وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

حالت پایه و دینامیک شبکه‌های غیرتناوبی اتصالات جوزفسون: نقش شبکه‌ی گردابه‌ای

پایان‌نامه دکتری

یوسف عزیزی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا کلاه‌چی

اسفند ۱۳۸۹

بنام یگانهٔ هستی

آن‌که دانست، زبان بست

وآن‌که می‌گفت، ندانست

تقدیم به خانواده‌ام

به پاس زحمات بی دریغشان

و دوست خوبم پویا

قلبی مهربان در جستجوی حقیقت

قدردانی و تشکر

از خانواده‌ام که در طول این سالها پشتیبانم بودند سپاسگزارم. از دوستان خوبم که در طی این سالها در کنارشان بودم نهایت تشکر را دارم امیدوارم همواره موفق باشند. همچنین از استاد ارجمندم دکتر کلاه‌چی که صبورانه مرا تحمل کردند قدردانی می‌کنم.

در طول تحصیلم از محضر اساتید ارجمندی بهره‌مند شدم که وظیفه‌ی خود می‌دانم قدردان زحمات بی‌دریغ‌شان باشم از جمله دکتر ثبوتی، دکتر خواجه‌پور، دکتر جلالی، دکتر نصیری، دکتر زارعیان، دکتر شریعتی، دکتر فتح‌اللهی، دکتر خرمی، دکتر زارع، دکتر کبودین، دکتر روئین، دکتر عبداللهی. همچنین از دوستان خوبم آقای خلیلیان، دکتر نوروزی، دکتر ولی‌زاده، آقای معصومی، آقای رضائی، آقای مصطفوی امجد، آقای صمدی، خانم مهدی‌پور به خاطر کمک‌هایشان سپاسگزارم.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی انرژی حالت پایه شبکه‌ای غیرتناوبی از اتصالات جوزفسون برحسب میدان مغناطیسی عمود بر آرایه می‌پردازیم. این آرایه یا نردبانی است و یا دوبعدی. دینامیک شبکه‌ی گردابه‌ای نیز در پاسخ به جریان خارجی مطالعه می‌شود. در بررسی انرژی حالت پایه از نردبان‌های متشکل از دو یاخته‌ی با مساحت‌های متفاوت که دارای نظم‌های متفاوتی هستند و همچنین شبکه‌ی شبه‌تناوبی دوبعدی پنروز استفاده می‌کنیم. در بررسی دینامیکی از شبکه‌ی پنروز استفاده می‌کنیم.

نتایج بررسی انرژی حالت پایه برای شبکه‌های غیرتناوبی مورد مطالعه نشان دهنده‌ی این موضوع است که انرژی حالت پایه تابعی شبه‌تناوبی از میدان اعمالی است که فرکانس‌های اصلی آن تنها به مساحت‌های یاخته‌ها بستگی دارد. بررسی بیشتر نشان دهنده‌ی این مطلب است که نظم شبکه در طیف فوریه انرژی حالت پایه بر روی شدت قله‌ها تاثیر می‌گذارد. بر اساس رفتار شبکه در کمینه‌های عمیق مدلی را ارائه می‌دهیم که انرژی را به صورت میانگینی از انرژی یاخته‌های مستقل تقریب می‌زند. نتایج این مدل با نتایج عددی و هم‌چنین با مدل‌های دیگر مقایسه می‌شود. در ادامه با گسترش مدل با استفاده از شبکه‌ی گردابه‌ای تقریب بهتری برای انرژی به دست می‌آوریم.

در بررسی دینامیکی، نتایج برای شبکه‌ی پنروز نشان می‌دهد که پله‌های کسری و صحیح از بین می‌روند و رفتار پیچیده‌ای را از خود نشان می‌دهد. در انتها دلیل این رفتار مورد بحث قرار می‌گیرد که به ناهمگونی رفتار اتصالات در شبکه و ساختار غیرتناوبی شبکه مربوط می‌شود.

فهرست

چکیده . . . . شش

مقدمه . . . . سیزده

۱ اثر جوزفسون: تاریخچه و مبانی فیزیکی آن

۱.۱ تاریخچه و توضیحی کلی درباره‌ی اتصالات ضعیف ۱

۲.۱ اثر جوزفسون برای یک اتصال ابررسانائی ۲

۱.۲.۱ انرژی آزاد و هامیلتونی یک اتصال ابررسانائی ۳

۴

اتصال‌های جوزفسون با اثر پوششی ۶

۲.۲.۱ دینامیک اختلاف فاز ابررسانائی ۷

۳.۲.۱ مدل $RCSJ$ برای اتصال ابررسانائی در حضور جریان یا اختلاف پتانسیل خارجی . ۸

۳.۱ ترمودینامیک و دینامیک برای یک اتصال ۱۰

۱.۳.۱ ترمودینامیک ۱۰

۱.۳.۲ دینامیک یک اتصال ۱۱
جریان ثابت ۱۱
ولتاژ نوسانی: پله‌های شاپیرو ۱۳
جریان نوسانی ۱۴
بررسی کلی سیستم بدون اعمال تقریب ۱۶
۱.۳.۳ بررسی اتصال‌های جوزفسون کلی ۱۸

۲ اثر جوزفسون برای شبکه‌ای از اتصال‌های ابررسانائی

۲.۱ گسترش اثر جوزفسون برای یک شبکه: فرمول‌بندی کلی ترمودینامیک و دینامیک ۲۳
۲.۲ کوانتش شار: تاریخچه و مبانی فیزیکی ۲۸
۲.۳ شبکه‌ی گردابه‌ای ۳۰
۲.۴ تباهیدگی: مفهوم آن و اثر آن بر حالت پایه‌ی شبکه ۳۱
۲.۵ مغناطومترهای $SQUID$ ۳۲
اثرات پوششی ناشی از جریان ابررسانائی روی رفتار $SQUID$ ۳۴

۳ اثر جوزفسون در شبکه‌ی مربعی: تاریخچه و نتایج عددی

۳.۱ تاریخچه ۳۸
۳.۲ ترمودینامیک: تباهیدگی و شبکه‌ی گردابه‌ای ۳۹
۳.۳ دینامیک: پله‌های شاپیرو، حرکت شبکه‌ی گردابه‌ای و پسماند (Hysteresis) ۴۱

۴ اثر جوزفسون در نردبان‌های غیرتناوبی

۱.۴ شبکه‌های غیرتناوبی یک‌بعدی ۴۳

۱.۱.۴ شبکه‌ی τ فیبوناچی ۴۶

۲.۱.۴ شبکه‌ی σ فیبوناچی ۴۶

۳.۱.۴ شبکه‌ی τ تناوبی ۴۷

۴.۱.۴ شبکه‌ی τ تیو—مورس ۴۷

۵.۱.۴ شبکه‌ی τ تصادفی ۴۸

۶.۱.۴ تبدیل فوریه‌ی یک دنباله ۴۸

۷.۱.۴ توابع تناوبی، شبه‌تناوبی، شبه‌تصادفی، تصادفی ۴۹

۸.۱.۴ نظم تناوبی، شبه‌تناوبی، شبه‌تصادفی، تصادفی ۵۰

۲.۴ ترمودینامیک در شبکه‌های یک‌بعدی: جداسازی نقش ساختار شبکه از پارامترهای دیگر ۵۱

روش کمینه‌سازی عددی ۵۲

نتایج عددی برای شبکه‌ی τفیبوناچی ۵۳

نتایج عددی برای شبکه‌ی σ فیبوناچی ۵۵

نتایج عددی برای شبکه‌ی τ تناوبی ۵۷

نتایج عددی برای شبکه‌ی τ تیو—مورس ۵۹

نتایج عددی برای شبکه‌ی τ تصادفی ۶۱

نتیجه‌گیری کلی ۶۳

۱.۲.۴ تقارن آیینه‌ای تقریبی و نظم شبه‌تناوبی ۶۴

۳.۴ شبکه‌ی گردابه‌ای در مینیمم‌های عمیق ٦٦
۱.۳.۴ شبکه‌ی τ فیبوناچی ٦٦
۲.۳.۴ شبکه‌ی σ فیبوناچی ٦٨
۳.۳.۴ شبکه‌ی τ تناوبی ۷۰
۴.۳.۴ شبکه‌ی τ تیو—مورس ۷۲
۵.۳.۴ نتیجه‌گیری و بحث ۷۴

۵ اثر جوزفسون در شبکه‌های غیرتناوبی دوبعدی

۱.۵ شبکه‌های شبه‌تناوبی ۷۵
۲.۵ تعریف‌ها ۷۵
۱.۲.۵ روش دوگان تعمیم‌یافته ۷٦
۲.۲.۵ شبکه‌ی پنروز ۷۸
۳.۵ قاعده انبساط (انقباض) ۷۹
۴.۵ ساخت شبکه‌های شبه‌تناوبی ۷۹
۵.۵ ترمودینامیک: شبکه‌ی گردابه‌ای ۸۱
٦.۵ دینامیک: حرکت شبکه‌ی گردابه‌ای، وجود یا عدم وجود پله‌های شاپیرو ۸۵

٦ مدل‌های بررسی رفتار ترمودینامیکی

۱.٦ تقریب میدان متوسط ۸۹

۱.۱.۶ رابطه‌ی دمای گذار در تقریب میدان متوسط خطی‌شده با انرژی حالت پایه ۹۱
۲.۱.۶ نتایج برای نردبان‌ها ۹۲
۲.۶ مدل J^2 . . . . ۹۴

۷ مدل یاخته مستقل: مبانی، نتایج و گسترش آن

۱.۷ مبانی مدل یاخته‌ی مستقل ۹۸
۲.۷ انرژی حالت پایه برای یک یاخته ۹۹
۱.۲.۷ کمینه‌سازی بدون استفاده از کوانتش شار ۹۹
۳.۷ کمینه‌سازی با شرط کوانتش شار ۱۰۱
۴.۷ مدل یاخته‌های مستقل (IPM) ۱۰۲
۵.۷ مدل IPM با شرط چرخش صفر $(IPMC)$ ۱۰۳
۶.۷ نتایج برای شبکه‌های یک‌بعدی ۱۰۵
۱.۶.۷ شبکه‌ی τ فیبوناچی ۱۰۵
۲.۶.۷ شبکه‌ی σ فیبوناچی ۱۰۷
۳.۶.۷ شبکه‌ی τ تناوبی ۱۰۹
۴.۶.۷ شبکه‌ی τ تیو—مورس ۱۱۱
۵.۶.۷ شبکه‌ی τ تصادفی ۱۱۳
۶.۶.۷ نتیجه‌گیری ۱۱۵
۷.۶.۷ نتایج برای شبکه‌های دوبعدی ۱۱۶

۷.۷ گسترش IPM با تاکید بر نقش شبکه‌ی گردابه‌ی ۱۱۸

۸ رابطه با سیستم‌های فیزیکی دیگر

۱.۸ مدل کوراموتو ۱۲۲

۲.۸ مدل فرانکل—کونتوروا ۱۲۳

۳.۸ چگالیده بوز—اینشتین چرخنده ۱۲۴

۹ نتیجه‌گیری

مراجع ۱۲۹

مقدمه

بررسی پدیده‌های مربوط به مجاورت دو ابررسانا به طور نظری به کار برایان جوزفسون [1] برمی‌گردد. او در سال ۱۹۶۲، هنگامی که دانشجوی دکتری [2] بود به عنوان قسمتی از حل یکی از مسائل درس‌های فیلیپ اندرسون [3] مساله‌ی تونل‌زنی جفت‌های کوپر بین دو ابررسانای متصل شده به وسیله‌ی یک اتصال ضعیف را حل کرد. نظرات بزرگان ابررسانائی و از جمله جان باردین [4] برخلاف نتایج جوزفسون بود و همین باعث شد که او مقاله‌ی خود را در مجله‌ی تازه تاسیس $Physics\ Letters$ چاپ کند.[۱] اما این تنها مشکل نبود. اثر پیش‌بینی شده بسیار بزرگ بود و به نظر می‌آمد قبل از کار جوزفسون این اثرات مشاهده شده است. اما به جای نسبت دادن این اثرات به ابرجریان [5]، به رسانش در اتصال مابین نسبت داده می‌شدند. ولی یک خصوصیت متفاوت در ابرجریان وجود داشت که می‌توانست به مشاهده‌ی آن کمک کند و آن تغییر آن با میدان مغناطیسی بود. به دلیل تابعیت خاص ابرجریان تغییر آن با میدان مغناطیسی باید مشاهده می‌شد اما یک مشکل دیگر وجود داشت و آن میدان مغناطیسی زمین بود که اثرات مخربی بر جریان داشت. دلایل محرض برای درستی کار جوزفسون در حالت ایستا [6] سرانجام توسط اندرسون و جان راول [7] به دست آمد[۲] . بعدها وابستگی میدانی جریان ابررسانا به طور دقیق‌تری توسط راول بررسی شد و وابستگی آن به خصوصیات اتصال نیز توسط چند گروه بررسی شد. نتایج تجربی برای تائید اثر جوزفسون در حالت غیر ایستا [8] توسط یانسن و بقیه به دست آمد.[۳]

کار اولیه جوزفسون برای دو ابررسانای جدا شده به وسیله‌ی یک عایق (SIS) بود اما بعدها نشان داده شد که این اتصال می‌تواند به شکل‌های مختلفی باشد[۵، ۴]. در این‌جا باید بین دو نوع اتصال ابررسانائی تمایز قائل

---

[1] $Brian\ D.\ Josephson$

[2] $graduate\ student$

[3] $Philip\ \ W.\ Andreson$

[4] $John\ Bardeen$

[5] $supercurrent$

[6] $stationary\ Josephson\ effect$

[7] $John\ Rowell$

[8] $nonstationary\ Josephson\ effect$

شویم: اتصال‌های ضعیف [9] و اتصال‌های تونلی [10]. در اتصال‌های تونلی، جریان بین دو ابررسانا به دلیل تونل‌زنی جفت‌های کوپر از اتصال است در حالی‌که در اتصال‌های ضعیف در اتصال یک جریان رسانائی به وجود می‌آید و از طریق بازتاب اندریف [11] جریان ابررسانائی منتقل می‌شود.[٦] ما در این پایان‌نامه با اتصال‌های تونلی سروکار داریم، هرچند در مورد اتصال‌های ضعیف نیز در جاهائی صحبت به میان خواهد آمد.

شبکه‌های اتصالات ابررسانائی از کنار هم قرار گرفتن اتصالات ابررسانائی به دست می‌آیند، به این صورت که ابررساناها روی راس‌های شبکه قرار می‌گیرند و اتصالات بین آن‌ها با یال‌های شبکه مشخص می‌شوند. اهمیت و کاربرد اتصالات جوزفسون بیشتر به خاطر کاربرد وسیع ساده‌ترین شبکه‌ی از این نوع یعنی $SQUID$ها[12] است[۷]. یک $SQUID$ شامل دو ابررسانا است که به وسیله‌ی دو اتصال به یکدیگر متصل شده‌اند. از این وسیله می‌توان به عنوان یک مغناطومتر بسیار حساس برای مثال در کاربردهای بیولوژیک استفاده کرد[۹، ۸].

از نظر ترمودینامیکی، مسائلی که بیشتر موردنظرند، عبارتند از حالت پایه و دمای گذار. بیشتر کارهای مربوط به شبکه‌ها روی شبکه‌ی مربعی انجام شده است. اولین کارهای تجربی مربوط به رزنیک و همکاران[۱۰] و واس و وب[۱۱] بود. تایتل و جایاپراکاش برای تحلیل این نتایج به روش عددی متوسل شدند و حالت پایه و دمای گذار KT[13] را برای این سیستم مورد بررسی قرار دادند.[۱۳، ۱۲] کارهای بعدی روی شبکه‌ی مربعی بیشتر به مدل‌سازی این نتایج مربوط می‌شوند.[۱۴] اما اولین کار در مورد شبکه‌های غیرتناوبی توسط بهروز و همکاران [۱۵] انجام شد که شبکه‌ای را در نظر گرفتند که در یک جهت تناوبی بود، ولی در جهت دیگر شبه‌تناوبی بود به این ترتیب که از دو نوع یاخته تشکیل شده بودند که با نسبت مساحت‌های $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ با نظم فیبوناچی در کنار یکدیگر قرار گرفته بودند. نتایج کار این گروه نشان داد که هرچند دمای گذار T_C برحسب عامل تباهیدگی[14] f تناوبی نیست اما در fهای خاصی به مقدار غیرتباهیده‌ی خود بسیار نزدیک می‌شود. برای تحلیل این نتایج مدل‌های زیادی ارائه شد. اولین مدل که J^2 خوانده می‌شود توسط همین گروه ارائه شد که در آن فرض می‌شود همیشه فاز ناوردای پیمانه‌ای، کوچک باقی می‌ماند.[١٦] این مدل علاوه بر سادگی حل عددی دارای حل دقیق نیز هست.[۱۷] علاوه بر این مدل، نوری و همکاران با استفاده از تقریب میدان متوسط

---

[9] $weak\ links$

[10] $tunneling\ junction$

[11] $Andreev\ reflection$

[12] $Superconducting\ Quantum\ Interface\ Devices$

[13] $Kosterlitz - Thouless$

[14] $frustration$

معرفی شده به‌وسیله شی و استراود[۱۸] توانستند حل‌های دقیق‌تر تحلیلی را به دست آورند.[۱۹]

از نظر دینامیکی، اولین کار به آزمایش سیدنی شاپیرو برمی‌گردد که برای اولین بار در منحنی $I-V$ برای یک اتصال پله‌هائی را مشاهده کرد که به پله‌های شاپیرو معروف شدند.[۲۰] بعد از این کار وجود این پله‌ها در منحنی $I-V$ برای شبکه‌ای که جریان نوسانی به آن اعمال می‌شود، مورد تحقیق قرار گرفت. از جمله مسائل موردبحث در مورد دینامیک شبکه‌ها، حرکت شبکه‌ی گردابه‌ای با تغییر جریان است. مسئله‌ی تازه‌ای که در این حالت پیش می‌آید وجود پله‌های کسری است که وجود آن‌ها در فقط یک اتصال فرامیرای تنها ممکن نیست. وجود این پله‌ها به پدیده‌ی حرکت شبکه‌ی گردابه‌ای و هم‌زمانی فازهای ابررسانائی مربوط می‌شود [۲۱]. بررسی پله‌های شاپیرو در رابطه‌ی مستقیم با پدیده‌ی قفل‌شدگی فرکانسی در سیستم‌های دینامیکی واداشته است [۲۲] و به راحتی از طریق مفاهیمی که در سیستم‌های دینامیکی وارد می‌شود قابل فهم است [۲۳].

اتصالات جوزفسونی که تاکنون موردبحث قرار دادیم حالت خاصی از اتصالات جوزفسون کلی هستند[۲۴]. در حالت کلی اتصال جوزفسون با رابطه‌ی جریان—فاز آن مشخص می‌شود که می‌تواند بسته به نوع اتصال هر تابع فرد با تناوب 2π باشد. در بخشی از این پایان نامه به بررسی مختصری از خواص دینامیکی این اتصالات کلی می‌پردازیم و پدیده‌های جدیدی را که می‌تواند در آن‌ها اتفاق بیافتد بررسی می‌کنیم.

جدا از اهمیت خود انرژی حالت پایه به عنوان یک کمیت فیزیکی در شبکه‌های ابررسانائی، این کمیت در رابطه‌ی مستقیمی با دمای گذار شبکه نیز هست [۱۴]. در واقع تغییرات انرژی پایه با میدان خارجی به طور کمی و کیفی نمایان‌گر تغییرات دمای گذار ابررسانائی با میدان خارجی است [۱۸]. در مقایسه‌ی نتایج با مدل میدان متوسط برای شبکه‌های ابررسانا به این بحث بیشتر می‌پردازیم.

قسمت اصلی کاری که در این پایان‌نامه انجام شده است به بررسی رفتار انرژی پایه‌ی برحسب تغییرات میدان خارجی برای شبکه‌های غیرتناوبی است. انرژی حالت پایه به‌وسیله‌ی کمینه‌سازی مونت—کارلو[۲۵، ۲۶] به دست می‌آید. این نتایج عددی با مدلی تقریبی که هر یاخته در شبکه را به طور مستقل در نظر می‌گیرد مورد بررسی قرار می‌گیرند. در ادامه همین مدل بهبود و گسترش می‌یابد تا توصیف بهتری از نتایج عددی را به دست دهد.

از نقطه‌نظر دینامیکی به دینامیک روی شبکه‌های شبه‌تناوبی می‌پردازیم. شبکه‌ای که بیشتر در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرد شبکه‌ی پنروز است[۲۷، ۲۸]. نتایج اولیه‌ی ما نشان می‌دهد که حتی پله‌های شاپیرو

صحیح نیز در این حالت از بین می‌روند. هدف بعدی ما ارائه‌ی توضیحی برای این رفتار است.

ساختار پایان‌نامه به این صورت است که‌در فصل اول به مبانی فیزیکی برای بررسی حالت پایه و دینامیک یک اتصال می‌پردازیم. در فصل دوم فرمول‌بندی را به شبکه‌هائی از اتصالات جوزفسون گسترش می‌دهیم و مفاهیم فیزیکی مربوط به کوانتش شار و شبکه‌ی گردابه‌ای را مرور می‌کنیم. در انتهای این فصل به بررسی ساده‌ترین شبکه‌ی اتصالات جوزفسون یعنی $SQUID$ها می‌پردازیم که از دو اتصال جوزفسون تشکیل شده‌است و از پرکاربردترین شبکه‌های ابررسانائی است. در فصل سوم مروری نسبتاً کوتاه بر نتایج به دست آمده برای شبکه‌های مربعی خواهیم داشت تا دیدگاهی از پدیده‌های موردانتظار در این شبکه‌ها مانند رفتار شبکه‌ی گردابه‌ای، پله‌های کسری شاپیرو و پسماند را به دست آوریم. فصل چهارم به بررسی اثر جوزفسون در شبکه‌های غیرتناوبی یک‌بعدی می‌پردازد. در این بررسی با استفاده از تبدیل فوریه خصوصیات انرژی حالت پایه به دست می‌آید. فصل پنجم اثر جوزفسون را در شبکه‌های غیرتناوبی دوبعدی بررسی می‌کند. هم‌چنین دینامیک فاز برای شبکه‌ی پنروز مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ششم به مروری بر مدل‌های بررسی رفتار ترمودینامیکی می‌پردازیم که در آن مدل میدان متوسط برای دمای گذار و مدل J^2 برای حالت پایه معرفی می‌شوند. در فصل هفتم مدل یاخته‌های مستقل را ارائه می‌دهیم که نتایج عددی برای شبکه‌های غیرتناوبی را تفسیر می‌کند. در فصل هشت رابطه‌ی اتصالات جوزفسون با مدل‌ها و سیستم‌های فیزیکی دیگر مرور می‌شود و فصل نهم به نتیجه‌گیری اختصاص دارد.

فصل اول

اثر جوزفسون: تاریخچه و مبانی فیزیکی آن

۱.۱ تاریخچه و توضیحی کلی درباره‌ی اتصالات ضعیف

در این بخش تاریخچه اثر جوزفسون و توضیحاتی کلی درباره‌ی اتصالات ضعیف به طور کلی ارائه می‌شود. در مورد اتصالات جوزفسون و خواص آن‌ها و هم‌چنین تاریخچه‌ی کارهای روی این اتصالات مقالات و کتاب‌های زیادی وجود دارد. ما در این بخش بیشتر از فصل ٦ کتاب تینکهام [۲۹]، به همراه مراجع مروری[۳۳، ۳۲، ۳۱، ۳۰، ۲۴، ٦] استفاده می‌کنیم.

اتصالات ابررسانائی به طور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند: اتصالات تونلی و اتصالات غیر تونلی. نوع اصلی اتصال‌های تونلی شامل دو الکترود ابررسانائی است که به وسیله‌ی لایه‌ی نازکی از عایق از هم جدا شده‌اند (اتصال‌های SIS). رسانش محدود در این نوع اتصال‌ها تنها به دلیل تونل‌زنی الکترون‌ها از سد پتانسیل ناشی از عایق است. جریان ابررسانائی محدودی می‌تواند به دلیل تونل‌زنی الکترون‌هائی جفت‌شده ایجاد شود. دو خاصیت در اتصال‌های تونلی وجود دارد که که توصیف نظری آن‌ها را تسهیل می‌کند:

۱ – ضخامت سد انرژی (لایه‌ی عایق) از مرتبه‌ی $10^{-7}\ cm$ است و در مقایسه با همه‌ی طول‌های مشخصه‌ی

سیستم به ویژه طول مسیر آزاد الکترون، قابل صرف‌نظر است. این خاصیت به این معنی است که نیازی به وارد کردن وابستگی پارامترهای ابررسانائی به مختصات درون سد نیست.

۲– ضریب عبور مانع T در اغلب موارد آن‌قدر کوچک است که جریان حدی گذرنده از اتصال (از مرتبه‌ی $1 - 10^2 \ A/cm^2$) خیلی کم‌تر از جریان حدی الکترودها ($10^5 - 10^7 \ A/cm^2$) است. این خصوصیت محاسبه‌ی مشخصه‌های اتصال با استفاده از اختلال نسبت به پارامتر کوچک $T << 1$ را ممکن می‌کند؛ یعنی اثرات جریان تونلی روی الکترودها قابل صرف‌نظر است.

این خصوصیات تحلیل نظری این نوع اتصالات را بسیار ساده می‌کند، به طوری که نظریه کامل برای حالت dc در سال ۱۹۶۳[۳۴] و برای پتانسیل دلخواه $V(t)$ در سال ۱۹٦٦ کامل شد[۳۷، ۳٦، ۳۵].

نوع دیگر از اتصالات جوزفسون، اتصالات ضعیف [۱] است که به جای لایه‌ی عایق، فلز یا ابررسانائی متفاوت قرار می‌گیرد. در این صورت سازوکار غالب برای ایجاد جریان ابررسانائی بازتاب اندریف [۲] است. خصوصیات کامل این اتصالات در مقاله‌ی لیخارف [٦] به طور کامل توضیح داده شده است. انواعی از اتصالات وجود دارند که با تغییر پارامترهای قابل کنترل می‌توانند هر دو رفتار را در بازه‌ای از پارامترها از خود نشان دهند. این اتصالات، به اتصالات شکستی [۳] معروف هستند[۳۸].

فرمول‌بندی رفتار ترمودینامیکی و دینامیکی، در تقریبی که ما در این پایان‌نامه از آن استفاده می‌کنیم، برای همه‌ی اتصالات یکی است بنابراین در ادامه، نوع اتصال جوزفسون موردمطالعه را تکرار نمی‌کنیم.

۲.۱ اثر جوزفسون برای یک اتصال ابررسانائی

---

[۱] $weak \ link$

[۲] $Andreev \ reflection$

[۳] $break \ junction$

۱.۲.۱ انرژی آزاد و هامیلتونی یک اتصال ابررسانائی

دو الکترود ابررسانا را در نظر می‌گیریم که به وسیله‌ی یک اتصال یک‌بعدی از هم جدا شده‌اند. همه اجزا از یک نوع هستند و طول اتصال خیلی کوچک‌تر از طول همدوسی ابررسانا است ($L \ll \xi$). معادله‌ی یک بعدی لاندائو–گینزبورگ برای این سیستم به صورت زیر است[۲۹]

$$\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0 \tag{۱}$$

که در آن $f = \frac{\psi}{\psi_\infty}$ و ψ پارامتر نظم لاندائو–گینزبورگ است. می‌توانیم دو ابررسانا را در حال تعادل فرض کنیم، بنابراین $|f| = 1$ برای هر دو ابررسانا (با تعریف ψ_∞). اما فاز پارامتر نظم می‌تواند متفاوت باشد. چون فاز مطلق تعریف نشده است، بدون از دست دادن کلیت، می‌توانیم فازها را 0 و $\Delta\phi$ بگیریم. بنابراین هدف ما حل معادله‌ی ۱ با شرایط مرزی $f = 1$ در $x = 0$ و $f = e^{i\Delta\phi}$ در $x = L$ است. از تحلیل ابعادی در می‌یابیم که نسبت جمله‌ی اول به دو جمله‌ی دیگر از مرتبه‌ی ξ^2/L^2 است و چون در این مسئله $L \ll \xi$، می‌توانیم تنها جمله‌ی اول را نگه داریم و از دو جمله‌ی دیگر صرف‌نظر کنیم. با این تقریب به معادله‌ی لاپلاس یک‌بعدی می‌رسیم که با شرایط مرزی‌ای که داریم، جواب آن به صورت زیر است

$$f(x) = (1 - \frac{x}{L}) + \frac{x}{L} e^{i\Delta\phi} \tag{۲}$$

با جای‌گذاری در رابطه‌ی چگالی جریان لاندائو–گینزبورگ، جریان ابررسانائی به صورت زیر در می آید

$$I_s = I_c sin(\Delta\phi) \tag{۳}$$

که در آن $I_c = \frac{2e\hbar\psi_\infty^2}{m^*}\frac{A}{L}$ و A مساحت سطح مقطع اتصال است. انرژی آزاد لاندائو–گینزبورگ به صورت زیر در می آید

$$\Delta F = \frac{\hbar}{2e} I_c (1 - cos(\Delta\phi)) \tag{۴}$$

اگر جمله‌ی دوم معادله‌ی ۱ را حفظ کنیم رابطه‌ی جریان ابررسانائی به همین صورت باقی می‌ماند، تنها ضریب I_c تغییر می‌کند.

در حضور میدان مغناطیسی معادله‌ی لاندائو–گینزبوگ به صورت زیر در می آید[۲۹]

$$\frac{d^2f}{dx^2} - \frac{1}{i}[\frac{d\phi}{dx}\frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}(\frac{d\phi}{dx})] - (\frac{d\phi}{dx})^2 f = 0 \tag{۵}$$

که در آن $\phi(x) = \frac{2\pi}{\phi_0}\int_0^x A ds$ و $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$ کوانتای شار است. با تغییر متغیر $F = fe^{-i\phi(x)}$ دوباره به معادله‌ی لاپلاس می‌رسیم ولی با شرایط مرزی $F = 1$ در $x = 0$ و $F = e^{i\gamma}$ در $x = L$. $\gamma = \Delta\phi - \phi(L)$ اختلاف فاز ناوردای پیمانه‌ای است. نتایج برای جریان ابررسانائی و انرژی آزاد به همان صورت قبل است تنها به جای اختلاف فاز$\Delta\phi$، اختلاف فاز ناوردای پیمانه‌ای γ می آید

$$I_s = I_c sin(\gamma) \tag{۶}$$

$$\Delta F = \frac{\hbar}{2e}(1 - cos(\gamma)) \tag{۷}$$

وقتی به مسئله‌ی کمینه کردن انرژی آزاد برای γهای متفاوت می‌پردازیم از قسمت ثابت صرف‌نظر می‌کنیم و آن را هامیلتونی سیستم می‌نامیم:

$$H = -E_J cos(\gamma) \tag{۸}$$

که $E_J = \frac{\hbar}{2e}I_c$ ثابت انرژی است و در بیشتر موارد یک در نظر گرفته می‌شود.

قبل از این‌که به بحث درباره‌ی دینامیک یک اتصال با فرضیات بالا بپردازیم به دو بحث خلاصه در مورد اتصال‌های گسترده و اثر پوششی روی انرژی آزاد اتصال‌های گسترده به عنوان نمونه‌ای از اثرات پوششی که از آن‌ها صرف‌نظر کرده‌ایم می‌پردازیم.

اتصال‌های گسترده [۴]

در این حالت اتصال نازک در نظر گرفته نمی‌شود بلکه در راستای میدان دارای ضخامتی است که باعث می‌شود تا جریان ابررسانائی دیگر به سادگی ضریبی از چگالی جریان نباشد. برای این نوع اتصال هنوز چگالی جریان به صورت $j_s = j_C sin(\gamma(x,y))$ تغییر می‌کند. برای به دست آوردن فازها و جریان در حالت کلی، سیستم

[۴] $extended\ junctions$

مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که سطوح ابررساناها موازی صفحه‌ی xy باشند و $\vec{H}$ در راستای y و جریان تونل‌زنی در راستای z باشد. اگر ابررساناها در مقایسه با λ نازک باشند و با یک لایه عایق به ضخامت d از هم جدا شده باشند، آن‌گاه شار مغناطیسی عبوری برابر است با $\Delta\Phi = h(2\lambda + d)\Delta x$، که $h(x)$ چگالی میدان محلی در مانع است. با ترکیب این معادلات با رابطه‌ی کوانتش شار نتیجه می‌گیریم که[۲۹]

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x} = \frac{2\pi(2\lambda + d)h}{\Phi_0} \qquad (۹)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0 \qquad (۱۰)$$

اگر پوشش[۵] به وسیله‌ی جریان ابررسانائی صرف‌نظر شود، آن‌گاه میدان محلی h همه‌جا با میدان اعمالی H برابر است. بنابراین معادلات بالا دارای حل زیر خواهند بود

$$\gamma(x) = \gamma_0 + kx \qquad (۱۱)$$

$$k = \frac{2\pi H(2\lambda + d)}{\Phi_0} \qquad (۱۲)$$

جریان عبوری از اتصال به صورت زیر است

$$I_s = \int j_c(x,y) sin(\gamma(x)) dxdy \qquad (۱۳)$$

که انتگرال‌گیری روی سطح مقطع اتصال است. بعد از انتگرال‌گیری روی y به دست می‌آوریم

$$I_s = \int J_C(x) sin(\gamma(x)) dx \qquad (۱۴)$$

که $I_C(x) = \int j_C(x,y)dy$، چگالی جریان حدی در واحد طول در راستای x است. برای مثال برای اتصال مستطیلی با ابعاد $X \times Y$ و j_C یکنواخت، $I_C = Y j_C$ و بنابراین داریم

$$I_s = j_C Y \int_0^X sin(\gamma_0 + kx)dx = -\frac{j_C Y}{k}(cos(\gamma_0 + kX) - cos(\gamma_0)) \qquad (۱۵)$$

بیشینه‌ی جریان ابررسانائی برای حالت اتصال مستطیلی به صورت زیر است

$$\frac{I_s^{max}(f)}{I_s^{max}(0)} = |\frac{sin(\pi f)}{\pi f}| \qquad (۱٦)$$

---

[۵] $screening$