باشند.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه R را جزئاً مرتب گوئیم هرگاه $(R, \leq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و

اگر $x \leq y$ آنگاه برای هر $z \in R$، $x + z \leq y + z$ و

اگر $x \geq ۰$ و $y \geq ۰$ آنگاه $xy \geq ۰$.

۲.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. τ را توپولوژی روی X می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$

۲) اگر $\mathsf{A} \subseteq \tau$، آنگاه $\bigcup \mathsf{A} \in \tau$.

۳) اگر $A, B \in \tau$، آنگاه $A \cap B \in \tau$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد، گردایه‌ی تمام همسایگی‌های $x \in X$ را سیستم همسایگی x در X می‌نامند و آن را با $\mathcal{U}_x$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. گردایه‌ی $\mathcal{B}_x$ از همسایگی‌های x در فضای توپولوژی X را یک پایه همسایگی x در X می‌نامند هرگاه برای هر همسایگی x مانند $U \in \mathcal{U}_x$ عنصری از $\mathcal{B}_x$ مانند B_x موجود باشد که $B_x \subseteq U$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی، Y یک مجموعه و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع پوشا باشد. فرض کنیم τ_X ،توپولوژی روی X باشد. قرار می‌دهیم

$\tau_f = \{U \subseteq Y : f^{-۱}(U) \in \tau_X\}$.

در این صورت τ_f توپولوژی روی Y است و بزرگترین توپولوژی روی Y است که نسبت به آن f پیوسته است. τ_f را توپولوژی خارج قسمتی القایی توسط f و f را نگاشت خارج قسمتی گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژی باشد. فضای X را هاوسدورف $(T_۲)$ می‌نامیم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز $x, y \in X$، مجموعه‌های بازِ U_x و V_y به قسمی وجود داشته باشند که

$x \in U_x, y \in V_y$ و $U_x \bigcap V_y = \emptyset$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in J\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها باشد گوییم $\mathcal{A}$ در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند، هرگاه برای هر زیرگردایه متناهی از عناصر $\mathcal{A}$ اشتراک اعضای این زیرگردایه ناتهی باشد.

قضیه ۷.۲.۱. *فضای X فشرده است اگر و تنها اگر هر گردایه از مجموعه‌های بسته در X که در شرط مقطع متناهی صدق می‌کند دارای اشتراک ناتهی باشند.*

اثبات. به [۲۵] مراجعه شود. □

بستار مجموعه‌ی S در فضای توپولوژی X با clS یا cl_XS، درونش را با $intS$ یا int_XS نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. فضای X را موضعاً فشرده می‌گوییم در صورتی که به ازای هر $x \in X$ زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از X مانند A و مجموعه‌ی بازی مانند U موجود باشد به‌طوری‌که $x \in U \subseteq A$.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت، یک فشرده‌سازی X عبارت است از زوج مرتب (f, Y) که در آن Y یک فضای فشرده و $f : X \longrightarrow Y$ یک نشاننده‌ی X در Y است به‌طوری‌که $\overline{f[X]} = Y$.

توضیح

فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژی، موضعاً فشرده و غیرفشرده باشد. قرار می‌دهیم

$$Y = X \cup \{\infty\} \quad , \infty \notin X.$$

همسایگی‌های روی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tau_Y = \tau \cup \{Y - c : c \text{در} X \text{فشرده است}\}$$

(Y, τ_Y) یک فضای توپولوژی، فشرده و هاوسدورف است که این توپولوژی را فشرده‌سازی تک نقطه‌ای X گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت یک جداسازی X زوج مرتبی مانند (U,V) که در آن U و V دو زیرمجموعه‌ی باز ناتهی X اند به‌طوری‌که $X = U \cup V$ و $U \cap V = \emptyset$.

فضای X را همبند می‌خوانیم در صورتی که هیچ جداسازی نداشته باشد. فضایی را که همبند نباشد، ناهمبند می‌گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱. مجموعه‌ی S را در فضای توپولوژی X بسته‌ی منظم گوییم هرگاه $cl_X int_X S = S$

تعریف ۱۲.۲.۱. $A \subseteq X$ را G_δ- مجموعه نامند هرگاه بتوان A را به شکل اشتراک گردایه‌ای شمارا از مجموعه‌های باز نوشت.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت X را یک فضای نرمال نامند هرگاه به ازای هر دو مجموعه‌ی بسته X مانند E, F که $E \cap F = \emptyset$، دو مجموعه‌ی باز جدا از هم مانند U و V وجود داشته باشند به‌طوری‌که $E \subseteq U$ و $F \subseteq V$.

قضیه ۱۴.۲.۱. *اگر فضای توپولوژی X در فضاهای هاوسدورف T و S چگال و نگاشت همانی روی X دارای توسیع پیوسته، $\sigma : S \longrightarrow T$ و $\tau : T \longrightarrow S$ آنگاه σ همئومورفیسم است و $\tau = \sigma^{-1}$.*

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم به ازای هر $\alpha \in J$، X_α یک فضای توپولوژی باشد و

$$X_\alpha^* = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha\}$$

که توپولوژی تعریف شده روی X_α^*، توپولوژی طبیعی باشد.

و اگر $\alpha \neq \beta$، آنگاه $X_\alpha^* \cap X_\beta^* = \emptyset$.

حال روی $X = \bigcup_{\alpha \in J} X_\alpha^*$ یک توپولوژی قرار می‌دهیم:

$U \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in J$، $U \cap X_\alpha^*$ باز است. فضای X بدست آمده اجتماع جدا از هم (اجتماع آزاد)فضاهای X_α گوییم و با $\sum_{\alpha \in J} X_\alpha$ یا $\sum X_\alpha$ نشان می‌دهیم.

اگر تنها دو فضای X و Y را داشته باشیم اجتماع آزاد X و Y را به صورت $X + Y$ می‌نویسیم.

۳.۱ جبر

مفاهیم مقدماتی حلقه و ایده‌آل را دانسته فرض می‌کنیم و در این پایان‌نامه کلیه حلقه‌ها را جابه‌جایی و یکدار در نظر می‌گیریم

قضیه ۱.۳.۱. *ایده‌آل M در حلقه R ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر $f \in R - M$، $g \in R$ به‌قسمی وجود داشته باشد که $1 - fg \in M$.*

اثبات. به [۲۶] مراجعه شود. □

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد برای هر $S \subseteq R$،

$$Ann(S) = \{f \in R : Sf = 0\}$$

را پوچساز S گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم Rیک حلقه باشد، عضوی چون $r \in R$ را مقسوم‌علیه صفر Rگوییم، هرگاه عنصری مانند $0_R \neq y \in R$ وجود داشته باشد که $ry = 0_R$.

تعریف ۴.۳.۱. حلقه R را کاهشی گوییم هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان غیر صفر نداشته باشد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد عنصر $e \in R$ را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

تعریف ۶.۳.۱. ایده‌آل اول P در حلقه R را یک ایده‌آل اول مینیمال روی ایده‌آل سره I می‌نامیم هرگاه $I \subseteq P$ و ایده‌آل اولی چون P_1 موجود نباشد که $I \subseteq P_1 \subsetneqq P$.

تعریف ۷.۳.۱. زیرمجموعه S از حلقه R را بسته ضربی گوییم هرگاه:

۱) $1 \in S$

۲) اگر $s_1, s_2 \in S$ آنگاه $s_1.s_2 \in S$.

قضیه ۸.۳.۱. *هرگاه S زیرمجموعه بسته ضربی حلقه R و از ایده‌آل I در R مجزا باشد، آنگاه مجموعه*

$\mathcal{A} = \{P \subseteq R : S \cap P = \emptyset$ و است I ایده‌آل سره ی شامل $P\}$

با رابطه شمول دارای عنصر ماکسیمال است و چنین عنصری ایده‌آل اول است.

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود. □

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنیم I ایده‌آل حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد. فرض کنیم J ایده‌آلی باشد که $I \subseteq J$. در این صورت ایده‌آل $\frac{J}{I}$ از حلقه $\frac{R}{I}$ اول است اگر و تنها اگر J ایده‌آل اول باشد.*

اثبات. به [۲۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم I ایده‌آل سره حلقه R باشد. رادیکال I را با $Rad(I)$ یا $\sqrt{I}$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P(\text{ایده‌آل اول } P)} P$$

لم ۱۱.۳.۱. *اگر I ایده‌آل سره حلقه R باشد، آنگاه*

$$\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \qquad s.t \qquad r^n \in I\}$$

اثبات. به [۱] مراجعه شود. □

اگر $\mathfrak{M}$ را گردایه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال در حلقه R فرض کنیم، آنگاه برای هر $a \in R$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} = \{M \in \mathfrak{M} : a \in M\} \quad , \quad M_a = \cap \mathfrak{M}_{\mathfrak{a}} = \cap_{a \in M \in \mathfrak{M}} M$$

تعریف ۱۲.۳.۱. ایده‌آل سره I در حلقه R را یک z-ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in I$، $M_a \subseteq I$.

لم ۱۳.۳.۱. *هر ایده‌آل متناهیاً تولید شده در حلقه‌ی کاهشی R که تمام عناصرش مقسوم‌علیه صفر است دارای پوچ‌ساز غیر صفر است.*

اثبات. فرض کنیم $I = (f_1, f_2, ..., f_n)$ ایده‌آل متناهیاً تولید شده در حلقه R باشد که تمام عناصرش مقسوم‌علیه صفر باشد. چون $f = f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 \in I$ پس وجود دارد $g \neq 0$ که $gf = 0$ لذا $g^2 f = 0$ در نتیجه $g^2(f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2) = 0$ پس $\sum_{i=1}^{n} g^2 f_i^2 = 0$ اما R حلقه‌ی کاهشی است. لذا برای هر i، $gf_i = 0$. □

۴.۱ حلقه C(X)

مجموعه همه توابع پیوسته حقیقی مقدار در فضای توپولوژی X را با $C(X)$ نمایش می‌دهند. جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در حلقه $C(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad : \quad f, g \in C(X)$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) \quad : \quad f, g \in C(X)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad : \quad f, g \in C(X), g(x) \neq 0$$

به‌سادگی می‌توان دید که با اعمال جمع و ضرب فوق $C(X)$ یک حلقه‌ی جابه‌جایی یکدار است.. عنصر صفر همان تابع ۰، عنصر یک همان تابع ثابت ۱ است.

قرینه‌ی هر عنصر $f \in C(X)$ با $-f$ نشان داده می‌شود و برای هر $x \in X$، به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(-f)(x) = -(f(x))$$

و معکوس ضربی $f \in C(X)$ در صورت وجود با f^{-1} نشان داده می‌شود و برای هر $x \in X$ عبارت است از:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

تعریف ۱.۴.۱. رابطه‌ی $\leq$ روی $C(X)$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم فرض کنیم $f, g \in C(X)$ باشند

$f \leq g$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $f(x) \leq g(x)$

در نتیجه $C(X)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است.

فرض کنیم $f,g \in C(X)$

$f \leq g$ اگر و تنها اگر به ازای هر $k \in C(X)$، $f+k \leq g+k$

اگر $f \geq ۰, g \geq ۰$ آنگاه $fg \geq ۰$.

بنابراین طبق تعریف ۳.۱.۱ $C(X)$ حلقه‌ای جزئاً مرتب است.

تابع $|f|$ توسط $f \vee -f$ تعریف می‌شود و می‌دانیم که $|f|(x) = |f(x)|$.

اگر f پیوسته باشد آنگاه $|f|$ پیوسته است.

فرض کنیم $f,g \in C(X)$

$$f \vee g = \frac{۱}{۲}(f+g+|f-g|)$$
$$f \wedge g = \frac{۱}{۲}(f+g-|f-g|)$$

$f \vee g \in C(X)$ و $f \wedge g \in C(X)$ بنابراین $C(X)$ مشبکه است.

اگر $f \in C(X)$ و $f, \alpha > ۰$ و به ازای هر $x \in X$، $f^\alpha(x) = (f(x))^\alpha$ آنگاه $f^\alpha \in C(X)$. زیرمجموعه‌ی $C^* = C^*(X)$ از $C(X)$ عبارت است از همه‌ی توابع کراندار در $C(X)$:

$$C^*(X) = \{f \in C(X) : \exists m, \forall x \in X, |f(x)| \leq m\}$$

نکته ۲.۴.۱. فرض کنیم $f \in C(X)$، f معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر x، $f(x) \neq ۰$

تعریف ۳.۴.۱. فضای توپولوژی X را کاملاً منظم می‌گوییم هرگاه X هاوسدورف ($T_۲$) باشد و برای هر مجموعه‌ی بسته در X مانند F و هر $x \notin F$ تابع $f \in C(X)$ موجود باشد که :

$f(x) = \{۱\}$ و $f(F) = \{۰\}$

نکته ۴.۴.۱. f مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر $|f|$ مقسوم‌علیه صفر باشد.

اثبات. اثبات بدیهی است. $\square$

فصل ۲

z-ایده‌آل‌ها در حلقه $C(X)$

در این فصل به مطالعه z-ایده‌آل‌ها در حلقه توابع پیوسته می‌پردازیم و در بخش دوم این فصل فشرده‌سازی استون-چک را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ z-ایده آل‌ها در حلقه $C(X)$

این بخش را با مفهوم صفر-مجموعه آغاز می‌کنیم که در واقع واژه‌ی z-ایده‌آل از آن سرچشمه می‌گیرد. اگر $f \in C(X)$، آنگاه

$$Z(f) = Z_X(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}\{0\}$$

را صفر-مجموعه‌ی f می‌نامیم و مجموعه تمام صفر-مجموعه‌های حلقه $C(X)$ را با $Z[X]$ نشان می‌دهیم یعنی

$$Z[X] = \{Z(f) : f \in C(X)\}$$

اهمیت صفر-مجموعه‌ها در قضیه‌ی زیر مشخص می‌شود.

قضیه ۱.۱.۲. *فضای هاوسدورف X کاملاً منظم است اگر و تنها اگر $Z[X]$ پایه برای مجموعه‌های بسته X باشد.*