



دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی برق گرایش کنترل

پایدارسازی سیستم‌های غیرخطی تصادفی

به فرم زنجیره‌ای

توسط

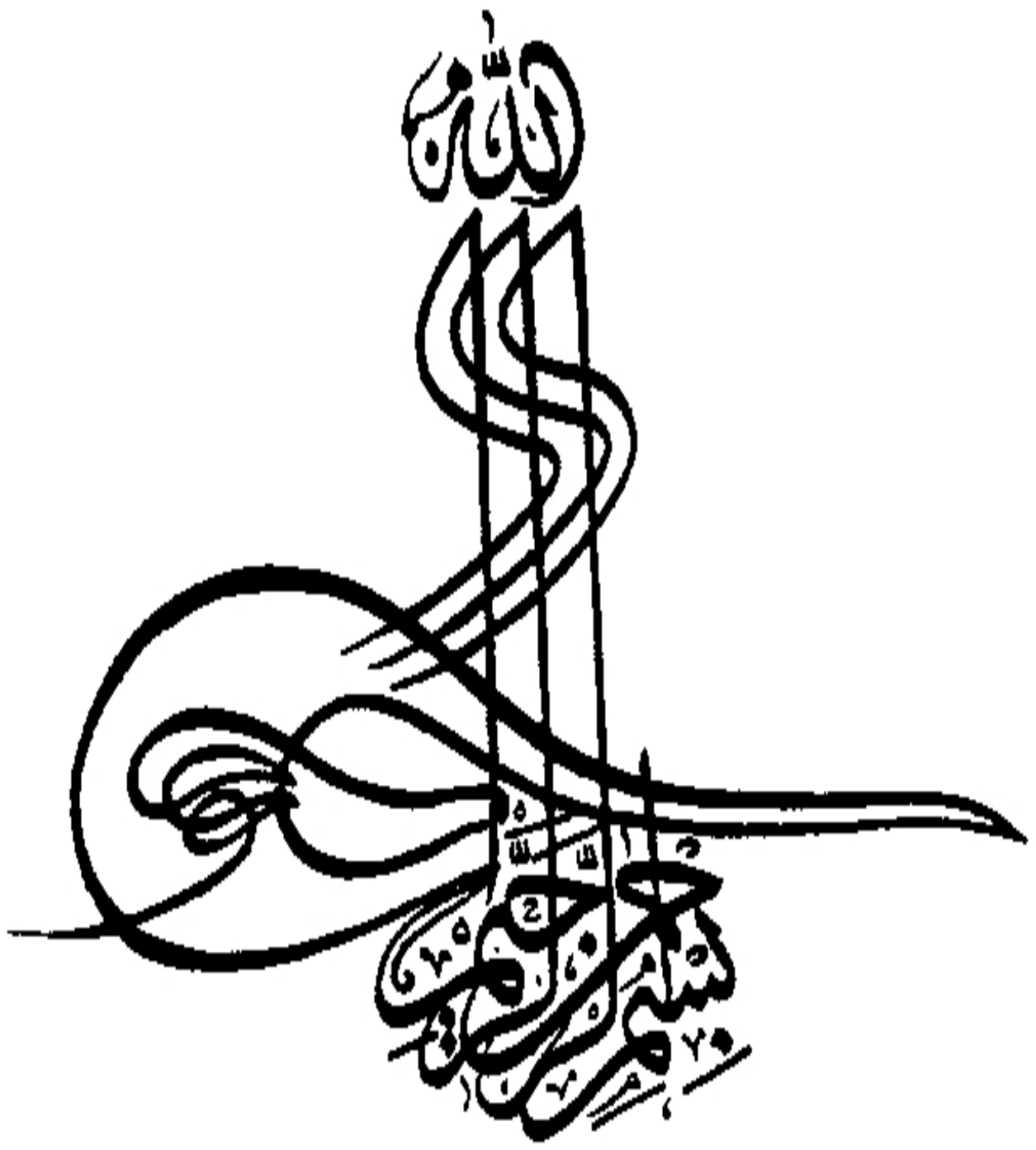
محمد سلطانی

استاد راهنما

دکتر علیرضا خیاطیان

دکتر مریم دهقانی

بهار ۱۳۹۱



به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب محمد سلطانی (۸۸۰۶۸۶) دانشجوی رشته‌ی برق-کنترل دانشکده‌ی برق و کامپیوتر اظهار می‌کنم که این پایان‌نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده‌ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته‌ام. همچنین اظهار می‌کنم که پایان‌نامه و موضوع پایان‌نامه‌ام تکراری نیست و تعهد می‌نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه‌ی حقوق این اثر مطابق با آیین‌نامه‌ی مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی : محمد سلطانی

تاریخ و امضاء: ۱۳۹۱/۳/۲۷



به نام خدا

پایدارسازی سیستم‌های غیرخطی تصادفی به فرم زنجیره‌ای

به کوشش
محمد سلطانی

پایان نامه

ارائه شده به دانشکده تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه
کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

مهندسی برق - کنترل

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته‌ی پایان‌نامه، با درجه‌ی عالی

دکتر علیرضا خیاطیان، دانشیار بخش کنترل و قدرت (رییس کمیته)

دکتر مریم دهقانی، استادیار بخش کنترل و قدرت (رییس کمیته)

دکتر پاکنوش کریم آقایی، دانشیار بخش کنترل و قدرت

دکتر مجتبی محزون، دانشیار دانشکده مکانیک

بهار ۱۳۹۱

تقدیرم به

تمام کلمات وجودم را چون شعری ناتمام به تو تقدیرم من کنم

به تو که تمام هروف زندگیت کلمه ای شد

و درد تو مرز زندگی من نهش برت

به تو که اشکهای مضطرب و گریزان مرا

باشادی و روسه ترانه ای جاودالت آراستی

به تو که غبار دلهره و پائلی بی بوی در دهن کمره قلب تنمایم به شبم آرزو مبدل ساختی

به تو ای مادر و بر تو ای پدر درود

بر آستانه مژگنم نگاهتان روسه منم

سپاسگزاری

از همه کسانی که مرا در انجام این پایان‌نامه یاری رساندند، تشکر و قدردانی می‌نمایم. به‌ویژه از اساتید گرامی، جناب آقای دکتر علیرضا خیاطیان و سرکار خانم مریم دهقانی که با همراهی، راهنمایی و حمایت‌های صادقانه و بی‌دریغشان مرا در انجام این پایان‌نامه مدد رساندند. از ایشان سپاسگزارم به خاطر راهنمایی‌های عالمانه و به خاطر همه‌ی آن‌چه که در طول این مدت به من آموختند. همچنین سپاس و تشکر از اساتید مشاور، جناب آقای دکتر پاکنوش کریم‌آقایی و جناب آقای مجتبی محزون که با راهنمایی‌های خود باعث بهبود این پایان‌نامه گردیده‌اند. در پایان نیز از تمامی دوستان دانشجو مخصوصاً جناب آقای مهندس نوید نوروزی و جناب آقای مهندس احسان زراعت‌کار که با کمک‌های صمیمانه‌ی خود مرا یاری نموده‌اند، سپاسگزاری می‌نمایم.

چکیده

پایداری سیستم‌های غیرخطی تصادفی به فرم زنجیره‌ای

به کوشش

محمد سلطانی

این گزارش حاوی خلاصه تلاشی است که برای پایداری فرآگیر و طراحی فیدبک برای دسته‌ای از سیستم‌های تصادفی به فرم زنجیره‌ای صورت گرفته است.

در این پایان‌نامه سیستم‌های به فرم زنجیره‌ای که تحت تاثیر نویز تصادفی قرار گرفته‌اند و پارامترهای نامعلوم دارند و همچنین توابع غیرخطی که در این پارامترها و نویز ضرب شده‌اند، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای این سیستم‌ها طراحی وفقی انجام پذیرفته است و با استفاده از توابع لیاپانف مورد استفاده در سیستم‌های تصادفی و قضایای لیاپانف و لاسال بسط داده شده به سیستم‌های تصادفی، پایداری فرآگیر آن‌ها نشان داده شده است.

در تلاشی دیگر سیستم تشریح شده در بالا در حضور نویز با کوواریانس نامعلوم بررسی شده است و نشان داده شده است که تنها با تخمین نرم بینهایت کوواریانس نویز می‌توان به طراحی قانون کنترلی پایداری پرداخت. بار دیگر قانون کنترلی بر اساس کنترل وفقی طراحی شده است که این طراحی دارای دو قانون به روز رسانی یکی برای تخمین پارامترهای نامعلوم و دیگری برای تخمین نرم بینهایت کوواریانس نویز است. با استفاده از تئوری لیاپانف پایداری فرآگیر این دسته از سیستم‌ها نیز نشان داده شده است. در پایان سیستم به فرم زنجیره‌ای تصادفی در حضور نامعینی‌های غیرخطی کلی قرار گرفته است و با استفاده از روش گام‌به‌عقب، بار دیگر قانون کنترلی پایداری برای سیستم طراحی شده است.

نتایج شبیه‌سازی‌ها برای نشان دادن عملکرد قانون کنترلی طراحی شده ارائه گردیده است که این شبیه‌سازی‌ها نیز نتایج ریاضیاتی به دست آمده را تایید می‌کند.

ذکر این نکته ضروری است که نتایج منتشر شده قبلی تنها پایداری فرآگیر تقریبی سیستم‌های زنجیره‌ای تصادفی را نشان می‌داد و تا آنجایی که نگارنده اطلاع دارد این پژوهش اولین اثبات پایداری فرآگیر سیستم‌های زنجیره‌ای تصادفی می‌باشد.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول . مقدمه	
۱-۱ کلیات.....	۲
۲-۱ مروری بر تحقیقات گذشته.....	۲
۱-۲-۱ سیستم‌های تصادفی.....	۲
۲-۲-۱ کاربرد سیستم‌های تصادفی.....	۶
۳-۲-۱ سیستم‌های غیرهولونومیک.....	۱۲
۳-۱ مروری بر فصول پایان‌نامه.....	۱۳
فصل دوم. قضایای پایداری سیستم‌های تصادفی	
۱-۲ توابع لیاپانف نوین به حالت.....	۱۷
۲-۲ توابع کنترل لیاپانف تصادفی.....	۱۹
فصل سوم. سیستم‌های فیدبک قطعی تصادفی	
۱-۳ سیستم‌های فیدبک حالت.....	۲۳
۱-۱-۳ طراحی گام‌به‌عقب برای سیستم‌های فیدبک حالت تصادفی.....	۲۳
۲-۱-۳ تضعیف اغتشاش تصادفی.....	۲۹
۳-۱-۳ طراحی گام‌به‌عقب و فقی برای سیستم‌های فیدبک حالت تصادفی.....	۳۱
۲-۳ سیستم‌های فیدبک خروجی.....	۳۷
۱-۲-۳ پایداری فیدبک خروجی نوین به حالت.....	۳۸
۲-۲-۳ پایداری فیدبک خروجی و فقی.....	۴۲
فصل چهارم. سیستم‌های پارامتریک زنجیره‌ای تصادفی غیر خطی	
۱-۴ معرفی سیستم.....	۴۸

۴۸	۲-۴ طراحی کنترلر
۴۹	۱-۲-۴ طراحی گام به عقب
۵۹	۲-۲-۴ طراحی فیدبک متغیر با زمان
۵۹	۳-۴ اثبات پایداری

فصل پنجم. سیستم‌های پارامتریک زنجیره‌ای تصادفی غیرخطی با نویز با کوواریانس نامعلوم

۶۳	۱-۵ معرفی سیستم
۶۳	۲-۵ طراحی کنترلر
۶۴	۱-۲-۵ طراحی گام به عقب
۷۶	۲-۲-۵ طراحی فیدبک متغیر با زمان

فصل ششم. سیستم‌های پارامتریک زنجیره‌ای تصادفی غیرخطی دارای جمله‌های نامعین

غیرخطی کلی

۷۹	۱-۶ معرفی سیستم
۷۹	۲-۶ طراحی کنترلر
۸۰	۱-۲-۶ طراحی گام به عقب
۹۲	۲-۲-۶ طراحی فیدبک متغیر با زمان

فصل هفتم. نتایج شبیه‌سازی

۹۴	۱-۷ مقدمه
۹۴	۲-۷ فیدبک حالت
۹۸	۳-۷ فیدبک خروجی
۱۰۲	۴-۷ سیستم زنجیره‌ای قطعی و تصادفی و مقایسه بین آنها
۱۲۲	۵-۷ سیستم زنجیره‌ای با کوواریانس نامعلوم
۱۳۰	۶-۷ سیستم زنجیره‌ای با نامعینی غیرخطی

فصل هشتم. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱-۸ نتیجه‌گیری و جمع بندی..... ۱۳۸

۲-۸ پیشنهاد هایی برای پروژه‌های آتی..... ۱۳۹

ضمایم

ضمیمه ۱. فرآیند تصادفی..... ۱۴۲

فرآیند وینر..... ۱۴۲

ضمیمه ۲. لم ایتو..... ۱۴۵

ضمیمه ۳. روش گام به عقب..... ۱۴۶

ضمیمه ۴. نامساوی یانگ..... ۱۵۰

ضمیمه ۵. معرفی سیستم‌های غیرهولونومیک به فرم زنجیری..... ۱۵۰

فرم زنجیره‌ای..... ۱۵۱

کنترل فرم زنجیری..... ۱۵۳

کنترل سینوسی..... ۱۵۳

روش فیدبک همگن زمان‌مند..... ۱۵۴

ضمیمه ۶. اثبات فرمول‌های مورد استفاده در بخش ۱-۲-۳..... ۱۵۹

ضمیمه ۷. اثبات فرمول‌های مورد استفاده در بخش ۲-۲-۳..... ۱۶۱

ضمیمه ۸. الگوریتم شبیه‌سازی معادله دیفرانسیل تک بعدی..... ۱۶۱

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل ۷-۱- خروجی سیستم در استراتژی کاهش اغتشاش تصادفی	۹۵
شکل ۷-۲- ورودی اعمال شده به سیستم در استراتژی کاهش اغتشاش تصادفی	۹۶
شکل ۷-۳- خروجی سیستم در استراتژی وفقی	۹۶
شکل ۷-۴- تخمین پارامتر در استراتژی وفقی	۹۷
شکل ۷-۵- ورودی اعمال شده به سیستم در استراتژی وفقی	۹۷
شکل ۷-۶- حالت اول و تخمین آن در طراحی پایداری نویز به حالت	۹۹
شکل ۷-۷- حالت دوم و تخمین آن در طراحی پایداری نویز به حالت	۹۹
شکل ۷-۸- ورودی در طراحی پایداری نویز به حالت	۹۹
شکل ۷-۹- حالت اول و تخمین آن در طراحی وفقی	۱۰۱
شکل ۷-۱۰- حالت دوم و تخمین آن در طراحی وفقی	۱۰۱
شکل ۷-۱۱- تخمین پارامتر در طراحی وفقی	۱۰۱
شکل ۷-۱۲- ورودی در طراحی وفقی	۱۰۲
شکل ۷-۱۳- حالت x_0 سیستم تصادفی	۱۰۶
شکل ۷-۱۴- حالت x_1 سیستم تصادفی	۱۰۶
شکل ۷-۱۵- حالت x_2 سیستم تصادفی	۱۰۷
شکل ۷-۱۶- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی	۱۰۷
شکل ۷-۱۷- ورودی u_2 اعمال شده به سیستم تصادفی	۱۰۸
شکل ۷-۱۸- حالت x_0 سیستم قطعی	۱۱۰
شکل ۷-۱۹- حالت x_1 سیستم قطعی	۱۱۰
شکل ۷-۲۰- حالت x_2 سیستم قطعی	۱۱۱
شکل ۷-۲۱- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم قطعی	۱۱۱
شکل ۷-۲۲- حالت x_0 سیستم تصادفی با کنترلر طراحی شده برای سیستم قطعی	۱۱۲

- شکل ۷-۲۳- حالت x_1 سیستم تصادفی با کنترلر طراحی شده برای سیستم قطعی..... ۱۱۳
- شکل ۷-۲۴- حالت x_2 سیستم تصادفی با کنترلر طراحی شده برای سیستم قطعی..... ۱۱۳
- شکل ۷-۲۵- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی با کنترلر طراحی شده برای سیستم قطعی
..... ۱۱۴
- شکل ۷-۲۶- حالت x_0 سیستم تصادفی با جمله تصادفی عادی با کنترلر طراحی شده برای
سیستم قطعی..... ۱۱۵
- شکل ۷-۲۷- حالت x_1 سیستم تصادفی با جمله تصادفی عادی با کنترلر طراحی شده برای
سیستم قطعی..... ۱۱۵
- شکل ۷-۲۸- حالت x_2 سیستم تصادفی با جمله تصادفی عادی با کنترلر طراحی شده برای
سیستم قطعی..... ۱۱۶
- شکل ۷-۲۹- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی با جمله تصادفی عادی با کنترلر طراحی شده
برای سیستم قطعی..... ۱۱۶
- شکل ۷-۳۰- حالت x_0 سیستم تصادفی با واریانس ۲..... ۱۱۷
- شکل ۷-۳۱- حالت x_1 سیستم تصادفی با واریانس ۲..... ۱۱۸
- شکل ۷-۳۲- حالت x_2 سیستم تصادفی با واریانس ۲..... ۱۱۸
- شکل ۷-۳۳- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی با واریانس ۲..... ۱۱۹
- شکل ۷-۳۴- ورودی u_2 اعمال شده به سیستم تصادفی با واریانس ۲..... ۱۱۹
- شکل ۷-۳۵- حالت x_0 سیستم تصادفی با واریانس ۴..... ۱۲۰
- شکل ۷-۳۶- حالت x_1 سیستم تصادفی با واریانس ۴..... ۱۲۰
- شکل ۷-۳۷- حالت x_2 سیستم تصادفی با واریانس ۴..... ۱۲۱
- شکل ۷-۳۸- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی با واریانس ۴..... ۱۲۱
- شکل ۷-۳۹- ورودی u_2 اعمال شده به سیستم تصادفی با واریانس ۴..... ۱۲۲
- شکل ۷-۴۰- حالت x_0 سیستم تصادفی..... ۱۲۷
- شکل ۷-۴۱- حالت x_1 سیستم تصادفی..... ۱۲۸
- شکل ۷-۴۲- حالت x_2 سیستم تصادفی..... ۱۲۸
- شکل ۷-۴۳- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی..... ۱۲۹

- شکل ۷-۴۴- تخمین پارامتر $\hat{\beta}$ سیستم تصادفی ۱۲۹
- شکل ۷-۴۵- ورودی u_2 اعمال شده به سیستم تصادفی ۱۳۰
- شکل ۷-۴۶- حالت x_0 سیستم تصادفی ۱۳۴
- شکل ۷-۴۷- حالت x_1 سیستم تصادفی ۱۳۴
- شکل ۷-۴۸- حالت x_2 سیستم تصادفی ۱۳۵
- شکل ۷-۴۹- تخمین پارامتر $\hat{\theta}$ سیستم تصادفی ۱۳۵
- شکل ۷-۵۰- ورودی u_2 اعمال شده به سیستم تصادفی ۱۳۶
- شکل ضمیمه ۱- یک تحقق از فرآیند وینر تک بعدی ۱۴۳
- شکل ضمیمه ۲- یک تحقق از فرآیند وینر سه بعدی ۱۴۵
- شکل ضمیمه ۳- نمودار بلوکی سیستم‌های (16.8) و (17.8) ۱۴۷
- شکل ضمیمه ۴- وارد کردن $\phi(\eta)$ ۱۴۸
- شکل ضمیمه ۵- گام به عقب $\phi(\eta)$ از انتگرال گیر ۱۴۸

فهرست تعاریف و نشانه‌ها

نرم اقلیدسی برای بردار $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نرم فربینیوس^۱ برای ماتریس $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$|X| = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m X_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{Tr}\{X^T X\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

نرم بینهایت برای یک تابع محدود

$$\|X\|_{\infty} \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X(t)|$$

$$X : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

مشتق لی^۲ برای یک تابع هموار^۳

$$L_f V = \frac{\partial V}{\partial x} f$$

و یک تابع برداری $V(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\mathcal{L}V$ برای سیستم غیر خطی تصادفی^۴

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(x, t) &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g(x, t)^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g(x, t) \right\} \end{aligned}$$

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)\Sigma(t)dw$$

لی براکت^۵ برای دو میدان برداری f و g

$$ad_f g = [f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

¹ - Frobenius

² - Lie-derivative

³ - Smooth

⁴ - Infinitesimal generator

⁵ - Lie bracket

فصل اول

مقدمه

۱-۱ کلیات

یکی از شاخه‌های مهم علم کنترل، کنترل سیستم‌های تصادفی است که به تحلیل پایداری و پایدارسازی این سیستم‌ها می‌پردازد. مدل‌های تصادفی نقش مهمی در بسیاری از شاخه‌های دانش و صنعت بازی می‌کنند.

زمینه کنترل سیستم‌های غیر خطی تصادفی یک زمینه تحقیقاتی است که توجه بسیاری را به خود جلب کرده است. موضوع این زمینه، پایدارسازی (به صورت احتمالی) سیستم‌های غیرخطی در حضور نویز می‌باشد. می‌دانیم که سیستم‌های وفقی دارای مدل غیرخطی می‌باشند و اگر دامنه وسیعی از کارکرد مدنظر باشد خاصیت غیر خطی آن‌ها خود را بیشتر نشان می‌دهد. از طرف دیگر، اینگونه سیستم‌ها در معرض اغتشاشات مختلف هستند از آنجایی که مقدار دقیق اغتشاش‌های وارد به سیستم قابل پیش‌بینی نیست و فقط اطلاعات آماری کلی آن‌ها ممکن است در دسترس باشد، بنابراین لزوم تحلیل سیستم‌ها با معادلات غیرخطی تصادفی مشخص می‌شود.

۲-۱ مروری بر تحقیقات گذشته

در این قسمت به مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینه سیستم‌های تصادفی و سیستم‌های غیرهولونومیک می‌پردازیم

۱-۲-۱ سیستم‌های تصادفی

علم کنترل در طراحی کنترل کننده برای سیستم‌های معین پیشرفت‌های زیادی داشته

است؛ ولیکن هنوز مسایل زیادی در طراحی کنترل کننده برای سیستم های تصادفی غیرخطی وجود دارند و تحقیقات کمی در این زمینه انجام شده است. شروع تئوری پایدارسازی تصادفی به دهه ۶۰ [۱] برمی گردد. تکنیک های لیاپانف برای پایدارسازی سیستم های تصادفی در کتاب خاص مینسکی^۱ وجود دارد. مساله پایدارسازی با نویز در مقالات بسیاری وجود دارد [۲-۵] و حجم قابل توجهی از تحقیقات در [۶] بررسی شده اند.

به خاطر سختی موجود در آنالیز لیاپانف (معادله دیفرانسیل ایتو علاوه بر گرادیان شامل جمله های هسین^۲ نیز است) تحقیقات از پایدارسازی به بهینه سازی تغییر جهت داد [۷-۱۲]، سایر تحقیقات مساله لیاپانف را با یک مساله سخت تر جایگزین کردند (حل یک معادله مشتق جزئی همیلتون-جاکوبی-بلمن [۱۳-۱۴]).

پیشرفت در زمینه پایدار سازی سیستم های قطعی نیز تا پیشرفت در نظریات ریاضی در دهه ۸۰ [۱۵] و کشف یک فرمول ساده برای پایدارسازی لیاپانف [۱۶] بسیار کند بود. این کشفیات پیشرفت بسیاری را در زمینه های کنترل وفقی، مقاوم و بهینه به وجود آورد [۱۷-۱۹].

این دستاوردها در زمینه کنترل سیستم های غیرخطی قطعی^۳، باعث شد که دوباره تحلیل سیستم های غیرخطی تصادفی مد نظر دانشمندان این زمینه قرار گیرد. فلورچینگر^۴ [۲۰-۲۳] اولین کسی بود که زمینه پایدارسازی سیستم های تصادفی را سروسامان داد اگر چه پن^۵ و باشار^۶ اولین کسانی بودند که مساله پایداری را برای دسته ای از سیستم های فیدبک قطعی [۲۴] حل کردند. نتایج آن ها پایداری مجانبی فراگیر را تضمین می کرد. تسیناس^۷ شرایط کافی را برای پایداری فراگیر دسته ای از سیستم های مثلثی فیدبک قطعی و فیدبک قطعی با نویز با شدت واحد به دست آورد [۲۵-۲۶].

کرستیک^۸ و دنگ^۹ از تابع لیاپانف با توان مرتبه چهار^{۱۰} استفاده کردند و برای سیستم های فیدبک قطعی تصادفی طراحی کنترل گام به عقب انجام دادند، سپس نتایج کار خود را به

¹ - Khas'minskii

² - Hessian

³ - Deterministic

⁴ - Florchinger

⁵ - Pan

⁶ - Basar

⁷ - Tsiniias

⁸ - Krstic

⁹ - Deng

¹⁰ - Quartic

مساله معکوس بهینه سازی سیستم های تصادفی گسترش دادند [۲۷-۲۸]. آن‌ها همچنین پایداری سیستم های فیدبک خروجی تصادفی غیرخطی زمان پیوسته را نشان دادند، کلاس سیستم هایی که آنها در نظر گرفتند از کلاس سیستم های فیدبک قطعی خروجی گسترده تر بود [۲۹-۳۱].

لیو^۱ و مو^۲ پایداری را برای دسته ای از سیستم های تصادفی فیدبک خروجی انجام دادند که جمله غیر خطی فقط به خروجی وابسته بود. آن‌ها ابتدا یک مشاهده گر با بهره بالا طراحی کردند که بهره آن با استفاده از معادله ریکاتی به دست می آمد سپس با استفاده از کنترل گام به عقب یک کنترلر فیدبک خروجی به دست آوردند و پایداری سیستم و رسیدن حالت های سیستم به مبدا را با احتمال یک نشان دادند [۳۲].

وو^۳ و همکارانش با استفاده از تئوری بهره کوچک تصادفی به طراحی کنترلر به روش کنترل گام به عقب پرداختند آنها دسته ای از سیستم های غیر خطی با دینامیک های مدل نشده و توابع غیرخطی نامعین که دارای پایداری ورودی به حالت^۴ بودند را در نظر گرفتند و قضیه بهره کوچک را به حالت تصادفی گسترش دادند و پایداری سیستم مورد نظر را نشان دادند [۳۳].

ژیا^۵ و همکارانش مساله ی پایداری و کنترل لغزشی را برای یک کلاس از سیستم های خطی پیوسته با پرش های تصادفی حل کردند که سیستم به صورت تصادفی بین چند زیر سیستم سویچ می کرد دینامیک های سیستم پرشی نمی تواند در هیچ سطح کنترل لغزشی برای همیشه باقی بماند بنابراین اثبات این که سیستم پایدار است یا نه مشکل است. این آقایان با استفاده از تکنیک کنترل گام عقب ، پایداری این سیستم ها را که دارای پرش مارکف هستند نشان دادند به شرطی که یک مجموعه از نامساوی های ماتریسی خطی (LMI) که به هم وابسته اند قابل حل باشند [۳۴].

چن^۶ و همکارانش مساله ی کنترل فیدبک خروجی و فقی را برای دسته ای از سیستم های فیدبک خروجی قطعی غیرخطی با تاخیر متغیر با زمان با استفاده از شبکه عصبی حل کردند ،

¹ - Liu

² - Mu

³ - Wu

⁴ - Input to state stability

⁵ - Xia

⁶ - Chen