دانشکده علوم پایه

تناوب و آشوب

نگارش:

سامان جاویدنیا

استادراهنما:

سرکار خانم دکتر اکبری

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر کمالی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشتهی ریاضی محض

بهمن ماه ۸۹

بسم الله الرحمن الرحيم

پیوست ۳

باسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب سارا شیروین معتهد می‌شوم کــــه مطالب منـــــدرج در ایــن پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستــاوردهای پژوهشی دیگــران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقـــررات ارجاع و در فهرست منــابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه/رساله قبلاً برای احراز هیچ مـدرک هم سطـح یا بالاتر ارایه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام و نام خانوادگی دانشجو
سارا شیروین
امضاء

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی
مدیریت تحصیلات تکمیلی

شماره:
تاریخ:
پیوست:

تأییدیه انجام اصلاحات توسط اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد *

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **سامان جاوید نیا** تحت عنوان **تناوب آشوب**، را از نظر فرم و محتوی بررسی نموده وپذیرش آنرا برای تکمیل درجه‌کارشناسی ارشدتایید می‌کنند.

اعضاء	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
استاد راهنما	دکتر منیره اکبری	استادیار	
استاد مشاور	دکتر فرحبخش کمالی‌خمسه	استادیار	
استاد داور داخلی	دکتر فرزانه نوروزی	استادیار	
استاد داور خارجی	دکتر مریم ربیعی‌کلورزی	استادیار	
نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر علی زعیم‌باشی	استادیار	

*این فرم در مورد پایان‌نامه هایی است که به طور مشروط، با انجام اصلاحات مورد تایید قرار گرفته است. لذا این فرم پس از انجام اصلاحات تکمیل و تایید می گردد.

** لازم به ذکر است که قبل از صحافی پایان‌نامه بایستی نظر مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه در خصوص ساختار نگارش پایان‌نامه اخذ شود.

ساختار نگارش پایان‌نامه مطابق آیین‌نامه دانشگاه بوده و نسخه پیوست جهت چاپ و صحافی تایید می‌شود.

کارشناس تحصیلات تکمیلی دانشگاه

امضاء

(فرم شماره ۲۰)

دانشکده علوم پایه

تناوب و آشوب

نگارش:

سامان جاویدنیا

استادراهنما:

سرکار خانم دکتر اکبری

استاد مشاور:

سرکار خانم دکتر کمالی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشتهی ریاضی محض

بهمن ماه ۸۹

چکیده

تکرارهای نگاشتهای مختلف روی یک بازه گاهی رفتارهای متناوب و گاهی رفتارهای غیر متناوب و آشوبناک از خود نشان میدهند. پس از معرفی مفهوم تناوب و رباینده ، ربایندههای خانوادهی درجهی دو را معرفی میکنیم. ربایندهها به عنوان مجموعه نقاط حدی مدارهای مختلف مورد بررسی قرار می - گیرند. سپس مفهوم آشوب را معرفی کرده و به بررسی شرایط معادل میپردازیم. در نهایت یکتایی رباینده در خانوادهی هاسل و ریکر را بررسی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی: تناوب، رباینده، آشوب، مدلهای جمعیتی

فهرست

مقدمه... الف

بخش اول: مفهوم تناوب.. ۱

خانوادهی یک پارامتری از توابع درجه دوم.................................... ۷

نمودار انشعاب در خانوادهی درجه دوم...................................... ۸

ترتیب شارکوفسکی.. ۹

بخش دوم: ربایندهها و ربایندههای خانوادهی درجه دوم.......................... ۱۲

رباینده... ۱۳

مدار رباینده.. ۱۵

ربایندهی متریک... ۱۶

مشتق شوارتزی.. ۱۸

ربایندههای خانوادهی درجه دوم... ۲۰

بخش سوم: آشوب.. ۲۶

وابستگی حساس به شرایط اولیه.. ۲۷

اثر پروانهای.. ۲۹

وجود رباینده و وابستگی حساس به شرایط اولیه................................ ۳۰

معرفی عدد لیاپانوف... ۳۰

تعدی توپولوژیک.. ۳۴

چگال بودن نقاط تناوبی... ۳۸

تعریف دِونی از آشوب.. ۳۹

تعریف دِونی از حساسیت به شرایط اولیه....................................... ۴۰

بخش چهارم: یگانگی ربایندهها در دینامیکهای جمعیتی........................ ۴۵

خانوادهی ریکر.. ۴۶

خانوادهی هاسل... ۴۷

نگاشتهایی با ربایندههای تناوبی در فضای پارامتر.............................. ۵۰

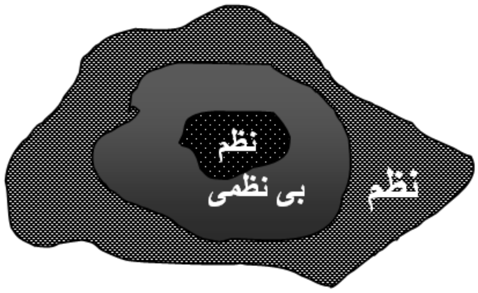
منابع.. ۵۱

پیشگفتار

دانشمندان قبلاً معتقد بودند معلول‌ها به صورت خطی ، برآیند علتهای خاصی هستند. اکنون آن‌ها به نقش خلاقانه بی‌نظمی و آشوب[1] تاکید کرده و جهان را مجموعه‌ای از سیستم‌هایی می‌دانند که به شیوه‌های خودسازمانده عمل کرده و تصادفی و در عین حال منظم هستند. این در شرایطی است که این سیستم‌ها از نظم به بی‌نظمی و از بی‌نظمی به نظم ختم می‌شوند. این تئوری متناقضنما، نظریه‌ی آشوب است که با تناوب عجین است و ما به آن خواهیم پرداخت.

اصولاً هر پدیده درجهان دارای نظمی است و ممکن است در آن بینظمی نیز دیده شود. اما هر بینظمی بخشی از نظمی گستردهتر و عمیقتر است.

به عنوان مثال؛ زمان و مکان حرکت دقیق مهاجرت پرندگان، یک بینظمی است. اما هر دسته از پرندگان به طور منظم با هم مهاجرت میکنند. این در حالی است که حرکت هر پرنده در طول مهاجرت، به تنهایی نامنظم است!



ممکن است شما به یک ارکستر موسیقی بروید و از گوش دادن به موسیقی لذت فراوانی ببرید. اما اگر به تکتک نت‌ها، سکوتها یا سازها به دقت گوش دهید ، ممکن است آن چنان جذابیتی نداشته باشد. این درحالی است که همین نت‌های نامنظم، هنگامی که در کنار هم قرار می‌گیرند، آن موسیقی منظم و زیبا را میسازند.

سیستمهای دینامیکی نام گرایشی از ریاضیات است که به بررسی چنین موضوعاتی میپردازد. برخی از بخشهای گوناگون این شاخه از علم ریاضی، عبارتند از: سیستمهای دینامیکی خطی و غیر خطی ، سیستمهای دینامیکی گسسته و پیوسته(معادلات دیفرانسیل)، نظریه‌ی انشعاب و نظریه‌ی آشوب.

تا چند دههی پیش ، دانشمندان، جهان را مجموعهای از سیستمهای منظمی میدانستند که مطابق با قوانین جبری طبیعت، به طریقی کاملا مشخص و قابل پیش بینی درحرکت است . اما با پیشرفت علم بسیاری از رویدادهای طبیعی ، دیگر قابل توجیه به وسیلهی دیدگاههای منظمبین جهان، نبودند. تلاشهای دانشمندان برای توصیف چنین رویدادهایی منتج به نظریه‌ی کوانتوم و نظریه‌ی نسبیت در فیزیک و نظریهی آشوب[2] در ریاضیات شد.

ریشه لغوی آشوب به کلمه رومی «کائوس» [3] بر میگردد که مفهوم آن متعلق به شاعر روم باستان به نام «اوید» [4] است. به نظر اوید کائوس، بینظمی و ماده بیشکل اولیه است که دارای فضا و بعد نامحدودی بود و قبل از جهان منظم شکل گرفت. سپس خالق هستی، جهان منظم را از آن ایجاد نمود.

---

[1] Chaos
[2] Chaos Theory
[3] Kaous
[4] Owid

پیدا کردن ریشه آن چه که در حال حاضر به آن نظریه آشوب میگوییم دشوار است، اما میتوان گفت که آشوب از مجموع چندین شاخه از علوم ساخته شد که به ظاهر هیچ ارتباطی به یکدیگر نداشتند.

از جملهی دانشمندان سرشناسی که در این زمینه کارهای قابل توجهی انجام دادهاند میتوان به افراد زیر اشاره کرد:

لیاپونوف: زمانی که مشغول مطالعه سیستم های دینامیکی بود یک روش کمی برای تحلیل ویژگی پایا[5] این سیستمها به نام «حساسیت به شرایط اولیه» ارائه داد.

پوانکاره: طبق نظر پوانکاره سیستمهای پیچیده[6] میتوانند رفتار منظمی از خود نشان دهند.

ادوارد لورنتز در یک تلاش بیهوده برای مدل سازی شرایط آب و هوا، معروفترین سمبل آشوب را کشف کرد: ربایندهی لورنتز[7].

مایکل فایگنباوم، می و یورک: ایدههای گذشته را جمعآوری کردند تا بتوانند اصول یک نظریه کاربردی را پایهریزی کنند و عنوان نظریهی آشوب را برای آن برگزیدند.

ژولیا و فاتو: معادلهی سادهای را پیدا کردند که اشکال هندسی بینهایت پیچیدهای را تولید میکرد و این کار مبنای تحقیقات مندلبروت شد و او این اشکال هندسی را فراکتال[8] نامید.

آشوب در لغت به معنی درهم ریختگی است و معمولاً در محاورات روزمره، نشانهی بی نظمی و سازمان نیافتگی بوده و جنبهی منفی دربردارد. اما با پیدایش نگرش علمی به این مفهوم، امروزه آشوب به مفهوم سازمان نیافتگی، ناکارائی و درهم ریختگی تلقی نمیشود ؛ بلکه نوعی نظم در بینظمی یا بینظمی در نظم در نظر گرفته میشود. انگاره ی اصلی و کلیدی تئوری آشوب همین عبارت «نظم در بی نظمی» است. به این معنا که نباید نظم را تنها در یک مقیاس کوچک جستجو کرد. پدیدهای که در مقیاس محلی، کاملاً تصادفی ، بینظم و غیرقابل پیش بینی به نظر میرسد ، چه بسا در مقیاس بزرگتر، کاملا قابل پیش بینی باشد.

در ریاضیات نظریهی آشوب به بررسی رفتار سیستمهای خاصی میپردازد که حساسیت زیادی نسبت به شرایط اولیه -ی خود دارند. نتیجهی این حساسیت نسبت به شرایط اولیه ، میتواند منجر به بروز رفتارهای بسیار پیچیده ، تصادفی و غیر قابل پیش بینی شود.

جالب اینجاست که این رفتار آشوبناک و حساس به شرایط اولیه، حتی در سیستمهای تعینی[9] هم دیده میشود که گاهی در دراز مدت رفتار آشوبناکی از خود نشان میدهند؛ چه بسا این سیستم که به ظاهر معین و قابل پیشبینی است، بخشی از یک سیستم نامعین و غیر قابل پیشبینی باشد!

تا قبل از توسعهی نظریهی آشوب ، در اکثر علوم برای یک پدیده، وزن یکسانی از نظر تاثیرگذاری عوامل درونی و بیرونی در نظر گرفته میشد . در حالی که تئوری آشوب، نقش کلیدی *شرایط اولیه* را مشخص نمود. اگر تغییر در شرایط

---

[5] Invariant Feature
[6] Complex systems
[7] Lorentz Attractor
[8] Fractal
[9] Deterministic system : سیستمهایی که درگیر هیچ پارامتر یا ورودی تصادفی نیستند.

اولیه موجب تغییر اندکی در نتیجه ش ود، گوییم رخداد نسبت به شرایط اولیه پایدار است. در این حالت قرار دادن مقدار تقریبی به جای مقدار واقعی مشکلی ایجاد نمیکند. بعضی رخدادها آن قدر نسبت به شرایط اولیه حساس هستند که حتی به کار بردن مقدار تقریبی با دقت چندین رقم اعشار هم ممکن است منجر به نتیجهای متفاوت با مقدار واقعی شود. حساسیت نسبت به شرایط اولیه پیش بینی رفتار فرآیند را در زمانهای طولانی عملاً غیر ممکن میکند .

رفتارهای آشوبناک، هم در آزمایشگاه و هم در دنیای واقعی به وفور یافت میشوند. در آزمایشگاهها سیستمهای مبتنی بر مدارهای الکتریکی، لیزر، واکنشهای شیمیایی، دینامیک سیالات و ابزارهای مکانیکی و الکترومغناطیسی همه و همه مواردی هستند که حاوی پدیدههای آشوبناک هستند. رخدادهای دنیای واقعی نیز حاوی این گونه رفتارهایند. میدان مغناطیسی اجرام سماوی، ارتعاشات مولکولی، رشد جمعیت، وضع آب و هوا، فرآیندهای زمین شناسی و دورههای اقتصادی و تکرارهای تاریخ نمونههایی از این نوع هستند. اولین کسی که با خاصیت آشوب برخورد کرد هادامارد[۱۰] بود. در سال ۱۸۹۸ وقتی روی سیستمی مبتنی بر سر خوردن ذرات روی سطحی بدون اصطکاک و با خمیدگی ثابت کار میکرد ، به این نتیجه رسید که این سیستم نسبت به شرایط اولیه بسیار حساس است. بعد از او پوانکاره بود که در سال ۱۹۰۰ وقتی داشت روی مسئلهی سه جرم(ماه، زمین و خورشید) کار میکرد متوجه شد که این مسئله توسط قوانین نیرو و حرکت نیوتن و قوانین کپلر قابل حل نبوده و یک رفتار آشوبناک دارد. مسألهی سه جرم به بررسی چگونگی رفتار، مسیرهای حرکت و سرعت حرکت اجرامی میپردازد که به طور متقابل بر یکدیگر تاثیر میگذارند. در مورد ماه، زمین و خورشید تاثیر متقابل همان نیروی گرانشی است.

مطالعات بعدی در رابطه با نظریهی آشوب تحت عناوین مرتبط با سیستمهای دینامیکی غیر خطی توسط دانشمندان متعددی[۱۱] انجام گرفت که بیشتر این مطالعات متاثر از مسائل فیزیک بود. پس از سال ۱۹۵۰ توسعهی نظریه آشوب سرعت بیشتری گرفت ؛ زیرا دانشمندان میدیدند که تئوری خطی در بسیاری از موارد ب ه سادگی نمیتواند رفتارهای مشاهده شده در آزمایشات را توجیه کند. در کنار این مسئله ، ظهور کامپیوتر نیز کمک شایانی به رشد تئوری آشوب نمود . بسیاری از مسائل تئوری آشوب درگیر تکرارهای بسیار زیاد یک فرمول سادهی ریاضی است و محاسبهی آنها ب ه طور دستی یا با ماشین حسابی ساده تقریباً غیرممکن است. ولی کامپیوتر با یک برنامهی ساده، میتواند این محاسبات را در زمان کم و با دقت بالا انجام دهد.

ادوارد لورنتز استاد دانشگاه ام.آی.تی[۱۲] از پیشگامان نظریهی آشوب و نخستین کسی بود که در مورد تئوری آشوب مقاله نوشت. وی روزی در سال ۱۹۶۱ هنگامی که در حال کار با کامپیوتری بود که برای بررسی مدلهای پیش بینی هوا به کار میرفت، به طور اتفاقی متوجه شد که وقتی دادهها را با دقت ۶ رقم اعشار به کامپیوتر میدهد ، نتیجهای کاملاً متفاوت با وقتی میگیرد که دادهها را با دقت ۳ رقم اعشار وارد رایانه میکند. همین مسئله کنجکلوی او را به تحقیق در مورد این پدیده برانگیخت.

ماجرای جالبی نیز در مورد حساسیت آب و هوا نسبت به شرایط اولیه وجود دارد. تعدادی از دانشمندان هواشناسی مشغول مطالعهی تغییرات شرایط جوی و تأثیرات آن بر هوای جهان و منطقه داشتند. آنان به مدت یک سال مشغول مطالعهی هوای یک منطقهی خاص بودند که دارای آب و هوای نسبتاً بی تغییر و کاملاً معتدل بود. آنان تمامی تغییرات را ثبت می کردند. یک دستگاه ثبت نمودار تغییرات جوی هر روز ر أس ساعت ۶ صبح روشن میشد و نمودار تغییرات را تا ۶

[10] Hadamard
[11] Birkhoff Kolmogorov - Stephen Smale - Littlewood - Cartwright
[12] MIT

بعد از ظهر ثبت میکرد. اما در یکی از روزهای پاییز ناگهان نمودار این تغییرات به طرز عجیبی عوض شد و نموداری مغشوش به ثبت رسید که نشانهی بروز تغییرات شدید جوی بود. اما آن چه به چشم دیده میشد ، چیز دیگری بود. در واقع هیچ تغییر قابل ملاحظهای مشاهده نمی‌شد. این دانشمندان سعی کردند تا دلیل این تغییر را دریابند . ولی متوجه چیز ی نشدند. پس از پاییز همه چیز دوباره عادی شد. این امر آنان را بر آن داشت تا یک سال دیگر مطالعات خود را در آن محل ادامه دهند. در پاییز سال بعد آنها همه چیز را تحت نظر داشتند. در این سال نتیجهی مشاهدات خود را پیدا کردند. در نزدیکی آن محل دریاچهای بود که گروهی از پرندگان مهاجر در پاییز به آنجا میرفتند. آن چه باعث تغییر شدید در نمودار میشد همین پرندگان بودند. پرواز دسته جمعی این پرندگان باعث میشد تا حرکت بالهای شان فشاری بر جو وارد ساخته و این فشار به مولکولهای کناری هوا منتقل میشد و در نهایت به حسگر ثبت نمودار دستگاه میرسید. یکی از دانشمندان، بر آن شد که بداند اگر این پرندگان آنجا نبودند چه می شد. وی با استفاده از یک برنامه کامپیوتری موقعیت منطقه را شبیه سازی کرد و برنامه را یک بار با حضور پرندگان و بار دیگر بدون حضور آنان اجرا کرد. هنگامی که پرندگان وجود داشتند کامپیوتر، شرایط را همان طور که در واقعیت بود ، نشان داد. اما بدون حضور پرندگان طوفانی بزرگ در منطقه شکل می - گرفت که باعث تخریب حدود ۱۲ هکتار از زمینهای آن منطقه میشد. در حقیقت پر زدن آن پرندگان باعث میشد که شرایط شکل گیری این طوفان پیش نیاید ! پس از مطالعات جدیتر و عمیقتر و شبیهسازی جو جهان ، دانشمندان به نتیجهای رسیدند که مهمترین شعار نظریهی آشوب نام گرفت : پروانهای در برزیل بال میزند و گرد بادی در تگزاس شکل میگیرد . عبارت اثر پروانهای[13] که اشاره به همین جمله دارد، اولین بار توسط ادوارد لورنتز به‌کار رفته است.

در سیستمهای دینامیکی آشوبناک معمولاً نوعی شباهت بین اجزا و کل ، قابل تشخیص است. بدین ترتیب که هر جزئی از الگو همانند و متشابه کل آن می‌باشد. این خاصیت را خود متشابهی[14] مینامیم. □

[13] Butherfly effect
[14] Self Similarity

فصل اول:

تناوب

فرض کنید $\mathbf{f : I \to I}$ یک نگاشت $\mathbf{C^1}$(نگاشت پیوسته و مشتق پذیر) بوده و $\mathbf{I}$ یک بازهی بسته باشد.

تعریف۱–۱: مدار پیشرو نقطهی $\mathbf{x}$ تحت تابع $\mathbf{f}$ که به اختصار مدار $\mathbf{x}$ نامیده میشود، مجموعهی نقاط

$$\mathbf{x\,, f(x)\,,\ f(f(x))\ , f(f(f(x)))\ ,\ldots}$$

است که با نماد $\mathbf{O(x)}$ نشان داده میشود.

قرار داد:

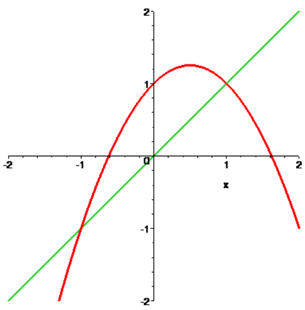
$$\begin{cases} \mathbf{f^{1}(x) = f(x),} \\ \mathbf{f^{n+1}(x) = (f(f^{n}(x)))} \end{cases}$$

با توجه به این قرار داد، مدار نقطهی $\mathbf{x}$ را میتوان به صورت زیر نشان داد:

$$\mathbf{O(x) : x\,, f(x)\,, f^{2}(x)\,, f^{3}(x)\,,\ \ldots, f^{n}(x)\,, \ldots}$$

تعریف۱–۲: نقطهی $\mathbf{x_0}$ یک نقطهی ثابت برای نگاشت $\mathbf{f}$ است، هرگاه $\mathbf{f(x_0) = x_0}$. از لحاظ هندسی، نقاط ثابت $\mathbf{f}$، محل تقاطع نمودار $\mathbf{f}$ با خط $\mathbf{y = x}$ هستند. لذا نقاط ثابت $\mathbf{f}$، از حل معادلهی $\mathbf{f(x) = x}$ به دست میآیند.

مثال۱-۳: نقاط ثابت نگاشت $f(x)=x-x^{۲}+۱$ را بیابید.



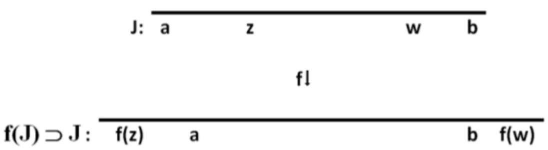
حل: برای یافتن نقاط ثابت یک نگاشت، ضابطهی آن را برابر x قرار میدهیم:

$$x-x^{۲}+۱=x \rightarrow -x^{۲}=-۱ \rightarrow x=\pm ۱$$

پس نگاشت $f(x)=x-x^{۲}+۱$ دارای دو نقطهی ثابت $x=\pm ۱$ است.

قضیه۱-۴: فرض کنید $f:I \rightarrow I$ یک نگاشت پیوسته باشد و $J=[a,b] \subseteq I$, $f(J) \supset J$، آنگاه f دارای یک نقطهی ثابت در J است. در حالت خاص نگاشت پیوستهی $f:I \rightarrow I$ دارای یک نقطهی ثابت در I است.

اثبات: چون $J=[a,b]$ و $f(J) \supset J$ وجود دارد $z, w \in J$ به طوری که $f(z)=a$ و $f(w)=b$. اگر $z=a$ یا $w=b$ حکم ثابت میشود. در غیر این صورت $z>a$ و $w<b$.



حال قرار دهید: $g(x)=f(x)-x$. در این صورت $g(z)=f(z)-z \leq a-z<۰$ و $g(w)=f(w)-w=b-w>۰$. بنابراین $g(z)g(w)<۰$. طبق قضیهی مقدار میانی نقطهای مانند p هست که $g(p)=۰$. پس $f(p)-p=۰$ و در نهایت $f(p)=p$. لذا $f:I \rightarrow I$ دارای نقطهی ثابت $x=p$ است و حکم اثبات میشود [1].

تعریف۱-۵: مجموعهی $\omega-$حدی نقطهی x تحت نگاشت $f:I \rightarrow I$ به صورت زیر تعریف میشود:

$$\omega(x)=\omega_f(x)=\{y \in I \ : \ \exists \ \{n_j\}_{j=۱}^{\infty} \ \ni: \ y=\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x)\}$$

$\omega_f(x)$ مجموعهی همهی نقاطی مانند $y \in I$ است که دنبالهای از نقاط مدار x تحت f به آن میل کند. این مجموعه در واقع نقاط حدی مدار نقطهی x است[۱].

مدار نقطهی x یا متناهی است یا نامتناهی. در هر حالت $\omega(x)$ ناتهی است.

هرگاه $\mathbf{I}$ یک مجموعه‌ی فشرده باشد، $\omega_f(x)$ همواره بسته است؛ زیرا حاوی نقاط حدی خودش است(عناصر $\omega(x)$ نقاط حدی مدار x هستند).

مثال۱-۶: وقتی $x_{\circ}$ یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $f : I \to I$ باشد، آن گاه $\omega(x_{\circ}) = x_{\circ}$؛ زیرا

$$f(x_{\circ}) = x_{\circ} \to f(f(x_{\circ})) = f(x_{\circ}) = x_{\circ}$$

لذا

$$O(x_{\circ}) : \ x_{\circ} \ , \ x_{\circ} \ , \ x_{\circ} \ , \ x_{\circ} \ , \ldots$$

مثال۱-۷: در تابع $Q_{۴}(x) = ۴x(۱-x)$ برای دو نقطه‌ی $x_{\circ} = ۰/۲۵ \ , \ ۰/۵$ ، $\omega(x_{\circ})$ را محاسبه میکنیم.

برای این کار ابتدا مدار نقطه‌ی $x_{\circ} = ۰/۲۵$ را مییابیم. داریم:

$$O_{f_{۴}}(۰/۲۵) : \ ۰/۲۵ \ , \ ۰/۷۵ \ , \ ۰/۷۵ \ , \ ۰/۷۵ \ , \ldots$$

پس $\omega(۰/۲۵) = \{۰/۷۵\}$.

حال مدار نقطه‌ی $x_{\circ} = ۰/۵$ را مییابیم. داریم:

$$O_{f_{۴}}(۰/۵) : \ ۰/۵ \ , \ ۱ \ , \ \circ \ , \ \circ \ , \ \circ \ , \ \ldots$$

پس $\omega(۰/۵) = \{\circ\}$.

گزاره۱-۸: اگر $y \in \omega(x)$ آن گاه مدار y درون $\omega(x)$ قرار دارد.

اثبات: فرض کنید $y \in \omega(x)$ آنگاه دنباله‌ی $\{n_j\}_{j=۱}^{\infty}$ چنان وجود دارد که $y = \lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x)$ لذا

$$f(y) = f(\lim_{j\to\infty} f^{n_j}(x)) = \lim_{j\to\infty} f^{n_j+۱}(x) = \lim_{j\to\infty} f^{t_j}(x) \in \omega(x)$$

به همین ترتیب و با استقرا میتوان ثابت کرد که $(\forall n \geq 1) \quad f^n(y) \in \omega(x)$. پس مدار y درون $\omega(x)$ قرار دارد[1].

مثال۱-۹: در تابع $Q_{۲/۵}(x) = ۲/۵x(۱-x)$ ، $\omega(\circ/۲)$ را محاسبه میکنیم.

برای این کار ابتدا مدار نقطه‌ی $x_{\circ} = ۰/۲$ را مییابیم. داریم:

$$O_{f_{۲/۵}}(۰/۲):\ ۰/۲,\ ۰/۴,\ ۰/۶,\ ۰/۶,\ ۰/۶,\ldots$$

پس $\omega(۰/۲)=\{۰/۶\}$. چون $۰/۶\in\omega(۰/۲)$، آنگاه $O(۰/۶)=۰/۶\in\omega(۰/۲)$.

تعریف۱-۱۰: نقطه‌ی $x_\circ$ یک نقطه‌ی تناوبی با دوره تناوب p برای نگاشت f است، هرگاه $f^p(x_\circ)=x_\circ$.

کوچکترین عدد مثبت p که $f^p(x_\circ)=x_\circ$، دوره تناوب اول نامیده میشود. $Per_p(f)$ را مجموعه نقاط تناوبی با دوره تناوب اول p و $Per(f)$ را مجموعه‌ی کلیه‌ی نقاط تناوبی f مینامیم.

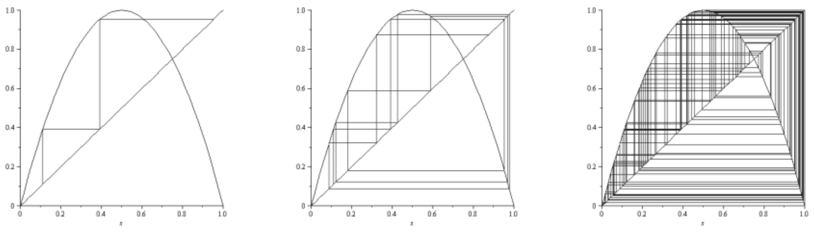
از لحاظ هندسی، نقاط تناوبی با دوره تناوب n برای f، محل تقاطع نمودار f^n با خط $y=x$ است.

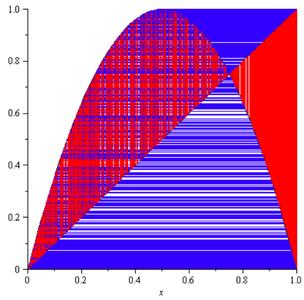
گزاره۱-۱۱: هرگاه $f:I\to I$ و $J\subset I$ و هر نقطه‌ی بازه‌ی J یک نقطه‌ی تناوبی باشد، آنگاه عدد p وجود دارد به طوری که هر نقطه‌ی J یک نقطه‌ی ثابت f^p است.

اثبات: بدون کاستن از کلیت، فرض کنید J بزرگترین زیر مجموعه‌ی همبند $Per(f)$ باشد. اگر $x\in J$ با دوره تناوب اول p باشد، آنگاه $f^p(J)\cap J\neq\phi$ و $f^p(J)\cup J\subset Per(f)$. از آنجایی که J بزرگترین زیر مجموعه‌ی همبند $Per(f)$ است، آنگاه $f^p(J)\subset J$ و $f^p(J)=J$[1].

مثال۱-۱۲: در تابع $f_۴(x)=۴x(۱-x)$ برای هر $x_\circ\in[۰,۱]$ که تناوبی نباشد، $\omega(x_\circ)$ در $[۰,۱]$ چگال است. بنابراین $\omega(x_\circ)=[۰,۱]$، زیرا $\omega(x_\circ)$ بسته است[۱].

برای بررسی این موضوع به نمودارهای زیر که مدار نقطه‌ی $x_\circ=۰/۱۱$ را مشخص میکند، توجه کنید:





از نمودارها پیداست که مدار نقطهی خاص $\mathbf{x_{\circ} = ۰/۱۱}$، تحت نگاشت $\mathbf{f_{۴}(x) = ۴x(۱-x)}$ و در واقع مدار تمام نقاط غیر تناوبی $\mathbf{x_{\circ} \in [\circ,۱]}$ در بازهی $\mathbf{[\circ,۱]}$چگال است.

مثال۱-۱۳: برای نگاشت $\mathbf{Q_{\lambda}(x) = \lambda x(۱-x)}$ وقتی $\mathbf{\lambda = ۳/۸۳۱۸۷۴۰۵۵۲۸۳۳۲}$ است، ۲۵ جملهی اول مدار $\mathbf{x_{\circ} = ۰/۱}$ به صورت زیر است:

```
.4453623244, .9465293137,  .8657516632,  .3448686650,   ,    .1
.1939371696, .5990197956, .9203972956, .2807465209, .7737623266,
.6707856034, .8462014754, .4986974802, .9579620128, .1543126138,
.5000604495, .9579684998, .1542898462, .5000001302, .9579685138,
  .5000000000 .1542897971,  .9579685138,  , .1542897971, .5000000000
```

لذا

$$.\omega_{\lambda}(۰/۱) = \{۰/۵ , ۰/۹۵۷۹۷۶۸۵۱۳۸ , ۰/۱۵۴۲۸۹۷۹۷۱\}$$

شاید به کار بردن عدد $\mathbf{\lambda = ۳/۸۳۱۸۷۴۰۵۵۲۸۳۳۲}$ با این دقت کمی تعجبآور باشد. اما در سیستمهای دینامیکی گاهی تغییرات کوچک در مقادیر اولیهی پارامترها موجب تغییرات بزرگی در مقادیر نهایی میشود.

مثال زیر همان مثال ۱-۱۳ است که تعداد ارقام اعشاری را تغییر دادهایم.

مثال۱-۱۴: برای نگاشت $\mathbf{Q_{\lambda}(x) = \lambda x(۱-x)}$ وقتی $\mathbf{\lambda = ۳/۸۳۱}$ است، ۵۰ جملهی اول مدار $\mathbf{x_{\circ} = ۰/۱}$ به صورت زیر تغییر میکنند:

```
.446075922,  .946610194,  .865460658,   .100000000,  .344790000,
.193616189,  .598130047,  .920859362,  .279193309,  .770967317,
.676465387,  .838452533,  .518908500,  .956380297,  .159817920,
.514411940,  .956954285,  .157809542,  .509161701,  .957428438,
.156148586,  .504796333,  .957661868,  .155330247,  .502637780,
.957723344,  .155114661,  .502068270,  .957733612,  .155078651,
.501973109,  .957735085,  .155073484,  .501959453,  .957735291,
.155072763,  .501957546,  .957735319,  .155072662,  .501957280,
.957735323,  .155072648,  .501957244,  .957735324,  .155072646,
```

و در حقیقت با $\lambda = ۳/۸۳۱$ ، $\omega(۰/۱)$ به صورت زیر است:

$$\omega_{\lambda=۳/۸۳۱}(۰/۱) = \{۰/۴۹۹۸۸۵۹۴۹۴, ۰/۹۵۷۷۴۹۹۵۰۲, ۰/۱۵۵۰۲۱۳۵۰۳\}$$

با مقایسه میتوان فهمید که

$$\omega_{\lambda=۳/۸۳۱۸۷۴۰۵۵۲۸۳۳۲}(۰/۱) \neq \omega_{\lambda=۳/۸۳۱}(۰/۱)$$

برای ادامهی بحث به چند تعریف زیر نیازمندیم.

تعریف۱-۱۵: نقطهی $x_\circ$ یک نقطهی تناوبی با دوره تناوب اول n، هذلولوی است، هرگاه $\left|(f^n)'(x_\circ)\right| \neq ۱$ باشد[1].

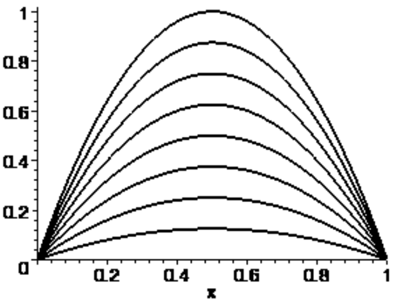
تعریف۱-۱۶: فرض کنید نقطهی $x_\circ$ یک نقطهی تناوبی هذلولوی با دوره تناوب اول n بوده و $\left|(f^n)'(x_\circ)\right| < ۱$، آنگاه نقطهی $x_\circ$ نقطهی تناوبی جاذب نامیده میشود. هرگاه $۱ < \left|(f^n)'(x_\circ)\right|$، آنگاه نقطهی $x_\circ$ نقطهی تناوبی دافع نامیده میشود [۱].

حال به معرفی خانوادهی یک پارامتری از توابع درجه دوم میپردازیم.

تعریف۱-۱۷: خانوادهی یک پارامتری از توابع درجه دوم

$$Q_\lambda(x) = \lambda x(۱-x), \qquad \circ < \lambda \leq ۴, \qquad \circ \leq x \leq ۱$$

که بازهی $I = [\circ,۱]$ را به درون خودش مینگارند، به نام خانوادهی توابع لوجستیک یا خانوادهی درجه دوم شهرت دارند. تعدادی از اعضای این خانواده روی $I = [\circ,۱]$ با $\lambda = ۰/۵, ۱, ۱/۵, \cdots, ۴$ در شکل زیر دیده میشوند.



نقاط ثابت $Q_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$: برای یافتن نقاط ثابت $Q_\lambda(x)$، معادلهی $\lambda x(1-x)=x$ را حل میکنیم.

$$\lambda x(1-x)=x \rightarrow \lambda x(1-x)-x=0 \rightarrow x(\lambda-\lambda x-1)=0$$
$$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x_\lambda=\dfrac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases}$$

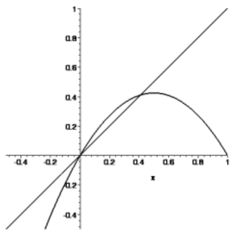
چون $Q'_\lambda(x)=\lambda-2\lambda x$، پس

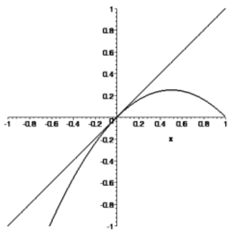
$$Q'_\lambda(0)=\lambda \quad \text{و} \quad Q'_\lambda(x_\lambda)=\lambda-2\lambda(\frac{\lambda-1}{\lambda})=2-\lambda.$$

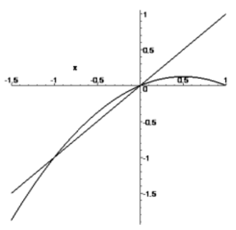
بنابراین برای $\lambda>1$ ، چون $|Q'_\lambda(0)|=\lambda>1$ آنگاه $x=0$ یک نقطهی دافع است و برای $1<\lambda<2$ ، چون $|Q'_\lambda(x_\lambda)|=|2-\lambda|<1$ آنگاه x_λ یک نقطهی جاذب است[1].

تعریف۱-۱۸: انشعاب در لغت به معنی تقسیم به دوتا شدن است. اما در مفهوم سیستمهای دینامیکی، به تغییرات خاصی گفته میشود که با تغییر پارامتر در یک خانواده رخ میدهد [3].

مثال۱-۱۹: در نگاشت $Q_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$ با تغییر پارامتر λ، وقتی λ از یک همسایگی نزدیک $\lambda=1$ میگذرد یک انشعاب رخ میدهد؛ زیرا وقتی $\lambda>1$، x_λ مثبت بوده و خانواده دو نقطه-ی ثابت $x=0$ دافع و $x_\lambda>0$ جاذب دارد. هرگاه $\lambda=1$، $x_\lambda=0$ ریشهی مضاعف معادلهی فوق است و خانواده یک نقطهی ثابت دارد. هرگاه $\lambda<1$، x_λ منفی بوده و خانواده دوباره دو نقطهی ثابت دارد، اما این بار $x=0$ جاذب و $x_\lambda<0$ دافع است[1].







نمودار Q_λ برای $\lambda>1$ — نمودار Q_λ برای $\lambda=1$ — نمودار Q_λ برای $\lambda<1$

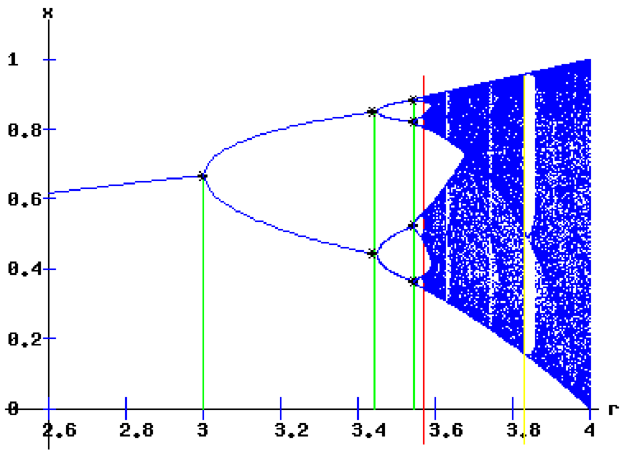
نمودار انشعاب در خانوادهی درجه دوم

در این نمودار، محور افقی، محور پارامتر λ است. در حالت کلی برای هر نقطهی دلخواه $x_0\in(0,1)$ در $\lambda=3$ یک انشعاب رخ میدهد؛ زیرا

$$f^{۲}(x) = x \rightarrow \lambda^{۲}x^{۲} - (\lambda^{۲} + \lambda)x + \lambda + ۱ = ۰$$
$$\rightarrow x = \frac{(\lambda + ۱) \pm \sqrt{(\lambda + ۱)(\lambda - ۳)}}{۲\lambda}$$

اگر $۳ > \lambda$ آنگاه $\Delta < ۰$ و نقطهی تناوبی جدید نداریم. اگر $\lambda = ۳$ آنگاه $\Delta = ۰$ و یک نقطه-ی تناوبی جدید متولد میشود. اگر $\lambda > ۳$ آنگاه $\Delta > ۰$ و دو نقطهی تناوبی جدید به وجود میآید.

با تغییر پارامتر، انشعاب دوم در $۳/۴ < \lambda_۱ < ۳/۵$ رخ میدهد. با افزایش λ همچنان که در شکل دیده میشود، تعداد انشعابها رفته رفته بیشتر و در نقاط نزدیکتر به هم رخ میدهد [۳].



بخشی از نمودار انشعاب در خانوادهی درجه دوم

ترتیب شارکوفسکی: ترتیب زیر از اعداد طبیعی را ترتیب شارکوفسکی مینامیم.

$$\begin{aligned} ۳ \rhd ۵ \rhd ۷ \rhd \cdots \rhd ۲\times۳ \rhd ۲\times۵ \rhd \cdots \\ \rhd ۲^{۲}\times۳ \rhd ۲^{۲}\times۵ \rhd \cdots \\ \rhd ۲^{۳}\times۳ \rhd ۲^{۳}\times۵ \rhd \cdots \\ \vdots \\ \rhd ۲^{۳} \rhd ۲^{۲} \rhd ۲ \rhd ۱ \end{aligned}$$

قضیهی شارکوفسکی: فرض کنید $f : R \rightarrow R$ پیوسته باشد. فرض کنید f دارای یک نقطهی تناوبی با دوره تناوب اول k باشد. اگر $k \rhd l$ در ترتیب فوق باشد، آنگاه f دارای یک نقطهی تناوبی با دوره تناوب اول l نیز هست[٤].