دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

رساله دوره دکتری ریاضی محض

عنوان

شناسایی ابررویه‌های فضافرم‌های استاندارد تعریف شده بوسیله فروبری‌های طولپایی $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ که $L_k x = Ax + b$ و $0 \leq p \leq q \leq 1$

نگارش

فیروز پاشائی

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

دی ۱۳۹۰

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای **فیروز پاشایی** به شماره دانشجویی ۸۵۵۶۶۲۰۰۹ رساله واحدی خود را با عنوان: **«شناسایی ابررویه‌های فضافرم‌های استاندارد تعریف‌شده بوسیله فروبری‌های طولپایی** $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ **که** $L_k x = Ax + b$ **و** $0 \le p \le q \le 1$» در تاریخ ۹۰/۱۰/۲۶ ارائه کردند.

اعضای هیأت داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تأیید کرده است و پذیرش آن را برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می‌کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	خانم دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر حمیدرضا فنایی	دانشیار	
۵- استاد ناظر خارجی	آقای دکتر ناصر بروجردیان	استادیار	
۶- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی است که در سال ۱۳۹۰ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب فیروز پاشائی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع دکتری تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام ونام خانوادگی: فیروز پاشائی

تاریخ و امضا: ۲۸ / ۹ / ۹۰

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب فیروز پاشائی دانشجوی رشته ریاضی محض ورودی سال تحصیلی ۱۳۸٥ مقطع دکتری دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا: فیروز پاشائی

تاریخ: ۲۸ / ۹ / ۹۰

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس و ستایش بی‌نهایت آفریدگار را که هر چه دارم از اوست. صمیمانه سپاسگذاری می‌کنم از :

پدر و مادر بزرگوارم و همه اعضای خانواده که همیشه دلسوز و مشوق هستند و همسرم که در تحمل مشکلات و قصورات و تقصیرات بنده صبور و صادق و مهربانند. دوره دکتری بنده میسر نشد مگر با لطف خدا و حمایت و مساعدت همسر فداکارم.

استاد راهنمای گران‌قدرم جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی که همواره از راهنمایی و پشتیبانی بی دریغ و باحوصله‌ی ایشان بهره‌مندم.

اعضای هیات محترم داوران رساله، جناب آقای دکتر ناصر بروجردیان از دانشگاه صنعتی امیرکبیر، جناب آقای دکتر حمیدرضا فنایی از دانشگاه صنعتی شریف، سرکار خانم دکتر فرشته سعدی و جناب آقای دکتر عباس حیدری از دانشگاه تربیت مدرس که زحمت داوری رساله را تقبل فرموده و بنده را از پیشنهادهای سازنده و راهگشای خود بهره‌مند نمودند.

مدیر محترم گروه ریاضی محض آقای دکتر عباس حیدری که در طول دوره دکتری از مساعدت و راهنمایی‌های بی دریغ ایشان بهره‌مند بودم.

و

مسئولین محترم دانشکده‌ی علوم ریاضی، اساتید گرامی، کارکنان محترم و دوستان عزیز دانشجو قدردانی و تشکر می کنم.

امید دارم که بتوانم دین اخلاقی و علمی خود را به کشور به نحو احسن ادا نموده و زحمات این بزرگواران را به ثمر برسانم.

چکیده

هدف رساله، شناسایی ابررویه‌های همبند و جهت‌پذیر در فضافرم‌های ریمانی و لورنتزی $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ ($0 \le p \le q \le 1$ ، $c = -1, 0, 1$) صادق در شرط $L_k x = Ax + b$ است که در آن L_k عملگر خطی شده‌ی وردش اول $(k+1)$−مین خمیدگی میانگین ابررویه، A یک ماتریس با درایه‌های حقیقی، b یک بردار و k یک عدد صحیح نامنفی کوچکتر از n است.

در این رساله، ابررویه‌های فضافرم‌های ریمانی $\mathbb{R}^{n+1}$ ، $\mathbb{S}^{n+1}$ و $\mathbb{H}^{n+1}$ و ابررویه‌های فضاگون و زمان‌گون در فضافرم‌های لورنتزی $\mathbb{R}_1^{n+1}$ ، $\mathbb{S}_1^{n+1}$ و $\mathbb{H}_1^{n+1}$، با شرط $L_k x = Ax + b$ رده‌بندی می شود. ثابت می شود شرط لازم و کافی برای اینکه ابررویه‌ی فضاگون $x : M^n \to \mathbb{R}_1^{n+1}$ در شرط $L_k x = Ax + b$ صدق کند آن است که M^n زیرمجموعه‌ی بازی از یک ابررویه‌ی k−مینیمال ، یک ابررویه‌ی تماماً نافی یا حاصلضرب ریمانی دو ابررویه‌ی تماماً نافی باشد. رده بندی مشابهی برای ابررویه‌های زمان‌گون $x : M_1^n \to \mathbb{R}_1^{n+1}$ صادق در شرط $L_k x = Ax + b$ داده می‌شود. ابررویه‌های فضاگون و زمان‌گون در فضافرم‌های لورنتزی ناتخت $\mathbb{S}_1^{n+1}$ و $\mathbb{H}_1^{n+1}$ با شرط $L_k x = Ax + b$ ، در حالتی که k−مین خمیدگی میانگین ابررویه ثابت است و نیز در حالتی که بردار b صفر است ، بطور کامل شناسایی می شود.

واژه‌های کلیدی : ابررویه‌ی (لورنتزی، فضاگون)، k−مین خمیدگی میانگین، k−مینیمال، تبدیل‌های نیوتن، عملگر خطی‌شده، هم‌پارامتر.

فهرست

پیش گفتار

خمینه‌های شبه‌ریمانی، بویژه لورنتزی ، بدلیل داشتن کاربردهای گوناگون در ریاضیات و فیزیک مورد توجه است . هدف اصلی این رساله، شناسایی یک خانواده‌ی مهم از ابررویه‌های فضافرم‌های ریمانی و لورنتزی است. زیربنای کار بر k–خمیدگی‌های میانگین ابررویه استوار است. موضوع رساله ابررویه‌های فضاگون و زمان‌گون $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ در فضافرم‌های ریمانی و لورنتزی $\mathbb{R}_q^{n+1}$ ، $\mathbb{S}_q^{n+1}$ و $\mathbb{H}_q^{n+1}$ است که $L_k x = Ax + b$ و $0 \leq p \leq q \leq 1$. در این فرمول L_k بخش خطی وردش اول $(k+1)$–مین خمیدگی میانگین ابررویه، ناشی از وردش‌های قائم آن، A یک ماتریس ثابت و b یک بردار در $\mathbb{R}^{n+1}$ یا $\mathbb{R}^{n+2}$ است. این موضوع ریشه در قضیه‌ی معروف تاکاهاشی (۱۹۶۶) دارد که زیرخمینه‌های $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ را با شرط $\Delta x = \lambda x$ در فضای اقلیدسی مطالعه کرده است که در آن Δ عملگر لاپلاس و λ یک عدد است ([۲۰]). بنابر این قضیه، تنها زیرخمینه‌های n–بعدی M^n تعریف شده بوسیله‌ی فروبری طولپای $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ صادق در معادله‌ی $\Delta x = \lambda x$ عبارتست از زیرخمینه‌های مینیمال $\mathbb{R}^{n+m}$ (با $\lambda = 0$) و زیرخمینه‌های مینیمال یک ابرکره به شعاع $\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$ (به ازای یک $\lambda > 0$). حالت $m = 1$ بیشتر از حالت‌های دیگر مورد توجه بوده و گسترش‌های گوناگونی برای آن داده شده است. از قضیه‌ی تاکاهاشی نتیجه می‌شود هرگاه $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ یک ابررویه‌ی طولپا فروبرده شده در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ باشد، x در شرط $\Delta x = \lambda x$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر M یک ابررویه‌ی مینیمال در $\mathbb{R}^{n+1}$ (با $\lambda = 0$) یا زیرمجموعه‌ی بازی از یک ابرکره به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{\frac{n}{\lambda}}$ (با

$\lambda > ۰$) در $\mathbb{R}^{n+۱}$ باشد. در سال ۱۹۸۸، اُ. چِی. گرِی ([۱۱]) به بررسی رویه‌های متناهی—نوع پرداخت. تی. حَسنیز و دیگران ([۱۳]) با شیوه‌ای مستقل از گری زیرخمینه های متناهی—نوع را مطالعه کردند. این کارها مقدمه‌ای برای مقاله‌های بعدی گری ([۱۲]) و حسنیز و دیگران ([۱۴]) در این زمینه شد. گری ثابت کرد ابررویه‌ی $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+۱}$ در شرط $\Delta x = Ax$ (که در آن A یک ماتریس قطری است) صدق می‌کند اگر و تنها اگر M^n یک ابررویه‌ی مینیمال در $\mathbb{R}^{n+۱}$ یا زیرمجموعه‌ی بازی از یک ابرکره یا یک استوانه‌ی کروی در $\mathbb{R}^{n+۱}$ باشد. اهمیت کار گرِی در این بود که توانست بجای ضریب ثابت λ از یک ماتریس قطری دلخواه استفاده کند که در آن درایه‌های قطر اصلی لزوماً یکسان نیست. در سال ۱۹۹۰، اف. دیلن و دیگران ([۱۰]) رویه‌هایی را از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^۳$ بررسی کردند که فروبری طولپای آن در معادله‌ی $\Delta x = Ax + b$ صدق می‌کند که در آن $A \in \mathbb{R}^{۳\times۳}$ یک ماتریس (نه لزوماً قطری) و $b \in \mathbb{R}^۳$ یک بردار است. آنها ثابت کردند که چنین رویه‌ای یک رویه‌ی مینیمال در $\mathbb{R}^۳$ یا بخش بازی از یک کره یا استوانه است. این گزاره را بی. یِن چِن و دیگران ([۸]) و حسنیز و دیگران ([۱۴]) با شیوه‌های متفاوت به ابررویه‌های فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+۱}$ گسترش دادند.

از سال ۱۹۹۰ به بعد، ابررویه‌های فضافرم‌ها با شرط $\Delta x = Ax + b$ مورد توجه بوده است. بطور کلی ، در گسترش‌های قضیه‌ی تاکاهاشی ، ابتدا به ضریب λ توجه شده، درنتیجه شرط $\Delta x = \lambda x$ به شرط $\Delta x = Ax + b$ تبدیل شده است. گام بعدی در این راستا، گسترش دادن عملگر لاپلاس به عملگر L_k است. الیاس و گربوز در سال ۲۰۰۶ با مطرح کردن عملگر L_k که گسترشی از عملگر لاپلاس است ($L_۰ = \Delta$)، ابررویه‌های ریمانی $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+۱}$ را با شرط $L_k x = Ax + b$ رده بندی کردند ([۴]). آنان با اثبات ثابت بودن $H_{k+۱}$، این ابررویه‌ها را شناسایی نمودند. گام بعدی در باره‌ی شناسایی ابررویه‌های فضافرم‌های ریمانی ناتخت $\mathbb{S}^{n+۱}$ و $\mathbb{H}^{n+۱}$ صادق در شرط $L_k x = Ax + b$ (با فرض خود الحاق بودن ماتریس A) توسط الیاس و

کاشانی برداشته شد ([۵]) . آنان در حالت‌های $x : M^n \to \mathbb{S}^{n+1}$ و $x : M^n \to \mathbb{H}^{n+1}$، با فرض $L_k x = Ax + b$ و خودالحاق بودن ماتریس A، در یک لم بنیادی نشان دادند برای این ابررویه‌ها، H_k ثابت است اگر و تنها اگر H_{k+1} ثابت باشد و با استفاده از آن، در حالتی که $b = 0$ و نیز در حالتی که H_k ثابت و b ناصفر است، به رده‌بندی این ابررویه‌ها پرداختند. در این رساله ، با الهام از کارهای پیش گفته، به گسترش نتیجه‌های [۴] و [۵] برای ابررویه‌های فضاگون در فضافرم های ریمانی و لورنتزی، با شرط $L_k x = Ax + b$، در حالت کلی می پردازیم. بویژه، شرط های خودالحاق بودن ماتریس A و ناصفر بودن بردار b را حذف می‌کنیم. ثابت می شود شرط لازم و کافی برای اینکه ابررویه‌ی فضاگون $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}_1$ در شرط $L_k x = Ax + b$ صدق کند آن است که M^n زیرمجموعه‌ی بازی از یک ابررویه‌ی $k-$مینیمال ، یک ابررویه‌ی تماماً نافی یا حاصلضرب ریمانی دو ابررویه‌ی تماماً نافی باشد. گسترش بعدی، درباره‌ی ابررویه‌های لورنتزی M^n_1 در فضای مینکوفسکی $\mathbb{R}^{n+1}_1$ با شرط $L_k x = Ax + b$ است. بر این ابررویه‌ها، یک میدان برداری (موضعی) فضاگون یکه‌ی قائم N می‌گیریم. عملگر شکل وابسته به N، که با S نمایش داده می شود، در حالت کلی قطری شدنی نیست و این نکته‌ی مهم، تفاوت بنیادی بین ابررویه‌های فضاگون و ابررویه‌های لورنتزی است.

سرانجام، ابررویه‌های فضاگون و زمان‌گون در فضافرم‌های لورنتزی ناتخت $\mathbb{S}^{n+1}_1$ و $\mathbb{H}^{n+1}_1$ با شرط $L_k x = Ax + b$ ، در حالتی که $k-$مین خمیدگی میانگین ابررویه ثابت است و نیز در حالتی که بردار b صفر است ، بطور کامل شناسایی می شود.

رساله چهار فصل دارد. در فصل ۱ پیش‌نیازها آمده است. در فصل ۲ ابررویه‌های فضاگون در فضافرم‌های ریمانی و لورنتزی $x : M^n \to \tilde{M}^{n+1}_q(c)$ (که $q = 0, 1$) صادق در شرط $L_k x = Ax + b$ شناسایی می‌شود. در حالت $c = 0$، ثابت می‌شود $(k+1)-$مین خمیدگی میانگین ابررویه‌ی $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}_q$ ثابت است و M یک ابررویه‌ی هم‌پارامتر است و از این

مطلب رده‌بندی این ابررویه‌ها بدست می آید. در حالت $c = -۱, ۱$، بر ابررویه‌های فضاگون در فضافرم‌های ناتخت $x : M^n \to \mathbb{S}_q^{n+۱}$ و $x : M^n \to \mathbb{H}_q^{n+۱}$ صادق در شرط بالا، با فرض ثابت بودن H_k یا صفر بودن بردار b، ثابت می شود $H_{k+۱}$ ثابت است. درنتیجه، رده‌بندی چنین ابررویه‌هایی بدست می آید.

فصل ۳ به بررسی ابررویه‌های زمان‌گون در فضای مینکوفسکی، $x : M^n \to \mathbb{R}_۱^{n+۱}$ با شرط $L_k x = Ax + b$ می‌پردازد. با توجه به اینکه عملگر شکل چنین ابررویه‌هایی لزوماً قطری شدنی نیست، در چهار حالت ممکن برای ماتریس عملگر شکل، ثابت می‌شود $(k + ۱)$–مین خمیدگی میانگین ابررویه ثابت است. مثال‌های گوناگون از این ابررویه‌ها بررسی شده و قضیه‌ی رده‌بندی آنها ثابت می‌شود.

سرانجام، ابررویه‌های زمان‌گون در فضافرم‌های لورنتزی ناتخت $x : M_۱^n \to \tilde{M}_۱^{n+۱}(c)$ (که $c = -۱, ۱$) صادق در شرط $L_k x = Ax + b$ در فصل ۴ شناسایی می‌شود. در بخش‌های ۱ و ۲ از این فصل، به حالتی که k–مین خمیدگی میانگین ابررویه ثابت است می‌پردازیم. پس از نشان دادن ثابت بودن $(k + ۱)$–مین خمیدگی میانگین بر این ابررویه‌ها، مثال‌های گوناگون را بررسی کرده و قضیه‌های رده‌بندی را بیان و ثابت می‌کنیم. در بخش‌های ۳ و ۴ با فرض $b = ۰$ (بدون فرض ثابت بودن k–مین خمیدگی میانگین ابررویه) نتیجه‌های مشابهی برای این ابررویه‌ها بدست آمده و قضیه‌های رده‌بندی آنها بیان و ثابت می‌شود.

از این رساله سه مقاله به شرح ذیل حاصل شده است.

1- F. Pashaie and S.M.B. Kashani, *Spacelike hypersurfaces in Riemannian or Lorentzian space forms satisfying* $L_k x = Ax + b$, To appear in Bull. Irannian Math. Soc.

2- F. Pashaie, S.M.B. Kashani and M. Najafi Ivaki, *Lorentzian hypersurfaces in the Minkowski space satisfying* $L_k x = Ax + b$, Submitted.

3- F. Pashaie and S.M.B. Kashani, *Timelike hypersurfaces in Lorentzian space forms satisfying* $L_k x = Ax + b$, Under preparation.

۱

پیش نیاز ها

در این فصل، پیش‌نیازها ارائه می‌شود. فصل چهار بخش دارد. در بخش ۱، مفهوم‌های مورد نیاز از هندسه‌ی ریمانی و لورنتزی یادآوری می‌شود. در بخش ۲، دو مفهوم « تبدیل نیوتن » و « عملگر خطی‌شده‌ی $(j+1)$−مین خمیدگی میانگین ابررویه» معرفی و برخی از ویژگی‌های مهم آنها بیان و ثابت می‌شود. بخش ۳ شامل گزاره‌هایی است که در آنها فرمول‌های بنیادی مورد نیاز بیان و ثابت می‌شود. در بخش ۴، صورت برخی گزاره‌های مورد نیاز بیان می شود. مرجع‌های این فصل عبارتست از [۱۹، ۱۸، ۱۵، ۵، ۴، ۲] .

۱.۱ فضافرم و ابررویه

تعریف ۱.۱ خمینه‌ی (شبه−) ریمانی M_p^n عبارت است از یک خمینه‌ی n−بعدی هموار M مجهز به یک تانسور متریک ناتبهگون با اندیس ثابت p (بُعد هر زیرفضای زمان‌گون بیشین در هر فضای مماس). در حالت های ویژه، $M^n = M_0^n$ را خمینه‌ی ریمانی و M_1^n را خمینه‌ی لورنتزی نامند.

تعریف ۲.۱ خمینه‌ی (شبه−) ریمانی تمام و همبند M_p^n با خمیدگی برشی ثابت c را فضافرم نامند و با $M_p^n(c)$ نمایش می‌دهند. $M^n(c)$ را فضافرم ریمانی و $M_1^n(c)$ را فضافرم لورنتزی گویند.

تعریف ۳.۱ فضای برداری (یا خمینه‌ی) $\mathbb{R}^m$ با ضرب عددی (یا متریک) $<x,y>:=-\Sigma_{i=1}^{p}x_iy_i+\Sigma_{i>p}x_iy_i$ را فضای (شبه$-$) اقلیدسی نامیده و با $\mathbb{R}_p^m$ نمایش می دهند که در آن $0\leq p<m$. $\mathbb{R}_1^m$ فضای مینکوفسکی نامیده می‌شود.

مثال. فضای (شبه$-$) اقلیدسی $\mathbb{R}_p^m$ یک فضافرم تخت (با خمیدگی صفر) است. برای عدد حقیقی مثبت r ، (شبه$-$) کره‌ی $\mathbb{S}_p^{n+1}(r)=\{y\in\mathbb{R}_p^{n+2}\mid<y,y>=r^2\}$ با شعاع r و خمیدگی $\frac{1}{r^2}$ و فضای (شبه$-$) هذلولوی $\mathbb{H}_p^{n+1}(-r)=\{y\in\mathbb{R}_{p+1}^{n+2}\mid<y,y>=-r^2\}$ با شعاع r و خمیدگی $\frac{-1}{r^2}$، فضافرم های ناتخت (با خمیدگی ناصفر) است. اگر $p=0$، $\mathbb{H}_0^{n+1}(-r)$ همبند نیست و یک مولفه‌ی آن را بعنوان فضافرم در نظر می گیرند. $\mathbb{S}_1^{n+1}=\mathbb{S}_1^{n+1}(1)$ و $\mathbb{H}_1^{n+1}=\mathbb{H}_1^{n+1}(-1)$ را به ترتیب، فضاهای دسیتر و پاد$-$دسیتر نامند.

قرارداد ۱. در این رساله فضافرم‌های استاندارد $\mathbb{S}_q^{n+1}$ ، $\mathbb{H}_q^{n+1}$ و $\mathbb{R}_q^{n+1}$ با $\tilde{M}_q^{n+1}(c)$ نمایش داده می شود که c خمیدگی برشی است.

تعریف ۴.۱ هرگاه $\tilde{M}_q^{n+1}$ یک خمینه‌ی (شبه$-$) ریمانی و M_p^n یک زیرخمینه‌ی (شبه$-$)ریمانی آن باشد ($p\leq q$)، M_p^n را یک ابررویه‌ی (شبه$-$) ریمانی از $\tilde{M}_q^{n+1}$ نامند. فروبری طولپای $x:M_p^n\rightarrow\tilde{M}_q^{n+1}(c)\subset\mathbb{R}_t^{n+2}$ نمایش دیگری از ابررویه‌ی M_p^n در فضافرم $\tilde{M}_q^{n+1}(c)$ است. اگر $p=0$، ابررویه‌ی M_p^n را فضاگون (ریمانی) و اگر $p=1$، آنرا لورنتزی گویند.

قرارداد ۲. برای ابررویه‌ی $x:M_p^n\rightarrow\tilde{M}_q^{n+1}(c)\subset\mathbb{R}_t^{n+2}$، هموستار لوی$-$چیویتا بر M، $\tilde{M}$ و $\mathbb{R}_t^{n+2}$ را، به ترتیب، با ∇، $\bar{\nabla}$ و ∇° نمایش می دهیم.

تعریف ۵.۱ بر ابررویه‌ی $x:M_p^n\rightarrow\tilde{M}_q^{n+1}(c)$، برای هر دو میدان برداری هموار V و W مماس بر M، فرمول گاوس چنین است $\bar{\nabla}_VW=\nabla_VW+II(V,W)$، که در آن II فرم بنیادی

دوم ابررویه است. افزون بر آن، اگر N یک میدان برداری یکه‌ی قائم بر ابررویه باشد عملگر شکل S، وابسته به N، با معادله‌ی $< SV, W >=< II(V,W), N >$ تعریف می شود.

تعریف ۶.۱ ابررویه‌ی $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$، تماماً ژئودزیک نامیده می شود اگر فرم بنیادی دوم آن متحد با صفر باشد و تماماً نافی نامیده می شود اگر یک میدان برداری هموار قائم Z (بنام میدان برداری خمیدگی نرمال) بر M وجود داشته باشد که برای هر دو میدان برداری هموار مماس V و W، داشته باشیم $II(V,W) =< V,W > Z$.

تعریف ۷.۱ بر ابررویه‌ی فضاگون $x : M^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ در فضافرم ریمانی یا لورنتزی $\tilde{M}_q^{n+1}(c)$ (با $q = ۰, ۱$)، هر میدان برداری یکه‌ی مماس را که در هر نقطه از M یک بردار ویژه‌ی عملگر شکل S وابسته به یک میدان برداری یکه‌ی قائم N باشد، یک جهت (امتداد) اصلی و نگاشت (مقدار ویژه‌ی) متناظر را یک خمیدگی اصلی M نامند. هرگاه S بر M (یا زیرمجموعه‌ی بازی از آن) قطری شدنی و $\kappa_۱$، ...،κ_n خمیدگی‌های اصلی M باشد، برای هر عدد صحیح j ($۱ \leq j \leq n$)، j−مین خمیدگی میانگین M که با H_j نمایش داده می شود با فرمول $\binom{n}{j} H_j = (-\epsilon)^j s_j$ تعریف می شود که در آن $s_j := \sum_{۱\leq i_۱<...<i_j\leq n} \kappa_{i_۱}...\kappa_{i_j}$ و $\epsilon = - < N, N >$.

تعریف ۸.۱ ابررویه‌ی فضاگون $x : M^n \to \mathbb{R}_q^{n+1}$ را j−مینیمال گویند اگر $H_{j+۱}$ بر M متحد با صفر باشد.

یادآور می شویم که، چند جمله‌ای مشخصه عملگر شکل قطری شدنی S، بصورت $Q_S(t) = det(tI - S) = \sum_{l=۰}^{n} (-۱)^{n-l} s_{n-l} t^l,$ است.

اکنون، به حالت ابررویه زمان گون در فضافرم لورنتزی می‌پردازیم.

تعریف ۹.۱ پایه‌ی $\{e_i\}_{i=۱}^n$ برای یک فضای برداری لورنتزی $\mathbb{V}_۱^n$ را یکامتعامد نامند اگر برای هر دو عدد طبیعی i,j نابیشتر از n، $< e_i, e_j >= \epsilon_i \delta_i^j$ که در آن $\epsilon_۱ = -۱$ و برای هر $i \geq ۲$، $\epsilon_i = ۱$. آنرا شبه−یکامتعامد نامند اگر $< e_۱, e_۱ >=< e_۲, e_۲ >= ۰$، $< e_۱, e_۲ >= -۱$ و برای هر $i \geq ۳$ و $j \geq ۱$، $< e_i, e_j >= \delta_i^j$.

تعریف ۱۰.۱ نگاشت خطی $T:\mathbb{V}_1^n\to\mathbb{V}_1^n$ را یک عملگر خودالحاق نامند اگر برای هر $v,w\in\mathbb{V}_1^n$، $<Tv,w>=<v,Tw>$.

با انتخاب پایه‌ی مناسب، نمایش ماتریسی یک عملگر خودالحاق $T:\mathbb{V}_1^n\to\mathbb{V}_1^n$ به صورت یکی از چهار ماتریس $B_1=D_n$، $B_2=\begin{pmatrix}\kappa & \lambda & \\ -\lambda & \kappa & \\ & & D_{n-2}\end{pmatrix}$، $(\lambda\neq 0)$ $B_3=\begin{pmatrix}\kappa+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ -\frac{1}{2} & \kappa-\frac{1}{2} & \\ & & D_{n-2}\end{pmatrix}$, و $B_4=\begin{pmatrix}\kappa & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ 0 & \kappa & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \kappa & \\ & & & D_{n-3}\end{pmatrix}$ می باشد([۱۵])، که D_j برای هر عدد صحیح مثبت j، ماتریس قطری $diag[\lambda_1,...,\lambda_j]$ را نمایش می‌دهد.

برای تعریف H_j، در هر یک از چهار حالت اخیر ، κ_i ها را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۱ بر ابررویه‌ی لورنتزی $x:M_1^n\to\tilde{M}_1^{n+1}(c)$، یک میدان برداری فضاگون یکه قائم N (احتمالا موضعی) در نظر می‌گیریم. نمایش ماتریسی عملگر شکل S وابسته به N ، نسبت به یک کنج شبه یکامتعامد مناسب ،به صورت یکی از ماتریس های B_i $(i=1,...,4)$ است.

خمیدگی‌های اصلی κ_1، κ_2، ... ، κ_n بر ابررویه را چنین تعریف می‌کنیم: در هر نقطه $p\in M$،

اگر $[S_p]=B_1$، برای هر i، می‌گیریم $\kappa_i(p)=\lambda_i(p)$،

اگر $[S_p]=B_2$، $\kappa_1(p)=\kappa(p)+i\lambda(p)$، $\kappa_2(p)=\kappa(p)-i\lambda(p)$ و $\kappa_i(p)=\lambda_{i-2}(p)$ برای هر $i\geq 3$،

اگر $[S_p]=B_3$، $\kappa_1(p)=\kappa_2(p)=\kappa(p)$ و $\kappa_i(p)=\lambda_{i-2}(p)$ برای هر $i\geq 3$،

و اگر $[S_p]=B_4$، $\kappa_i(p)=\kappa(p)$ برای $i\leq 3$ و $\kappa_i(p)=\lambda_{i-3}(p)$ برای هر $i\geq 4$.

بر ابررویه‌ی لورنتزی $x:M_1^n\to\tilde{M}_1^{n+1}(c)$، j–مین خمیدگی میانگین M با فرمول $\binom{n}{j}H_j=s_j$ تعریف می شود که در آن $s_j:=\sum_{1\leq i_1<...<i_j\leq n}\kappa_{i_1}...\kappa_{i_j}$. چند جمله ای مشخصه‌ی عملگر شکل،

$$Q_p(t)=\prod_{i=1}^n(t-\kappa_i(p))=\sum_{l=0}^n(-1)^{n-l}s_{n-l}(p)t^l,$$

مانند حالت ابررویه‌ی فضاگون است.

تعریف ۱۲.۱ ابررویه‌ی فضاگون یا زمان‌گون در فضافرم ریمانی یا لورنتزی $x : M_p^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c)$ ($0 \leq p \leq q \leq 1$) با یک میدان برداری یکه‌ی قائم N و عملگر شکل S وابسته به آن، هم‌پارامتر نامیده می‌شود اگر همه‌ی ضریب‌های چندجمله‌ای مینیمال عملگر شکل بر M ثابت باشد.

۲.۱ عملگرهای P_j و L_j

تعریف ۱۳.۱ برای ابررویه‌ی M_p^n در فضافرم $\tilde{M}_q^{n+1}(c)$ ($0 \leq p \leq q \leq 1$) با میدان برداری یکه‌ی قائم N و عملگر شکل S وابسته به آن، تبدیل‌های نیوتن $P_j : \chi(M) \to \chi(M)$ وابسته به عملگر شکل S، به شیوه‌ی استقرائی

$$P_0 = I, \quad P_j = (-\epsilon)^j s_j I + \epsilon S \circ P_{j-1}\ , \quad (j = 1, ..., n)$$

تعریف می شود که در آن I نگاشت همانی بر مجموعه‌ی میدان های برداری هموار مماس بر ابررویه است و $\epsilon = -< N, N >$. P_j دارای فرمول صریح

$$P_j = (-\epsilon)^j \sum_{l=0}^{j} (-1)^l s_{j-l} S^l = \sum_{l=0}^{j} \binom{n}{j-l} (\epsilon)^l H_{j-l} S^l$$

است که در آن $H_0 = 1$ و $S^\circ = I$.

عملگر P_j خودالحاق است و با S جابجا می شود. بر ابررویه‌ی فضاگون در هر نقطه‌ی $p \in M$، $S(p)$ و $P_j(p)$ همزمان قطری شدنی است ولی بر ابررویه‌ی زمان‌گون در حالت کلی چنین نیست. با استفاده از چندجمله‌ای مشخصه‌ی S و قضیه‌ی کیلی–همیلتون از جبر خطی ([۱۶])، داریم $P_n = 0$. (قضیه‌ی کیلی–همیلتون: اگر $\bar{A}$ یک ماتریس مربعی با چندجمله‌ای مشخصه‌ی $Q(t)$ باشد، داریم $Q(\bar{A}) = 0$.)

بر ابررویه‌ی فضاگون، نمایش ماتریسی عملگر P_j نسبت به پایه‌ی یکامتعامد $\{e_i\}_{i=1}^n$ متشکل از جهت های اصلی ابررویه، قطری است و برای هر i ($1 \leq i \leq n$) داریم $P_j e_i = \mu_{i,j} e_i$ که در

آن

$$\mu_{i,j} := (-\epsilon)^j \sum_{i_1<...<i_j, i_l \neq i} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_j}, \quad (i = 1, ..., n; j = 0, 1, ..., n-1)$$

و با استفاده از تعریف H_j و $\mu_{i,j}$ به آسانی می توان درستی اتحاد پایین را بررسی کرد

$$\epsilon\kappa_i\mu_{i,j} = \mu_{i,j+1} - (-\epsilon)^{j+1}s_{j+1} = \mu_{i,j+1} - \binom{n}{j+1}H_{j+1}. \tag{1}$$

در گزاره‌ی بعد، با الهام از مرجع‌های [۴] و [۵] برخی از ویژگیهای مهم تبدیل نیوتن بیان و ثابت می‌شود.

گزاره ۱۴.۱ فرض کنید $x : M^n \to \tilde{M}_q^{n+1}(c) \subset \mathbb{R}_t^{n+1+|c|}$ یک ابررویه‌ی فضاگون جهت‌پذیر همبند در فضافرم $\tilde{M}_q^{n+1}(c)$ باشد که در آن $c \in \{-1, 0, 1\}$، $q \in \{0, 1\}$ و $t := q + (1/2)(|c| - c)$، N یک میدان برداری یکه‌ی قائم بر ابررویه ، S عملگر شکل وابسته به N و $\{e_i\}_{i=1}^n$ پایه‌ی یکامتعامد جهت های اصلی M باشد و $c_j = (n-j)\binom{n}{j} = (j+1)\binom{n}{j+1}$، داریم

(آ) $tr(P_j) = (-\epsilon)^j(n-j)s_j = c_jH_j$ ؛

(ب) $tr(P_j \circ S) = (-\epsilon)^j(j+1)s_{j+1} = -\epsilon c_jH_{j+1}$ ؛

(پ) $tr(P_j \circ S^2) = \binom{n}{j+1}[nH_1H_{j+1} - (n-j-1)H_{j+2}]$ ؛

(ت) $tr(P_j \circ \nabla_X S) = -\epsilon\binom{n}{j+1} < grad(H_{j+1}), X >$ برای هر $X \in \chi(M)$؛

(ث) $\sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i}S)(P_{j-1}e_i) = -\epsilon\binom{n}{j}grad(H_j)$.

برهان. (آ) بنابر تعریف $\mu_{i,j}$ و H_j، داریم

$$tr(P_j) = \sum_{i=1}^n \mu_{i,j} = \sum_{i=1}^n (-\epsilon)^j \sum_{i_1<...<i_j, i_l\neq i} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_j}$$
$$= (-\epsilon)^j(n-j)\sum_{i_1<...<i_j} \kappa_{i_1}...\kappa_{i_j} = (-\epsilon)^j(n-j)s_j = c_jH_j.$$

(ب) بنابر تعریف $\mu_{i,j}$ و H_j ، اتحاد(۱) و فرمول c_j، داریم

$$tr(P_j \circ S) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \mu_{i,j} = \epsilon \sum_{i=1}^{n} [\mu_{i,j+1} - \binom{n}{j+1} H_{j+1}]$$

$$= \epsilon[tr(P_{j+1}) - n\binom{n}{j+1} H_{j+1}] = \epsilon[c_{j+1} - n\binom{n}{j+1}] H_{j+1} = -\epsilon c_j H_{j+1}.$$

(پ) بنابر تعریف $\mu_{i,j}$ و H_j ، اتحاد(۱) و فرمول c_j، داریم

$$tr(P_j \circ S^2) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \mu_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i(\kappa_i \mu_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \epsilon [\mu_{i,j+1} - \binom{n}{j+1} H_{j+1}]$$

$$= \epsilon tr(P_{j+1} \circ S) - \epsilon \binom{n}{j+1} H_{j+1}(-\epsilon n H_1) = -c_{j+1} H_{j+2} + n\binom{n}{j+1} H_{j+1} H_1$$

$$= \binom{n}{j+1}[n H_1 H_{j+1} - (n-j-1) H_{j+2}].$$

(ت) بنابر تعریف $\mu_{i,j}$ و H_j و خودالحاق بودن S , P_j، داریم

$$tr(P_j \circ \nabla_X S) = \sum_{i=1}^{n} < (P_j \circ \nabla_X S) e_i, e_i >= \sum_{i=1}^{n} < (\nabla_X S) e_i, P_j e_i >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} < (\nabla_X S) e_i, e_i >= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} < \nabla_X (S e_i) - S(\nabla_X e_i), e_i >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} [< \nabla^{\circ}_X (\kappa_i e_i), e_i > - < \nabla^{\circ}_X e_i, \kappa_i e_i >] = \sum_{i=1}^{n} \mu_{i,j} < grad(\kappa_i), X >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < grad(\kappa_i), X > (-\epsilon)^j \Sigma_{i_1 < \ldots < i_j, i_l \neq i} \kappa_{i_1} \ldots \kappa_{i_j} = (-\epsilon)^j < grad(s_{j+1}), X >$$

$$= -\epsilon \binom{n}{j+1} < grad(H_{j+1}), X > .$$

(ث) بنابر معادله کودازی ([۱۸]، ص ۱۱۵) برای هر دو میدان برداری X, Y مماس بر ابررویه، داریم $(\nabla_X S) Y = (\nabla_Y S) X$. بنابراین، با استفاده از خودالحاق بودن $\nabla_{e_i} S$ و P_j، برای هر میدان برداری X مماس بر ابررویه، داریم

$$\sum_{i=1}^{n} < (\nabla_{e_i} S)(P_{j-1} e_i), X >= \sum_{i=1}^{n} < P_{j-1} e_i, (\nabla_{e_i} S) X >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} < P_{j-1} e_i, (\nabla_X S) e_i >= tr(P_{j-1} \circ \nabla_X S) = -\epsilon \binom{n}{j} < grad(H_j), X > .$$

■

برای ابررویه‌ی زمان گون $x : M_1^n \to \tilde{M}_1^{n+1}(c)$، با استفاده از مقدارهای $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$، که در چهار حالت مختلف ممکن برای ماتریس عملگر شکل ابررویه تعریف شده است، نماد $\mu_{j_1, \ldots, j_t; k}$ را بصورت