
بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای میثم ذلقی** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی ۸۸۵۲۶۵۱۰۱۴ تحت عنوان: «**رابطه‌ای بین یک گروه و یک گراف مشخص**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر علی ایرانمنش	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر علی رجایی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر محمدرضا درفشه	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر خسرو تاجبخش	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **ریاضی محض** است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **علی ایرانمنش** از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **میثم ذلقی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: میثم ذلقی

تاریخ و امضا: ۹۰/۱۲/۲۴

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **میثم ذلقی** دانشجوی رشته **ریاضی محض** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۸** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع به نام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ ۱۳۹۰/۱۲/۲٤

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض

رابطه ای بین یک گروه و یک گراف مشخص

نگارنده

میثم ذلقی

استاد راهنما

دکتر علی ایرانمنش

اسفند ماه ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که شاید هرگز این پایان‌نامه را نخوانند؛

برادرم محمد که بسیار دوستش دارم؛

کسانی که مرا به سمت زیبایی‌های ریاضی راهنما بودند.

تشکر و قدردانی

اگر وظیفه هم ایجاب نمی‌کرد که مراتب تشکر خود را به استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر ایرانمنش اعلام دارم، آنچه در این دوره از ایشان آموخته‌ام مرا برآن می‌دارد که از حضور ایشان کمال تشکر را داشته باشم، چرا که آنچه وظیفه ایجاب می‌کند در برابر آنچه آموخته‌ام خرد است.

از همه‌ی اساتید محترمی که از حضورشان درس‌های دوره‌ی کارشناسی ارشد را آموخته‌ام، آقایان دکتر امینی، دکتر موسوی و دکتر کاشانی نیز بدین‌وسیله تشکر می‌نمایم.

از آقایان دکتر درفشه، دکتر رجایی و دکتر تاجبخش که زحمت داوری این پایان-نامه را پذیرفته‌اند سپاسگزارم.

در پایان، بر خود لازم می‌دانم که از خانم دکتر فرودی‌قاسم‌آبادی که در راستای جمع‌آوری و تنظیم مطالب، و همه‌ی دوستان اعم از دانشجویان محترم دکتری، همکلاسی‌های خوبم و کارکنان زحمتکش دانشکده‌ی علوم ریاضی و دوستان خوب هم‌اتاقی‌ام علی‌الخصوص آقای امیرحسین شریف‌پور که نهایت همکاری و همیاری را در این دوره با من داشته‌اند تشکر نمایم.

چکیده

قسمت عمده‌ی این پایان‌نامه به جمع آوری اطلاعات مفید در رابطه با گراف‌های مرتبط با یک گروه (متناهی)، اختصاص یافته است، که در جای خود به آن‌ها خواهیم پرداخت. آنچه به صورت عمیق‌تر به آن پرداخته شده است نوعی از گراف‌های مرتبط با گروه، با عنوان گراف ناجابجایی مرتبه‌ی n −ام، و به طور مشخص‌تر گراف ناجابجایی مرتبه دوم و مرتبه سوم است. مطالعه‌ی گروه‌ها با استفاده از گراف ناجابجایی آن‌ها با طرح سؤالی توسط پائول اردوش[۱] در سال ۱۹۷۵ در یک سمینار آغاز شد. نیومن[۲] [۵۳] در سال ۱۹۷۶ مسأله‌ای را که اردوش مطرح کرده بود حل نمود. مسأله اردوش: «کلاس گروه‌هایی که مرکز آنها از اندیس متناهی است، بر کلاس گروه‌هایی که گراف ناجابجایی آنها شامل هیچ زیرگراف کامل نامتناهی نیست، منطبق است.»

[۱] Paul Erdős

[۲] Neumann

فرض کنید G یک گروه باشد. گراف ناجابجایی مرتبه n–ام گروه G را به صورت $\Gamma^n(G)$ نشان داده، قرار می دهیم:

$T^n(G) = \{x \in G | (xg)^n = (gx)^n,\ \forall g \in G\}$مجموعه رأس های تعریف شده برای گراف $\Gamma^n(G)$ را برابر با $G \setminus T^n(G)$ تعریف می‌کنیم. از طرفی دو رأس $x, y \in V\big(\Gamma^n(G)\big)$ را مجاور گوییم هرگاه $(xy)^n \neq (yx)^n$.

اگر قرار دهیم $n = ۱$، آنگاه گراف $\Gamma^n(G)$ همان گراف ناجابجایی گروه G خواهد بود. این توسیع از گراف ناجابجایی توسط مشکوری و طائری در ۲۰۱۱ مطرح شد[۴۷]. در این پایان‌نامه به بررسی تشخیص‌پذیری یک گروه توسط گراف ناجابجایی مرتبه دوم و سوم می‌پردازیم. در پایان نشان داده می‌شود که گراف ناجابجایی مرتبه سوم، یک تشخیص‌پذیری برای مرتبه‌ی گروه‌هایی که در آنها $T^۳(G) = Z(G)$ به دست می‌دهد.

مرجع اصلی، جهت بررسی‌های فصل سوم این پایان‌نامه، مرجع[۴۷] است.

کلمات کلیدی: نظریه گراف، نظریه گروه‌ها.

فهرست مطالب

فصل ۳

فصل ۴

فصل۱

مقدمه و پیش نیازها

نظریه گراف از جمله مباحثی است که با توجه به شهودی و پرکاربرد بودن آن در علوم مختلف نظر محققان را به خود جلب کرده است. مهم‌ترین کاربرد گراف مدل‌سازی پدیده‌های گوناگون و بررسی بر روی آنهاست. از جمله کاربردهای اولیه‌ی گراف می‌توان به مواردی چون ترسیم نقشه‌ی شهرها و راه های بین آن‌ها؛ حل مسأله‌های جالبی که ریاضیدان‌ها را سال‌ها به خود مشغول ساخته بود؛ و شبیه سازی و حل مشکلات ترافیکی اشاره کرد. امّا با گسترش علوم مختلف از جمله علوم کامپیوتر و شیمی، کاربردهای دیگری نیز می‌توان برای گراف نام برد، که به طور جدی کمتر از یک قرن سابقه استفاده از آن را شاهدیم. با توجه به شناخت دیرینه‌ی ریاضیدانان نسبت به گراف‌ها، مطالعه‌ی ساختار گروه‌ها با استفاده از خواص گراف موضوعی است

که تحقیقات برخی پژوهشگران را در سی سال اخیر متوجه خود ساخته است. تا کنون تعاریف مختلفی برای ایجاد رابطه میان نظریه گروه و نظریه گراف ارائه شده است، از آن جمله می‌توان گراف اول؛ گراف کیلی و گراف مرتبط با کلاسهای تزویج گروه‌ها را نام برد. در فصل۲ اطلاعاتی مفید در رابطه با هر کدام از آن‌ها را خواهیم دید. البته برخی را نیز به طور مفصل تر تحلیل خواهیم نمود. دیگر گراف مرتبط با یک گروه، گراف ناجابجایی است. شروع استفاده از گراف ناجابجایی جهت به شهود رساندن قسمتی از ریاضیات محض، یعنی گروه‌ها، ابتکاری بود که اردوش برای اولین بار در سال ۱۹۷۵ با طرح مسأله‌ای در این راستا مطرح نمود و نیومن در سال ۱۹۷۶ آن را حل کرد. آنچه در این دسته از تحقیقات مد نظر است استفاده از دانش نسبتا شهودی گراف جهت حل مسائلی در نظریه گروه‌هاست، و گاهی این رابطه چنان به هم نزدیک می‌شود که عکس این مسأله هم دور از انتظار نیست.

در ساده‌ترین جمله، آنچه که هدف ما را در این پایان‌نامه بیان می کند عبارت از: «رسیدن به رابطه ای شفاف بین یک گروه و گراف ناجابجایی مرتبه دوم و سوم متعلق به آن گروه» می‌باشد.

گراف ناجابجایی با حدسی که عبداللهی و همکاران[۲] در سال ۲۰۰۶ زده‌اند مورد توجه قرار گرفت. البته اخیراً این مسأله مورد توجه ریاضی‌دانانی از کشور انگلستان قرار گرفته است، و نسخه‌ی قبل از چاپ تحقیقات آن‌ها نشان می‌دهد که آن‌ها موفق به اثبات این مسأله در حالت کلی شده‌اند. علی ایرانمنش و جعفرزاده[۳۴] در سال ۲۰۰۷ نشان دادند که حدس مذکور در حالتی که گروه G ناآبلی و ساده باشد برقرار است.

اما موضوعی که بعد از انتشار مقاله مشکوری و طائری مطرح شده این است که آیا می توان یک گروه را توسط گراف ناجابجایی مرتبه دوم آن شناسایی کرد؟ پاسخ آن‌ها به این سوال برای گروه دو وجهی $D_{۲n}$ در صورتی که n فرد باشد مثبت است. سؤالی که در انتها پرسیده می شود، اینکه: «آیا رابطه ای میان گراف ناجابجایی مرتبه سوم یک گروه با خود آن گروه وجود دارد؟ و در صورت وجود، این رابطه تا چه حد ما را به تشخیص پذیری یک گروه نزدیک می کند؟»

از آنجا که مراجع مختلف از نمادهای متفاوت، مخصوصا در نظریه گراف، استفاده می کنند آنچه در این فصل به آن می پردازیم یادآوری اطلاعاتمان در مورد گراف و گروه بر اساس نمادهایی است که در مراجع[۷۰و۳۶و۷۲و۳۲] از آن استفاده می شود. در دو بخش پیش‌رو، به تعاریف و قضایای مفید از نظریه گراف و نظریه گروه‌ها می‌پردازیم.

۱.۱ گراف

تعریف۱.۱.۱. یک گراف عبارت است از سه تایی مرتب $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma), \psi_\Gamma)$، که در آن $V(\Gamma)$ مجموعه‌ای ناتهی، $E(\Gamma)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(\Gamma)$، و ψ_Γ یک نگاشت وقوع است، که به هر عضو $E(\Gamma)$ یک زوج نامرتب و نه لزوما مجزا از $V(\Gamma)$ نظیر می‌کند. عناصر $V(\Gamma)$ را رأس‌های G، وعناصر $E(\Gamma)$ را یال‌های Γ نامیم. اگر برای یال e از Γ داشته باشیم $\psi_\Gamma(e) = \{u, v\}$، می‌نویسیم $\psi_\Gamma(e) = uv$. در این صورت، u و v را رأس‌های پایانی یال e می‌نامیم، و در اصطلاح u و v را مجاور با یکدیگر گوییم. اگر e تنها یال با رأس‌های پایانی u و v باشد می‌نویسیم $e = uv$.

تعریف۲.۱.۱. اگر u و v با هم یکسان باشند یال uv را یک طوقه گوییم. و اگر دو رأس Γ توسط دو یال مجزا به یکدیگر متصل شده باشند، گراف Γ را شامل یال‌های چندگانه گوییم. گرافی که طوقه و یال چندگانه نداشته باشد را ساده گوییم. بنابراین یک گراف ساده را می‌توان با مجموعه رأس‌ها و یال‌هایش نشان داد.

تعریف۳.۱.۱. اگر هردوی $V(\Gamma)$ و $E(\Gamma)$ متناهی باشند گراف Γ متناهی است. در صورتی که گراف Γ متناهی نباشد، آن را گراف نامتناهی گوییم. تعداد رأس‌ها و یال‌های گراف Γ را به ترتیب با $n(\Gamma)$ و $m(\Gamma)$، و در صورتی که ابهامی در میان نباشد، با n و m نشان می‌دهیم.

تعریف۴.۱.۱. یکریختی گراف مفهومی شبیه یکریختی ساختارهای جبری است. فرض می‌کنیم $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$ و $\Delta = (V(\Delta), E(\Delta))$ دو گراف باشند. یکریختی گرافی از Γ به Δ زوج (θ, ϕ) از دوسوییهاست که از Γ به Δ تعریف می‌شود. به‌طوری که به هر رأس از $V(\Gamma)$

رأسی از $V(\Delta)$ را نسبت می‌دهد، با این خاصیت که هرگاه v و u دو رأس مجاور در Γ باشند، آنگاه $\theta(v)$ و $\theta(u)$ نیز در Δ مجاورند. یعنی اگر uv یک یال در $E(\Gamma)$ باشد، آنگاه $\phi(uv)$ نیز یک یال در $E(\Delta)$ خواهد شد.

اگر یکریختی تعریف شده در بالا برای دو گراف Γ و Δ برقرار باشد، Γ و Δ را یکریخت گوییم.

تعریف۵.۱.۱. گراف ساده‌ای را که در آن هر جفت از رأس‌های متمایز به وسیله یک یال به هم متصل باشند، گراف کامل گوییم.گراف کامل با n رأس را با $\mathrm{K_n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف۶.۱.۱. گراف Γ را $s-$بخشی گوییم هرگاه بتوان مجموعه رأس‌های آن را به s مجموعه ناتهی $V_۱$ و . . . و V_s افراز کرد که هیچ یالی دو انتهایش در یکی از این افرازها نباشد.

گراف $\mathrm{s}-$بخشی کامل، گراف s $-$بخشی‌ای است که در آن هر رأس متعلق به یک افراز با همهٔ رأس‌هایی که در همان افراز نیستند مجاور باشد. گراف $\mathrm{s}-$بخشی کامل با n رأس را، که هر بخش دارای $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s}}$ رأس باشد، به وسیله‌ی $\mathrm{T_{s,n}}$ نمایش می‌دهیم.

به سادگی می‌توان نشان داد که:

الف) $\mathrm{m(T_{s,n})} = \binom{\mathrm{n-k}}{۲} + (\mathrm{s}-۱)\binom{\mathrm{k}+۱}{۲}$ که در آن $k=\frac{n}{s}$.

ب) اگر Γ یک گراف $\mathrm{s}-$بخشی کامل با n رأس باشد، آنگاه $\mathrm{m(\Gamma)} \leq \mathrm{m(T_{s,n})}$، و تنها وقتی برابراند که $\mathrm{G} \cong \mathrm{T_{s,n}}$.

تعریف ۷.۱.۱. گراف Λ زیرگراف Γ است اگر $V(\Lambda) \subseteq V(\Gamma)$، $E(\Lambda) \subseteq E(\Gamma)$، و Ψ_Λ برابر با تحدید Ψ_Γ به $E(\Lambda)$ باشد.

زیرگراف Λ از Γ را زیرگراف فراگیر[1] گوییم هرگاه $V(\Lambda) = V(\Gamma)$.

تعریف ۸.۱.۱. فرض می کنیم V' یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از $V(\Gamma)$ باشد. زیرگراف القا شده به وسیله‌ی V' را با $\Gamma(V')$ نشان می‌دهیم که مجموعه رأس‌های آن V'، و مجموعه یال‌هایش مجموعه‌ای از آن یال‌های Γ است که هر دو انتهایشان در V' است. $\Gamma(V')$ را یک زیرگراف القایی G گوییم. زیرگراف القایی $\Gamma(V\backslash V')$ را که به صورت $\Gamma - V'$ نشان می‌دهیم، زیرگرافی است که از Γ با حذف رأس‌های V' و یال‌هایی که رأس‌های V' بر آن‌ها واقع‌اند به‌دست می‌آید.

اگر $V' = \{v\}$ به جای $\Gamma - \{v\}$ می‌نویسیم $\Gamma - v$.

تعریف ۹.۱.۱. یک زیر گراف کامل از گراف Γ را یک خوشه‌ی Γ نامیم. عدد خوشه‌ای گراف Γ را تعداد رأس‌های یک خوشه‌ی ماکسیمم از Γ تعریف می‌کنیم، که با $\omega(\Gamma)$ نشان داده می‌شود.

تعریف۱۰.۱.۱. $d_{\Gamma}(v)$، درجه‌ی رأس v در Γ، تعداد یال‌های مجاور با v در Γ است. اگر به تصریح Γ نیاز نباشد با $d(v)$ نیز نشان می‌دهیم.

قضیه۱۱.۱.۱. (قضیه اویلر[2]) مجموع درجه‌ی رأس‌های یک گراف مساوی با دو برابر تعداد یال‌های آن است.

نتیجه ۱۲.۱.۱. در هر گراف، تعداد رأس‌هایی که از درجه فرد هستند زوج است.

---

[1] Spanning subgraph

[2] Euler

مینیمم و ماکسیمم درجه‌ی گراف Γ را به ترتیب با $\delta(\Gamma)$ و $\Delta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. گرافی که درجه‌ی هر رأس آن برابر با k باشد را گراف $k-$منتظم گوییم.

تعریف ۱۳.۱.۱. یک گشت در گراف Γ، دنباله‌ی ناتهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ است که جمله‌های آن به طور متناوب رأس‌ها و یال‌ها هستند و برای هر $1 \leq i \leq k$ دو انتهای e_i، v_{i-1} و v_i هستند؛ v_0 ابتدا و v_k انتهای W است، و گوییم گشت W رأس v_0 را به v_k وصل می‌کند. اگر گراف ساده باشد، یک گشت با دنباله‌ی رأس‌هایش مشخص می‌شود. یک گشت را گذر گوییم هرگاه تمام یال‌های ظاهر شده در گشت متمایز باشند، و آن را مسیر گوییم هرگاه همه‌ی رأس‌های آن متمایز باشند. بنابراین یک مسیر لزوما یک گذر است. طول یک گشت، گذر یا مسیر را تعداد یال‌های آن گشت، گذر یا مسیر گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. مسیری که رأس ابتدا و انتهای آن با یکدیگر برابر باشند را یک دور گوییم. یک دور به طول n را با C_n نشان داده و آن را $n-$دور نامیم. اگر n فرد باشد، دور را فرد و در غیر این صورت زوج گوییم. یک ۳−دور را مثلث، و یک ۴−دور را مربع گوییم. یک مسیر روی n رأس را با P_n نشان می‌دهیم.

قضیه۱۵.۱.۱. گراف Γ دو بخشی است اگر و تنها اگر شامل دور فرد نباشد.

تعریف۱۶.۱.۱. کمر گراف Γ، طول کوتاه‌ترین دور در Γ است، و آن را با $\mathrm{girth}(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. در صورتی که Γ دارای هیچ دوری نباشد کمر آن برابر با بی‌نهایت است.

قضیه۱۷.۱.۱. اگر Γ یک گراف ساده باشد که در آن $\delta \geq 2$، آنگاه: $\mathrm{girth}(\Gamma) \geq \delta + 1$.

تعریف ۱.۱.۱۸. دو رأس u و v از گراف Γ را همبند گوییم هرگاه مسیر (u,v) در Γ موجود باشد. همبندی یک رابطه هم ارزی در مجموعه رأس‌های V است. بنابراین افرازی از V به زیر مجموعه‌های ناتهی $V_۱, V_۲, \dots, V_t$ وجود دارد به طوری که دو رأس u و v همبندند اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به یک مجموعه $\mathrm{V_i}$ باشند. زیرگراف‌های $\Gamma(V_۱)$ و ... و $\Gamma(V_t)$ را مؤلفه‌های همبندی Γ گوییم. اگر Γ دقیقا دارای یک مؤلفه‌ی همبندی باشد، Γ همبند است و در غیر این صورت ناهمبند است.

تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف Γ را با $t(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. مسیری که شامل هر رأس گراف Γ است را مسیر همیلتونی گوییم. دور همیلتونی Γ دوری است که شامل هر رأس گراف Γ است. یک گراف را همیلتونی گوییم هرگاه شامل دور همیلتونی باشد.

قضیه ۱.۱.۲۰.(دیراک[۱]) اگر Γ یک گراف ساده با $n \geq ۳$ و $\delta(\Gamma) \geq \frac{n}{۲}$ باشد، آنگاه Γ همیلتونی است.

قضیه ۱.۱.۲۱.(اره[۲]) اگر Γ یک گراف ساده باشد که به ازای هر دو رأس نامجاور u و v از آن، $d(u) + d(n) \geq n$، آنگاه Γ همیلتونی است.

---

[۱] Dirac

[۲] Ore

تعریف۲۲.۱.۱. گراف Γ را مسطح گوییم هرگاه بتوان آن را در صفحه طوری رسم کرد که هیچ دو یال Γ یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رأس قطع نکنند.

گراف Γ را در نظر می‌گیریم، اگر با در نظر گرفتن یال‌های این گراف به عنوان منحنی، صفحه را به قسمت‌هایی تقسیم کنیم، آنگاه می‌توان رابطه‌ی هم ارزی روی قطعات به وجود آمده در صفحه تعریف نمود، بر این اساس که دو نقطه از صفحه را هم ارز گوییم هرگاه هر دو در یک قطعه باشند.

تعریف ۲۳.۱.۱. رده‌های هم ارزی رابطه‌ی هم ارزی بالا را وجه‌های گراف Γ گوییم.

تعریف ۲۴.۱.۱. (فرمول اویلر) اگر Γ یک گراف مسطح باشد، آنگاه $n-m+l=۲$. که در آن l تعداد وجه‌های گراف Γ است.

تعریف ۲۵.۱.۱. گراف Γ' را *زیر تقسیم گراف* Γ گوییم هرگاه با به‌کار بردن تعداد متناهی بار *زیر تقسیم یال‌ها* به طور متوالی، از Γ به‌دست آمده باشد. یک زیر تقسیم یال $e=uv$ با معرفی یک رأس جدید w در e تعریف می‌شود. یعنی با جایگزین کردن مسیر uvw به طول ۲ به جای یال $e=uv$ به دست می‌آید، به طوری که رأس جدید w از درجه‌ی ۲ در گراف حاصل باشد.

تعریف۲۶.۱.۱. یک زیر مجموعه‌ی K از $V(H)$ را یک پوشش Γ گوییم هرگاه هر یال Γ با حداقل یک رأس از K مجاور باشد. تعداد رأس‌های یک پوشش مینیمم از Γ را عدد پوششی Γ گفته، و با $\beta(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.