بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

گرایش محض

عنوان:

زیر فضاهای کاهنده برای عملگرهای ضربی تحلیلی در فضای برگمن

نگارش:

لیلا خاقانپور شاهرضایی

اساتید راهنما:

دکتر علی آبکار دکتر مسعود صباغان

شهریور ۱۳۸۷

بنام خدا

دانشگاه تهران

پردیس علوم
دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

گواهی دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

۱۳۸۷ /۹/ ۲۴

هیات داوران پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم لیلا خاقانپور شاهرضایی**

در رشته **ریاضی محض**

با عنوان : **زیر فضاهای کاهنده برای عملگرهای ضربی تحلیلی در فضای برگمن**

را در تاریخ **۸۷/۶/۳۱**

	به عدد	به حروف
با نمره نهایی :	۱۹/۲۵	نوزده و بیست و پنج

و درجه : عالی

ردیف	مشخصات هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما اول :	دکتر علی آبکار	دانشیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی قزوین	
۲	استاد راهنما دوم :	دکتر مسعود صباغان	دانشیار	دانشگاه تهران	صباغان
۳	داور داخلی :	دکترفاطمه آیت الله زاده شیرازی	استادیار	دانشگاه تهران	
۴	داور خارجی :	دکتر سید منصور واعظپور	دانشیار	دانشگاه صنعتی امیرکبیر	واعظپور
۵	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر:	دکتر هایده اهرابیان	دانشیار	دانشگاه تهران	

تذکر: این برگه پس از تکمیل توسط هیات داوران در نخستین صفحه پایان نامه درج می گردد.

پردیس علوم
آموزش تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

مادر و پدرعزیزم

آنان که وجودم برایشان همه رنج بود و

وجودشان برایم همه مهر.

آنان که فروغ نگاهشان،

گرمي کلامشان و

روشني رويشان

سرمايه هاي جاوداني زندگي من است.

چکیده

فرض کنیم $L_a^2(\mathbb{D})$ فضای برگمن متشکل از توابع تحلیلی روی قرص واحد باز $\mathbb{D}$ باشد. تابع تحلیلی و کراندار $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ را در نظرگرفته و به آن عملگر ضربی $M_\varphi f = \varphi f$ را روی $L_a^2(\mathbb{D})$ وابسته می‌کنیم. در این پایان نامه فرض می‌کنیم که φ یک حاصلضرب بلاشکه با دو صفر $\{a, b\}$ و m نقطه ژئودزیک میانی بین a و b باشد. قصد داریم زیر فضاهای کاهنده عملگر ضربی M_φ را توصیف کنیم؛ در واقع نشان خواهیم داد که M_φ دارای دو زیر فضای کاهنده غیر بدیهی X_e و X_o می‌باشد که عبارتند از فضای توابع به شکل $fo\varphi_m k_m$، (به ترتیب برای fهای زوج و فرد) که در آن φ_m یک تابع موبیوس و k_m هسته باز تولید کننده فضای برگمن در m می‌باشد.

مقدمه

زیر فضاهای کاهنده[1] و جابجاگر[2] عملگرهای ضربی تحلیلی[3] روی فضاهای هیلبرت از موضوعات جالبی است که از دیرباز مورد علاقه آنالیزدانان بوده است و تاکنون مسائل متنوع و جالبی در حیطه این موضوعات طرح و حل شده است و مسائل باز زیادی نیز وجو دارند که تاکنون حل نشده باقی مانده‌اند.

برای عملگر خطی کراندار T روی یک فضای هیلبرت H، زیر فضای بسته X از H را تحت T پایا[4] نامند هرگاه $TX \subseteq X$. اگر X تحت T و T^* (الحاق T) پایا باشد، X زیر فضای کاهنده برای T نامیده می‌شود. در این حالت می‌توانیم T را به صورت جمع مستقیم تحدید آن به X و $X^{\perp}$ بنویسیم.

فرض کنید $\mathbb{D}$ قرص واحد باز در صفحه مختلط باشد. یعنی

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

و گیریم $dA(z)$ اندازه مساحت نرمال شده روی $\mathbb{D}$ باشد یا به عبارتی

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dx\, dy = \frac{1}{\pi} r dr\, d\theta.$$

فضای برگمن[5] و فضای هاردی[6] دو فضای هیلبرت هستند که در این پایان نامه با آنها سرو کار داریم، فضای برگمن که آن را با $L_a^2(\mathbb{D})$ نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$

[1] reducing subspaces
[2] commutant
[3] analytic multiplication operators
[4] invariant
[5] Bergman space
[6] Hardy space

که در شرط

$$\|f\|^{۲}_{L^{۲}_{a}} = \int_{D} |f(z)|^{۲}\, dA(z) < \infty,$$

صدق کنند. هم چنین فضای هاردی که آن را با $H^{۲}(\mathbb{D})$ نشان می‌دهیم، تشکیل شده ازتوابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$، با شرط

$$\|f\|^{۲}_{H^{۲}} = \sup_{۰\leq r<۱} \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} |f(re^{i\theta})|^{۲}\, d\theta < \infty.$$

ما برای $\varphi \in H^{\infty}(\mathbb{D})$ روی این دو فضا عملگر ضربی تحلیلی M_{φ} را بدین صورت تعریف می‌کنیم که هر تابع f را به حاصل ضرب φ و f نظیر می‌کند. یا به عبارتی $M_{\varphi}f = \varphi f$. عملگر ضربی تحلیلی یک عملگر خطی کراندار روی هر دو فضای برگمن و هاردی است. در موررد عملگرهای ضربی تحلیلی قضایای ساختاری سودمندی وجود دارد، اگر چه تعریف آن ساده به نظر می‌رسد. خصوصا در مورد خیلی خاص M_{z} سوالات جدی بسیاری وجود دارد.

شبکه زیر فضاهای کاهنده یک عملگر ضربی تحلیلی روی یک فضای برگمن، بسیار پیچیده است. درمورد M_{z} کارهای عمیق زیادی انجام شده است، که نمونه‌ای از آن در [۱] آورده شده است.

برای عملگر خطی کراندار T روی فضای هیلبرت H، $(T)'$ یا جابجاگر T عبارت است از جبر عملگرهای خطی کراندار S روی H که $ST = TS$.

یافتن جابجاگر یک عملگر ارتباط نزدیکی با بررسی کردن زیر فضاهای کاهنده آن دارد. زیرا اگر P یک نگاشت تصویر قائم از فضای هیلبرت H به روی فضای X باشد، آنگاه X یک زیر فضای کاهنده برای T است اگر وتنها اگر $TP = PT$.

دراین پایان نامه قصد داریم تا زیرفضاهای کاهنده عملگرهای $M_{z^{۲}}$ و M_{φ} را که φ حاصلضرب بلاشکه با دو صفر[۷] است، روی فضاهای برگمن و هاردی بدست آوریم.در این راه تلاش می‌کنیم تا جابجاگرهای این دو عملگر را نیز مورد بررسی قراز دهیم.

Blaschke product with two zeros[۷]

یادآوری می‌کنیم که برای $a, b \in \mathbb{D}$ حاصلضرب بلاشکه با دو صفر عبارت است از

$$\varphi(z) = \varphi_a(z)\varphi_b(z),$$

که درآن

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

در این پایان نامه بیشتر تمرکز ما روی این دو عملگر روی فضای برگمن است و بخش عمده‌ای از کار در این فضا صورت می‌گیرد.

در فصل اول، به مقدماتی که در این پایان نامه به آنها نیازمندیم، می‌پردازیم. قضایایی از آنالیز حقیقی، مختلط و تابعی که شناخته شده هستند و دارای منابع قابل دسترس، بدون شرح و اثبات و با ذکر منبع آورده‌ایم و مطالبی را که به کتاب‌های تخصصی و مشکل تری از لحاظ دسترسی مربوطند، با شرح کامل بیان نمودیم. در این فصل ابتدا فضاهای برگمن و هاردی را به طور کامل با قضایای مورد نیاز شرح می‌دهیم و سپس هسته باز تولید کننده[8] فضای برگمن را که نقشی اساسی در محاسبه زیر فضاهای کاهنده برای عملگرهای ذکر شده دارد، تعریف و محاسبه خواهیم کرد.

فصل دوم به عملگر M_{z^2} روی فضای برگمن اختصاص دارد. در این فصل ابتدا سعی می‌کنیم تا جابجاگر عملگر M_φ را به طور کامل تجزیه و تحلیل کنیم و سپس با استفاده از ارتباطی که بین جابجاگر یک عملگر و زیر فضاهای کاهنده آن وجود دارد، نشان خواهیم داد که تنها زیر فضاهای کاهنده غیر بدیهی M_{z^2} زیر فضای شامل توابع زوج و زیر فضای شامل توابع فرد خواهد بود.

در فصل سوم، با کمک گرفتن از نتایج فصل دوم و با روندی کاملا متفاوت، ابتدا زیر فضاهای کاهنده عملگر M_φ محاسبه می‌کنیم. خواهیم دید که M_φ نیز مانند M_{z^2} دقیقا دو زیر فضای کاهنده غیر بدیهی دارد. در ادامه فرم کلی عملگرهایی که با M_φ جابجا می‌شوند را بدست می‌آوریم.

نهایتا در فصل چهارم این دو عملگر را روی فضای هاردی بررسی می‌کنیم. خواهیم دید که زیر فضاهای کاهنده M_φ و M_{z^2} روی فضای برگمن، روی فضای هاردی نیز برای این دو عملگر کاهنده

[8] reproducing kernel

هستند، ولی در حالت هاردی نمی‌توان گفت که این دو عملگر دقیقا دو زیر فضای کاهنده غیر بدیهی دارند. هم چنین نمایشی از عملگرهایی که با این دو عملگر جابجا می‌شوند را بدست می آوریم.

این پایان نامه بر اساس مقاله زیر تنظیم شده است.

K.Zhu, Reducing Subspace for a Class of Multiplication Operators, J.London. Math. Soc. (2) **62** (2000) 553-568

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش خداوندی را که همواره لطف بیکرانش را شامل حال من نمود و همیشه مبهوت مهربانیش بوده و هستم.

اکنون که به یاری پروردگار تدوین و نگارش این رساله به اتمام رسیده، شایسته است از زحمات و هم‌فکری بی دریغ اساتید فرهیخته و بزرگوار، جناب آقای دکتر علی آبکار و جناب آقای دکتر مسعود صباغان که راهنمایی این جانب را در انجام تحقیق، پژوهش و نگارش این پایان نامه تقبل نمودند، قدردانی و تشکر نمایم. هم چنین از سرکار خانم دکتر ایت الله زاده شیرازی و جناب آقای دکتر واعظپور که داوری این پایان نامه را پذیرفتند، سپاسگزارم.

بر خود لازم می‌دانم از استاد عزیز و گرانمایه‌ام جناب آقای دکتر حسن حقیقی که در طول دوره کارشناسی بهترین درس‌ها را از ایشان آموختم و همواره راهنمایی‌های ایشان روشنگر مسیر علمی زندگی‌ام بوده است، قدردانی نمایم.

در پایان از تمامی کسانی که در مراحل گوناگون تحصیل مرا یاری نمودند، کمال تشکر را دارم.

لیلا خاقانپور

مهر۸۷

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

۱.۱ توصیف فضای $L_a^2(\mathbb{D})$ و فضای هاردی $H^2(\mathbb{D})$

در این بخش به معرفی فضای برگمن[1] و فضای هاردی[2] می‌پردازیم و ویژگی‌هایی را از این دو فضای هیلبرت که برای ادامه کار به آنها نیاز پیدا خواهیم کرد، بیان و اثبات می‌کنیم. هم چنین در این بخش عملگر ضربی[3] را روی این دو فضا تعریف خواهیم کرد.

۱.۱.۱ نمادگذاری . دراین پایان نامه $\mathbb{D}$ نشان دهنده قرص واحد باز در صفحه مختلط می‌باشد. یعنی

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

هم چنین منظوراز $dA(z)$ اندازه مساحت نرمال شده روی $\mathbb{D}$ است؛ به عبارت دیگر

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta.$$

---

[1] Bergman space
[2] Hardy space
[3] multiplication operator

۲.۱.۱ تعریف. زیر فضای $L^2(\mathbb{D}, dA)$، متشکل از توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ را فضای برگمن می‌نامیم و آن را با نماد $L^2_a(\mathbb{D})$ نمایش می‌دهیم. بنابراین ضرب داخلی روی $L^2_a(\mathbb{D})$ به صورت

$$\langle f, g\rangle_{L^2_a} = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z),$$

تعریف می‌شود، به ویژه نرم در $L^2_a(\mathbb{D})$ به صورت

$$\|f\|_{L^2_a} = \Big(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

خواهد بود.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنید $z \in \mathbb{D}$ باشد، تابعک خطی $\varphi_z : L^2_a(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ که به صورت

$$\phi_z(f) = f(z),$$

تعریف می‌شود را تابعک ارزیاب نقطه‌ای[۴] می‌نامند.

۴.۱.۱ لم. تابعک ارزیاب نقطه‌ای یک تابعک خطی کراندار در فضای $L^2_a(\mathbb{D})$ است. به خصوص هر تابع $f \in L^2_a(\mathbb{D})$ دارای خاصیت زیر می باشد

$$|f(z)| \le \pi^{\frac{-1}{2}} \delta(z)^{-1} \|f\|_{L^2_a},$$

که در آن $\delta(z) = dist(z, \mathbb{D})$ فاصله بین z تا مرز $\mathbb{D}$ می‌باشد.

اثبات. نقطه $z \in \mathbb{D}$ را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $\delta = \delta(z)$، پس قرص

$$\mathbb{D}' = \{\xi \in \mathbb{D} : |\xi - z| < \delta\}$$

در $\mathbb{D}$ قرار می‌گیرد. انتگرال

$$\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

[۴] point evaluation functional

یک تابع غیر نزولی از r است (صفحه ۹ از [۷] را ببینید). بنابراین

$$|f(z)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z+re^{i\theta})|^2 d\theta, \quad 0 \le r < \delta.$$

با ضرب طرفین نامساوی بالا در r و انتگرال‌گیری مجدد از طرفین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\pi\delta^2|f(z)|^2 &\le \int_0^{\delta}\int_0^{2\pi}|f(z+re^{i\theta})|^2 r\,dr\,d\theta\\ &= \int_{\mathbb{D}'}|f(\xi)|^2 dA(\xi)\\ &\le \int_{\mathbb{D}}|f(\xi)|^2 dA(\xi)\\ &= \|f\|^2_{L^2_a},\end{aligned}$$

ودرنتیجه $|f(z)| \le \pi^{-\frac{1}{2}}\delta(z)^{-1}\|f\|_{L^2_a}$. اما با توجه به تعریفی که برای تابعک ارزیاب نقطه‌ای ارائه دادیم، داریم

$$|\varphi_z(f)| \le c\|f\|_{L^2_a},$$

که در آن $c = \pi^{-\frac{1}{2}}\delta(z)^{-1}$. پس تابعک ارزیاب نقطه‌ای یک تابعک خطی کراندار است. □

با توجه به اینکه $L^2(\mathbb{D}, dA)$ یک فضای هیلبرت است، برای اینکه نشان دهیم $L^2_a(\mathbb{D})$ فضایی هیلبرت است کافی است ثابت کنیم که $L^2_a(\mathbb{D})$ زیر فضایی بسته از $L^2(\mathbb{D}, dA)$ است. برای این منظور به بیان قضیه‌ای از آنالیز مختلط نیازمندیم که در زیر آن را می‌آوریم.

۵.۱.۱ قضیه. فرض کنیم برای $j = 1, 2, 3, \cdots$، $f_j \in H(\Omega)$ که Ω مجموعه‌ای باز در صفحه مختلط است و $f_j \to f$ به طور یکنواخت بر زیر مجموعه های فشرده Ω؛ دراینصورت f متعلق به $H(\Omega)$ خواهد شد.

اثبات. به قضیه ۲۸.۱۰ از [۱۳] مراجعه کنید. □

۶.۱.۱ گزاره. $L_a^2(\mathbb{D})$ زیر فضایی بسته از $L^2(\mathbb{D}, dA)$ است.

اثبات. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L_a^2(\mathbb{D})$ باشد که در نرم به f همگراست، یعنی $\|f_n - f\| \to 0$ وقتی که $n \to \infty$. پس بنابر قضیه ۱۲.۳ از [۱۳]، $\{f_n\}$ زیر دنباله‌ای مانند $\{f_{n_j}\}$ دارد که نقطه به نقطه روی $\mathbb{D}$ همگرا به f است. فرض کنید K زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{D}$ باشد، چون K فشرده است پس $0 < r < 1$ وجود دارد که $K \subseteq \{z : |z| < r\}$. پس مجموعه $\{\delta(z)^{-1} : z \in K\}$ سوپریمم خواهد داشت، این سوپریمم را M می‌نامیم. طبق لم ۴.۱.۱ داریم

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f_{n_j}(z)| \leq M\pi^{-\frac{1}{2}} \|f_m - f_{n_j}\|_{L_a^2}, m, j \in \mathbb{N}.$$

بنابراین با میل دادن j به سمت بی نهایت در نامساوی بالا بدست خواهیم آورد

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f(z)| \leq M\pi^{-\frac{1}{2}} \|f_m - f\|_{L_a^2},$$

ونهایتا در نامساوی بالا اگر $m \to \infty$ میل کند، باتوجه به اینکه $\{f_m\}$ به f در نرم همگراست، نتیجه خواهد شد

$$\sup_{z\in K} |f_m(z) - f(z)| \to 0, m \to \infty$$

و این بدین معناست که $\{f_n\}$ به طور یکنواخت روی K به f همگراست. چون $\{f_n\}$ روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ به f همگراست، طبق قضیه ۵.۱.۱ f تحلیلی است و درنتیجه $f \in L_a^2(\mathbb{D})$. پس $L_a^2(\mathbb{D})$ زیر فضایی بسته از $L^2(\mathbb{D}, dA)$ است. □

۷.۱.۱ گزاره. اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متعلق به $L_a^2(\mathbb{D})$ باشند، آنگاه

$$\langle f, g\rangle_{L_a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b_n}}{n+1},$$

و

$$\|f\|_{L^2_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

اثبات. طبق تعریف ضرب داخلی در فضای برگمن داریم

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_{L^2_a} &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{b}_m \overline{z}^m) dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n \overline{b}_m r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b}_n r^{2n+1} dr \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \overline{b}_n}{n+1},
\end{aligned}$$

ودرنتیجه

$$\|f\|_{L^2_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

□

۸.۱.۱ گزاره. اگر مجموعه توابع زوج و فرد در $L^2_a(\mathbb{D})$ رابه ترتیب با $L^2_{ae}(\mathbb{D})$ و $L^2_{ao}(\mathbb{D})$ نمایش دهیم، داریم

$$L^2_a(\mathbb{D}) = L^2_{ae}(\mathbb{D}) \oplus L^2_{ao}(\mathbb{D}).$$

اثبات. به ازای هر f متعلق به $L^2_a(\mathbb{D})$، f را می‌توان به طور منحصر به فرد به صورت $f = f_e + f_o$ نوشت که در آن

$$f_e(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$$

و

$$f_o(z) = \frac{۱}{۲}(f(z) - f(-z))\,.$$

□

۹.۱.۱ تعریف. مجموعه تمام توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ را با $H^\infty(\mathbb{D})$ نمایش می‌دهیم. نرم

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \,:\, z \in \mathbb{D}\}$$

فضای $H^\infty(\mathbb{D})$ را تبدیل به یک فضای باناخ می‌کند.

۱۰.۱.۱ تعریف. برای $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ عملگر

$$M_\varphi : L_a^۲(\mathbb{D}) \longrightarrow L_a^۲(\mathbb{D})$$

$$f \longmapsto \varphi f$$

را عملگر ضربی روی فضای $L_a^۲(\mathbb{D})$ می‌نامیم.

توجه کنید که M_φ خوش تعریف است، زیرا حاصل ضرب دو تابع تحلیلی، تحلیلی است و

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |\varphi f(z)|^۲ dA(z) \leq \|\varphi\|_\infty^۲ \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^۲ < \infty.$$

۱۱.۱.۱ گزاره. عملگر ضربی M_φ یک عملگر خطی کراندار روی فضای برگمن است.

اثبات. واضح است که M_φ خطی است. برای اثبات کراندار بودن، فرض کنید $f \in L_a^۲(\mathbb{D})$، داریم

$$\|\varphi f\|_{L_a^۲} = \int\limits_{\mathbb{D}} |\varphi f(z)|^۲ dA(z) = \int\limits_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^۲ |f(z)|^۲ dA(z)$$

$$\leq \|\varphi\|_\infty^۲ \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^۲ dA(z) = \|\varphi\|_\infty^۲ \|f\|_{L_a^۲}^۲.$$

بنابراین $\|\varphi f\|_{L_a^۲} \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{L_a^۲}$، پس M_φ عملگر خطی کراندار روی $L_a^۲(\mathbb{D})$ است. □

۱۲.۱.۱ تعریف. فضای هاردی عبارت است از مجموعه توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ که در شرط

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty,$$

صدق می‌کنند. فضای هاردی روی $\mathbb{D}$ را بانماد $H^2(\mathbb{D})$ نشان داده و نرم $f \in H^2(\mathbb{D})$ به صورت

$$\|f\|_{H^2} = (\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta)^{\frac{1}{2}},$$

تعریف می‌شود.

۱۳.۱.۱ گزاره. برای $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $H^2(\mathbb{D})$ داریم

$$\|f\|_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

اثبات. برای هر $0 \leq r < 1$ داریم

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta})(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{a}_m r^m e^{-im\theta}) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a}_m r^{n+m} e^{i(n-m)\theta} d\theta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.
\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^2}^2 &= \sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \\
&= \sup_{0\leq r<1} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.
\end{aligned}$$

□

ما قصد داریم نشان دهیم که $H^{2}(\mathbb{D})$ فضایی هیلبرت است؛ برای این منظور نشان خواهیم داد که $H^{2}(\mathbb{D})$ با فضای هیلبرت ℓ^{2} به طور خطی ایزومتر است. یادآوری می‌کنیم که ℓ^{2} فضای خطی متشکل از همه دنباله‌های مختلط $\{x_n\}_{n\geq 1}$ است که در شرط $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^{2}<\infty$ صدق می‌کنند. هم چنین برای $a=\{a_n\}_{n\geq 1}$ و $b=\{b_n\}_{n\geq 1}$ در ℓ^{2} ضرب داخلی a و b به صورت

$$\langle a,b\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\bar{b}_n,$$

تعریف می‌شود.

۱۴.۱.۱ لم. $H^{2}(\mathbb{D})$ با ℓ^{2} به طور خطی ایزومتر است.

اثبات. نگاشت $T:H^{2}(\mathbb{D})\longrightarrow \ell^{2}$ به صورت

$$T(f)=\{a_n\},$$

را که در آن $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ در نظر بگیرید. واضح است که T خطی است؛ هم چنین

$$\|Tf\|_{\ell^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^{2}=\|f\|_{H^{2}},$$

پس T یک ایزومتری است و $H^{2}(\mathbb{D})$ با ℓ^{2} به طور خطی ایزومتر می‌باشند. □

۱۵.۱.۱ قضیه. $H^{2}(\mathbb{D})$ فضایی هیلبرت است.

اثبات. چون ℓ^{2} فضایی هیلبرت است، ایزومتر خطی T در لم قبل با القای ضرب داخلی

$$\langle f,g\rangle_{H^{2}}=\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle_{\ell^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{b_n},$$

که در آن $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ و $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$، $H^{2}(\mathbb{D})$ را به فضایی هیلبرت تبدیل می‌کند. □

به همان شکلی که عملگر ضربی را روی فضای برگمن تعریف کردیم، می‌توانیم عملگر ضربی را روی فضای هاردی تعریف کنیم. گزاره زیر نشان می‌دهد که عملگر ضربی روی فضای هاردی نیز یک عملگر خطی کراندار است.