بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی
گرایش حل عددی معادلات تابعی

# روش های جدید برای حل معادلات تابعی
# و بررسی خواص تحلیلی آنها

از
**زینب آیاتی**

استاد راهنما
**دکتر جعفر بی آزار**

شهریور 1390

# تقدیر و تشکر

در اینجا لازم می دانم مراتب قدردانی خود را از کسانی که در مراحل تدوین پایان نامه مرا مورد لطف و عنایت خود قرار دادند، اعلام دارم.

از استاد راهنمای ارجمندم آقای دکتر جعفر بی آزار که با راهنماییهای مفید و سودمندشان در امر تحقیق مرا یاری کردند و تجربیات خود را صادقانه در اختیارم نهادند، صمیمانه سپاسگزارم.

از آقایان دکتر بابلیان، دکتر کیانپور و دکتر امینی خواه که پیش نویس رساله را به دقت مطالعه نمودند و نظرات ارزشمندی جهت تصحیح و بهبود آن ابراز داشتند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

همچنین از پدر، مادر و همسر عزیزم که در تمام مراحل تحصیل همواره حامی من بوده اند و از دوستان بزرگوارم که هر یک به نحوی اینجانب را مورد لطف قرار داده اند، سپاسگزارم.

## چکیده

**روش های جدید حل معادلات تابعی و بررسی خواص تحلیلی آنها**

**زینب آیاتی**

روشهای عددی متداول برای حل معادلات تابعی مانند روش تفاضلات متناهی ، و روشهای کلاسیک مانند روش سری های فوریه یا دارای حجم محاسبات بالا هستند و یا دسته ی خاصی از معادلات را حل می کنند. از این رو محققان به دنبال روشها ی جدید برای حل این گونه معادلات هستند. از جمله ی این روش ها می توان به روش های آشفتگی هوموتوپی، توابع نمایی، و بسط $\frac{G'}{G}$، اشاره کرد که در این رساله مورد بحث و بررسی قرار گرفته اند.

در این رساله، مقایسه ای بین روش تجزیه ی آدومین و روش آشفتگی هوموتوپی ارائه شده است. با توجه به این که مقالات زیادی در مورد روش آدومین به چاپ رسیده است، با نشان دادن معادل بودن دو روش می توان این مقالات را به راحتی به روش هوموتوپی نیز تعمیم داد. اگر چه تا کنون معادلات بسیاری به کمک روش آشفتگی هوموتوپی حل شده اند اما انتخاب جواب اولیه و یا ساختار هوموتوپی مناسب از مشکلات این روش است. در این رساله سعی می شود با ارائه اصلاحات و تغییراتی در روش آشفتگی هوموتوپی و همچنین بحث روی همگرایی روش، تا اندازه ای به حل این مشکلات پرداخته شود.

همچنین به تشریح روش های توابع نمایی و روش بسط $\frac{G'}{G}$ که برای به دست آوردن جواب دقیق معادلات با مشتقات جزیی مورد استفاده قرار می گیرند، پرداخته شده است. این روش ها به گونه ای تعمیم داده می شوند که قابلیت به دست آوردن جواب انواع دیگری از معادلات از جمله معادلات دیفرانسیل-تفاضلی، معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه معادلات دیفرانسیل را نیز داشته باشند. در چند دهه اخیر روش های مثلثاتی روش های متداول برای به دست آوردن جواب دقیق این معادلات بوده اند. لذا برای نشان دادن قابلیت ها و مشکلات روش های توابع نمایی و روش بسط $\frac{G'}{G}$، مقایسه ای بین آنها و روش های مثلثاتی ارائه می شود.

**کلید واژه :** معادلات تابعی، روش آشفتگی هوموتوپی، روش توابع نمایی، روش بسط $\frac{G'}{G}$، روش تجزیه ی آدومین، روش های مثلثاتی، همگرایی.

## فهرست مطالب

عنوان صفحه

## فهرست جدول ها

**عنوان** **صفحه**

فهرست شکل ها

**عنوان** **صفحه**

## پیشگفتار

آنالیزعددی برای محققان رشته های علوم و مهندسی هر روز بیش از پیش به عنوان اساس و ابزار کار مورد استفاده قرار می گیرد. امروزه نقش این شاخه از ریاضیات کاربردی بسیار با اهمیت است به طوری که همه رشته های علوم و ریاضی به آن نیاز دارند و یکی از زمینه های پر کاربرد در آنالیز عددی حل معادلات تابعی است. معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و معادلات انتگرال- دیفرانسیل دسته هایی از معادلات تابعی هستند. امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات وجود ندارد و یا به کارگیری آن ها بسیار دشوار است. در رساله حاضر روش های جدیدی برای حل این گونه معادلات مورد بحث قرار گرفته اند. از جمله ی این روش ها می توان به روش های آشفتگی هوموتوپی، توابع نمایی، و بسط $\frac{G'}{G}$، اشاره کرد.

ایده اصلی روش آشفتگی هوموتوپی توسط جی هیون خی در سال 1998 ارائه شده است و توسط بسیاری از محققان علوم و مهندسی جهت حل معادلات تابعی به کار رفته است. تجزیه و تحلیل این روش از دیدگاه نظری، جستجو برای پیدا کردن کاربردهای بیشتر، و مقایسه آن با روشهای کلاسیک و شناخته شده، میدان پژوهشی وسیعی را برای پژوهشگران فراهم کرده است.

روش توابع نمایی توسط جی هیون خی و وو در سال 2006 برای به دست آوردن جواب دقیق معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی غیر خطی ارائه شده است. روند به دست آوردن جواب در این روش به کمک نرم افزارهای ریاضی مانند میپل، متلب یا هر نرم افزار ریاضی دیگر بسیار ساده است.

روش دیگری که به جواب دقیق این معادلات منجر می شود روش بسط $\frac{G'}{G}$ است که توسط وانگ، لی و ژنگ در سال 2008 ارائه شده است. این روش بر این فرض استوار است که جواب های موج سیار معادلات و دستگاه های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی غیر خطی را می توان به صورت یک چند جمله ای بر حسب $\frac{G'}{G}$ نوشت، که تابع $G$ در یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی مرتبه ی دوم صدق می کند.

در این رساله این روش ها برای حل مثالهای متنوع و گوناگون از معادلات تابعی به کار رفته است. در فصل اول برخی از مفاهیم و مقدمات اولیه ای که در این رساله استفاده می شود، معرفی شده است. در فصل دوم روش آشفتگی هوموتوپی ارائه گردیده و به مقایسه ی این روش با روش تجزیه ی آدومین پرداخته شده است و به دنبال آن با اصلاح و تعمیم روش آشفتگی هوموتوپی، چند روش جدید معرفی شده و همگرایی روش اثبات شده است. در فصل سوم روش توابع نمایی و تعمیم آن بیان و به مقایسه ی این روش با روشهای مثلثاتی پرداخته شده است. در پایان این فصل کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل- تفاضلی

و معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شده است. در فصل چهارم، روش بسط $\frac{G'}{G}$ و تعمیم آن ارائه شده و به مقایسه ی این روش با روشهای مثلثاتی پرداخته شده است. در پایان روش اصلاح شده بسط $\frac{G'}{G}$ معرفی شده است.

مباحث جدیدی که در این رساله مطرح شده اند به شرح زیر هستند:

1- مقایسه روش آشفتگی هوموتوپی و روش تجزیه ی آدومین

2- بررسی همگرایی روش آشفتگی هوموتوپی

3- اصلاح روش آشفتگی هوموتوپی جهت به دست آوردن جواب اولیه ی مناسب

4- ارائه روشی جدید بر مبنای روش آشفتگی هوموتوپی و بررسی همگرایی آن

5- تعمیم روش توابع نمایی برای حل دستگاه های معادلات با مشتقات جزیی، دستگاه های معادلات دیفرانسیل-تفاضلی و معادلات دیفرانسیل معمولی

6- مقایسه ی روش توابع نمایی و روش های مثلثاتی

7- مقایسه ی روش بسط $\frac{G'}{G}$ با روشهای مثلثاتی

8- ارائه روش اصلاح شده ی بسط $\frac{G'}{G}$

# فصل اول
# مقدمه

## 1-1 مقدمه

در هر پدیده و فرایندی در طبیعت پارامترها و متغیرهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، به یک معادله تابعی[1] منجر می شود. معادلات تابعی معادلاتی هستند که جواب آنها یک تابع است. در این معادلات تابع مجهول و مشتق یا انتگرال آن نسبت به متغیر یا متغیر های مستقل وجود دارد و بسته به شکل معادله می تواند معادله دیفرانسیل معمولی، معادله با مشتقات جزئی، معادله انتگرال، معادله انتگرال_دیفرانسیل و ... باشد. به دست آوردن جواب تحلیلی و یا تقریبی این معادلات از دیر باز مورد توجه دانشمندان علوم مختلف، به خصوص ریاضیدانان و مهندسین بوده است. در این فصل به ارائه مفاهیم و تعاریفی که در این رساله به کار می روند، پرداخته شده است.

## 2-1 تعاریف و مقدمات

### 1-2-1 تعریف

معادله ی تابعی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی می شود، معادله دیفرانسیل نامیده می شود . اگرمعادله دیفرا نسیل فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد معادله دیفرانسیل معمولی (م د م)[2] نام دارد و اگردر معادله دیفرانسیل تعداد متغیر هاِی وابسته بیش از یکی باشد، به آن معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (م د ج)[3] می گویند. برای تابع مجهول $u$، وابسته به دو متغیر $x$و $y$ ، معادله دیفرانسیل جزئی به شکل زیر است

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},...)=0, \tag{1-1}$$

که در آن

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_y=\frac{\partial u}{\partial y},\quad u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\cdots.$$

### 2-2-1 تعریف

بالاترین مرتبه مشتق در معادله (1-1) را مرتبه ی معادله دیفرانسیل جزئی گویند. بنابراین معادله دیفرانسیل مرتبه ی اول به صورت $F(x,y,u_x,u_y,u)=0$ و معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ی دوم به صورت ذیل است

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0.$$

[1]. Functional Equation
[2]. Ordinary Differential Equation
[3]. Partial Differential Equation

### 1-2-3 مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$1)\ 3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial t}=5u,$$

$$2)\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

معادلات (1) و(2) به ترتیب مرتبه ی دوم و مرتبه ی اول هستند که در آن ها $x$، $y$، و $t$ متغیر های مستقل و $u$ متغیر وابسته است.

### 1-2-4 تعریف

یک معادله دیفرانسیل جزئی را خطی گوییم، اگر $F$ برحسب $u$ و تمام مشتقات آن خطی باشد. معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ی اول خطی به صورت زیر نوشته می شود

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=d,$$

که در آن $a$، $b$، $c$، و $d$ توابعی بر حسب $x$و $y$ هستند.

### 1-2-5 مثال

معادلات زیر را در نظر بگیرید

$$1)\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

$$2)\ u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial u}{\partial y})^2=u^2+y.$$

معادله ی (1)، معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه ی 2 و معادله ی (2)، معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه ی 2 است. بسیاری از پدیده های فیزیکی به معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه ی دوم منجر می شوند. از جمله ی آن ها می توان به موارد زیر اشاره کرد

معادله ی موج
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

معادله ی گرما $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},$$

معادله ی لاپلاس $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

معادله ی تلگراف $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

### 1-2-6 تعریف

برای به دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی شرایط اضافی دیگری نیز باید در دست باشد و معمولا این شرایط به صورت مقدار اولیه یا مرزی روی تمام یا قسمتی از ناحیه ای که جواب را در آن جستجو می کنیم بیان می شود. شرایط اولیه ، تابع مجهول را در سراسر ناحیه ای در زمان آغازی معین می کند و شرایط مرزی، این تابع یا مشتقات جزیی آن را در مرز ناحیه ی مورد نظر تعیین می کند .

### 1-2-7 مثال

معادله ی زیر را، با شرایط داده شده، در نظر بگیرید

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial x},\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0.$$

شرط اولیه ی این معادله به صورت زیر است

$$u(x,0)=\sin x,\qquad 0\le x\le l.$$

و شرایط مرزی عبارتند از

$$\begin{cases} u(0,t)=a_1, \\ u(l,t)=b_1, \end{cases}\qquad t>0.$$

در موارد بسیاری شرایط اولیه یا مرزی به صورت مشتقات تابع در نقاط مرزی نیز داده می شود. معمولاً شرایط مرزی، عوامل تعیین کننده ای در جهت انتخاب روش عددی مناسب برای یافتن جواب هستند. اگر در یک معادله شرایط اولیه در مورد خود تابع باشد معادله را با شرط دیریکله و اگر در مورد آهنگ تغییرات تابع باشد، معادله را همراه با شرط نیومن گویند.

### 8-2-1 معادلات انتگرال[1]

معادله ای را که در آن تابع مجهول در یک یا چند علامت انتگرال ظاهر شود معادله انتگرال گویند. یک نمونه از یک معادله انتگرال که در آن $u(s)$ تابع مجهول است، که بایستی تعیین شود، به صورت زیر است

$$u(s)=f(s)+\int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} K(s,t)F(u(t))dt. \tag{2-1}$$

$K(s,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود، $\alpha(s)$ و $\beta(s)$ حدود انتگرال هستند. هسته معادله انتگرال یعنی $K(s,t)$ و تابع $f(s)$ از پیش معلوم اند. هدف، پیدا کردن تابع مجهول $u(s)$ است. اگر در معادله (2-1)، $F$ به صورت غیرخطی برحسب $u(s)$ تعریف شود آن را معادله انتگرال غیرخطی و در غیر این صورت خطی گویند.

معادلات با مشتقات جزئی و معمولی منشأ پیدایش معادلات انتگرال هستند و امکان یافتن جواب تحلیلی برای اکثر معادلات انتگرال وجود ندارد یا در صورت وجود بسیار پیچیده و مشکل است. در چنین مواردی روش های عددی به کار می آید که همیشه با نوعی خطا همراه است. معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، بیولوژی، فیزیکی و شیمی ظاهر می شود.

### 9-2-1 معادلات انتگرال فردهلم[2]

شکل کلی معادلات انتگرال فردهلم که در آن حد پایین و بالای انتگرال گیری ثابت می باشد به صورت زیر است

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)F(u(t))\,dt, \tag{3-1}$$

$$u(s)=f(s)+\int_a^b K(s,t)F(u(t))\,dt. \tag{4-1}$$

به معادلاتی به شکل معادله ی (3-1)، معادله انتگرال فردهلم نوع اول و معادله ی (4-1) را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم گویند.

### 10-2-1 معادلات انتگرال ولترا[3]

شکل کلی معادلات انتگرال ولترا که در آن حد پایین ثابت و حد بالای انتگرال گیری متغیر می باشد به صورت زیر است

$$f(s)=\int_a^s K(s,t)F(u(t))\,dt, \tag{5-1}$$

---
۱. Integral equations
۲. Fredholm integral equations
۳. Volterra Integral equations

$$u(s)=f(s)+\int_a^s K(s,t)F(u(t))dt. \tag{6-1}$$

معادله ی (1-5) را معادله انتگرال ولترا ی نوع اول و معادله ی (1-6) را معادله انتگرال ولترا نوع دوم گویند.

### 1-2-11 معادله انتگرال همگن

اگر در معادله انتگرال فردهلم یا ولترا نوع دوم شرط $f(s)=0$ برقرار باشد معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن گویند، در غیر این صورت آن را غیر همگن گویند.

### 1-2-13 معادلات انتگرال منفرد

در صورتی که یکی از حدود انتگرال یا هر دو $\infty$ باشند و یا هسته معادلات انتگرال یعنی $K(s,t)$ در بازه انتگرال گیری نقاط انفصال یا نامعین داشته باشد معادله انتگرال را منفرد گویند، مانند

$$u(s)=\int_0^\infty \frac{u(t)}{\sqrt{s-t}}dt, \tag{7-1}$$

$$u(s)=\int_0^\infty \frac{u(t)}{(s-t)^\alpha}dt, \qquad 0<\alpha<1. \tag{8-1}$$

معادلات (1-7) و (1-8) را به ترتیب معادله انتگرال آبل ساده و معادله انتگرال تعمیم یافته آبل می نامند.

### 1-2-14 معادلات انتگرال - دیفرانسیل[1]

در این گونه معادلات تابع مجهول، $u(s)$ معمولاً در علامت انتگرال و تحت عملگر مشتق ظاهر می شود.

$$G(u(s),u'(s),\ldots)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)F(u(t),u'(t),\ldots)dt.$$

### 1-2-15 سیگنال[2]

هر کمیت قابل اندازه گیری یا خصوصیتی از محیط که مکان یا سرعت آشوب و بر هم ریختگی در محیط را نشان دهد سیگنال نامیده می شود.

---
۱. Integro-differential equations
۲. Signal

### 1-2-16 موج[1]

هر سیگنال قابل شناختی که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت کند موج نامیده می شود.

### 1-2-17 امواج سیار[2]

امواجی که به صورت $u(x,t)=f(x-ct)$ نمایش داده می شوند امواج سیار نامیده می شوند. چنین تابعی آشفتگی را نشان می دهد که با سرعت $c$ حرکت می کند. جواب موج سیار، جوابی است که به صورت $u(x,t)=f(x-ct)$ نوشته می شود. اگر این جواب ها به طور متناوب تکرار شوند به آن ها جواب های متناوب[3] گویند.

### 2-1-18 توپولوژی

یک توپولوژی در مجموعه $X$ گردایه ای مانند $\tau$ از زیرمجموعه های $X$ است که در شرایط زیر صدق می کند.

1) $\phi$ و $X$ به $\tau$ تعلق دارند.

2) اجتماع هر زیر گردایه از $\tau$ در $\tau$ است.

3) اشتراک هر زیر گردایه متناهی از $\tau$ در $\tau$ است.

در این صورت زوج مرتب $(X\ ,\tau)$ را یک فضای توپولوژیک[4] گویند.

### 1-2-19 هوموتوپی

فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای توپولوژی باشند و $f\ ,g :X \to Y$ نگاشت های پیوسته ای باشند، گوییم $f$ با $g$ هوموتوپیک است هرگاه نگاشت پیوسته ای چون $H :X \times I \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $H(x,0)=f(x)$ و $H(x,1)=g(x)$، که در آن $I=[0,1]$. برای توضیح بیشتر برای هر $0\le t \le 1$، نگاشت پیوسته $H_t :X \to Y$ را در نظر می گیریم به طوری که برای هر $x \in X$، $H_t(x)=H(x,t)$. با تعبیر زمان برای $t$ در لحظه $t=0$ ، $H_0=f$ و در لحظه $t=1$، $H_1=g$. بنابراین اگر $t$ از صفر تا یک تغییر کند آن گاه به گونه ای پیوسته $f$ بر $g$ قرار می گیرد، در این صورت $H$ را یک هوموتوپی می نامیم.

---

۱ .Wave
۲ .Travelling Waves
۳ . Periodic solutions
٤ . Topological space

## 3-1 روش تجزیه آدومین[1]

جورج آدومین در اوایل دهه ی 1960 به پژوهش درباره روش جدیدی برای حل معادلات تابعی رسید، و در اوایل دهه ی 1980 آن را ارائه داد. این روش یک ابزار قدرتمند برای حل معادلات تابعی است و در حقیقت روشی است که معادلات زیادی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی یا جزئی، معادلات انتگرال، دستگاه معادلات دیفرانسیل و ... را با دقت قابل توجهی حل می کند [1-7].

برای بیان ساختار روش تجزیه آدومین، معادله ی تابعی به صورت

$$F\left(u\left(t\right)\right)=g\left(t\right), \tag{9-1}$$

را در نظر می گیریم، که در آن $F$ یک عملگر تابعی از فضای باناخ $\mathrm{B}$ به توی $\mathrm{B}$ است. $g\left(t\right)$ یک تابع معلوم در فضای $\mathrm{B}$ است و هدف به دست آوردن تابع $u\in\mathrm{B}$ است که در معادله (9-1) صدق کند.

فرض کنیم عملگر تابعی $F$ دارای جملات خطی و غیرخطی باشد. اگر قسمت خطی را با $L$ و قسمت غیرخطی را با $N$ نمایش دهیم، داریم

$$F=L+N. \tag{10-1}$$

قسمت خطی $L$ را می توان به صورت $I+R$ تجزیه کرد که در آن $I$ یک عملگر خطی وارون پذیر و $R$ قسمت باقیمانده عملگر خطی است. بنابراین عملگر $F$ را می توان به صورت زیر تجزیه کرد

$$F=I+R+N. \tag{11-1}$$

با توجه به (9-1) داریم

$$I(u)+R(u)+N(u)=g, \tag{12-1}$$

بنابراین

$$I(u)=g-R(u)-N(u). \tag{13-1}$$

چون $I$ یک عملگر خطی وارون پذیر است از (13-1) داریم

$$u=I^{-1}g-I^{-1}R(u)-I^{-1}N(u), \tag{14-1}$$

یا

$$u=f+L\left(u\right)+G\left(u\right), \tag{15-1}$$

که در آن $f=I^{-1}g$ متعلق به $\mathrm{B}$، $L=-I^{-1}R$ یک عملگر خطی و $G=-I^{-1}N$ یک عملگر غیر خطی است.

[1] .Adomian decomposition mehod

روش تجزیه آدومین عبارت است از نمایش $u$ به صورت سری همگرای $u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و نمایش عملگر غیرخطی $G(u)$ به صورت $G(u)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n$، که در آن $A_n$ ها، چندجمله ای هایی از $u_0,u_1,\ldots,u_n$ هستند و به چندجمله ای های آدومین مشهورند و توسط آدومین به صورت زیر تعریف شده اند

$$A_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}G(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i)\right]_{\lambda=0}. \qquad (16\text{-}1)$$

با فرض این که $A_n$ ها به صورت توابعی از $u_0$، $u_1$ ، ... ، $u_n$ در دست باشند، در این صورت معادله ی (15-1) را به صورت زیر می نویسیم

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=f+L(\sum_{n=0}^{\infty}u_n)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n). \qquad (17\text{-}1)$$

با توجه به رابطه (17-1)، $u_n$ ها را می توان به صورت زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned}
&u_0=f\,,\\
&u_1=L(u_0)+A_0(u_0),\\
&u_2=L(u_1)+A_1(u_0,u_1),\\
&\vdots\\
&u_{n+1}=L(u_n)+A_n(u_0,u_1,\ldots,u_n).
\end{aligned} \qquad (18\text{-}1)$$

لذا تا زمانی که $A_n$ ها، برای $n=0,1,2,\ldots$، معین باشند، تمامی $u_n$ ها را می توان محاسبه کرد. در حل معادلات تابعی با روش آدومین یکی از حالات زیر رخ می دهد:

1- بعد از چند مرحله، بقیه جملات صفر می شوند و با جمع کردن جملات به دست آمده جواب واقعی معادله به دست می آید.

2- با محاسبه تعدادی از جملات می توان جمله عمومی را تشخیص داد و با استفاده از آن جواب واقعی معادله را حدس زد.

3- جواب معادله به صورت تقریب $k$ جمله ای $u\approx\sum_{i=0}^{k-1}u_i$ در نظر گرفته می شود ،در این موارد می توان جواب را تا هر مرتبه ی دلخواه تقریب زد.

### 1-3-1 چند جمله ای های آدومین

#### 1-1-3-1 تعریف

فرض کنید $G$ یک تابع تحلیلی و $\sum u_n$ یک سری همگرا در فضای باناخ باشد. با استفاده از پارامتر کمکی $\lambda$ می توان $G_\lambda(u)$ را به صورت زیر تعریف کرد

$$G_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)\lambda^n. \tag{19-1}$$

حال اگر از رابطه ی (1-19) نسبت به $\lambda$ مشتق مرتبه ی $n$ام بگیریم و قرار دهیم $\lambda = 0$ ، داریم

$$\left.\frac{d^n}{d\lambda^n} G_\lambda(u)\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)\lambda^n\right|_{\lambda=0}. \tag{20-1}$$

از طرفی

$$\left.\frac{d^n}{d\lambda^n}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)\lambda^n\right|_{\lambda=0} = \left.\frac{d^n}{d\lambda^n}(A_0(u_0) + A_1(u_0, u_1)\lambda + A_2(u_0, u_1, u_2)\lambda^2 + \cdots)\right|_{\lambda=0}$$

$$= [n!A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) + (n+1)!A_{n+1}(u_0, u_1, \ldots, u_{n+1})\lambda + \cdots]|_{\lambda=0}$$

$$= n!A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n).$$

با جای گذاری نتیجه ی به دست آمده در (1-20) داریم

$$\left.\frac{d^n G_\lambda(u)}{d\lambda^n}\right|_{\lambda=0} = n!A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n). \tag{21-1}$$

با توجه به این که $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\lambda^n$، چند جمله ای های آدومین به صورت زیر تعریف می شوند

$$A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n) = \frac{1}{n!}[\left.\frac{d^n}{d\lambda^n} G(\sum_{i=0}^{n} u_i\lambda^i)\right|_{\lambda=0}]. \tag{22-1}$$

رابطه ی (1-22) روشی برای محاسبه ی چند جمله ای های آدومین نیز هست. روش های دیگری نیز برای محاسبه ی چند جمله ای های آدومین ارائه شده است. یکی از این روش ها توسط بی آزار و همکارانش در سال 2004 ارائه شده است[8].

در این الگوریتم فرض می شود $u_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\lambda^n$ و $G_\lambda(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\lambda^n$. با توجه به این تعاریف $G_\lambda(u)$ را بر حسب $\lambda$، به کمک اتحادهای مثلثاتی، اعمال جبری و سری های تیلور، مرتب کنیم. سپس با مساوی قراردادن آنها با رابطه $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\lambda^n$، چندجمله ای های آدومین به دست می آیند.