بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده ریاضی

عنوان:

حل عددی دستگاه معادلات انتگرال کوشی منفرد با ضرایب ثابت

نگارش:

نجمه اسلامی زاده

استاد راهنما: دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور: دکتر رضا ملاپور

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

مهر ۹۳

باسمه‌تعالی

تعهد اصالت اثر

اینجانب **نجمه اسلامی زاده** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آن‌ها استفاده شده است، مطابق مقررات، ارجاع و در فهرست منابع و مآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی است.

نجمه اسلامی زاده

امضاء

چکیده

در این پایان نامه جواب‌های عددی رده‌ایی از دستگاه معادلات منفرد کوشی با ضرایب ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرند. روش مورد مطالعه شامل دو مرحله است. ابتدا مساله را به یک مساله اصلاح شده تبدیل می‌کنیم و نشان میدهیم تحت برخی شرایط، این دو دستگاه معادل هستند. در مرحله دوم، جواب‌های دستگاه اصلاح شده را به وسیله‌ی برداری از چندجمله‌ایی‌ها تقریب می‌زنیم. چنین برداری با استفاده از روش تربیع مبتنی بر روش گاوس بدست می‌آید که نتیجه آن یک دستگاه خطی خوش وضع می‌باشد. پایداری و همگرایی روش پیشنهادی در فضای $L_۲$ وزن‌دار نشان داده می‌شود. در نهایت با ارائه مثال‌های عددی، روش پیشنهادی تست می‌شود.

پیشگفتار

هدف این پایان نامه، ارائه روشی برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال کوشی منفرد با ضرایب ثابت است. در این روش، هر یک از معادلات دستگاه می‌تواند شاخص‌های متفاوت متعلق به مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ داشته باشند. فرم کلی چنین معادلاتی به صورت زیر است:

$$(D_r f_r)(x) + \sum_{s=1}^{n} (K_{rs} f_s)(x) = g_r(x), \quad |x| < 1, \quad r = 1, \cdots, n \tag{1}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} (D_r f)(x) &= a_r f(x)\nu^{\alpha_r,\beta_r}(x) + \frac{b_r}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)}{y-x}\nu^{\alpha_r,\beta_r}(y)dy \\ (K_{rs} f)(x) &= \int_{-1}^{1} k_{rs}(x,y) f(y)\nu^{\alpha_r,\beta_r}(y)dy \end{aligned}$$

برای $r, s = 1, \cdots, n$، k_{rs} و g_r توابعی مختلط مشخص روی $[-1, 1]^2$ و $[-1, 1]$ و f_r، $r = 1, ..., n$ توابع مجهول هستند. در این روابط a_r و b_r اعدادی حقیقی هستند، بطوریکه

$$b_r \neq 0 \;,\; a_r^2 + b_r^2 = 1 \quad r = 1, \cdots, n$$

و $\nu^{\alpha_r,\beta_r}(x)$ وزن ژاکوبی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\nu^{\alpha_r,\beta_r}(x) = (1-x)^{\alpha_r}(1+x)^{\beta_r} \qquad -1 < \alpha_r, \beta_r < 1$$

در [۶] حالت خاصی که شاخص تمامی معادلات برابر صفر باشد با استفاده از روش نوع تربیع مورد بررسی قرار گرفته است. چنین روشی برای حالتی که شاخص حداقل یکی از معادلات مخالف صفر باشد قابل بکار گیری نیست. چرا که این روش دستگاه خطی کاملی به دست نمی‌دهد و همواره در آن تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر خواهد بود.

در این پایان نامه برای غلبه بر این مشکل، یک سیستم اصلاح شده معرفی می‌شود که در آن تمامی هسته‌های معادلات (۱) که دارای شاخص ۱− هستند، جایگزین یک هسته‌ی مناسب شده و یک ثابت نامعلوم به سمت راست آنها اضافه می شود. نشان می‌دهیم این سیستم معادلات تحت شرایط مشخص با سیستم اصلی معادل است. سپس معادله اصلاح شده را به روش تربیع بر اساس انتگرال گیری گاوس حل می‌کنیم. پایداری همگرایی روش پیشنهادی ثابت می‌شود و تخمین خطا در یک فضای تابعی $L^۲$ وزن‌دار بررسی می‌شود.

ساختار ادامه پایان نامه به شرح زیر است:

در فصل اول به بیان برخی نماد گذاری‌ها و تعاریف و قضایای اساسی که پیش‌نیاز ادامه مطالب هستند می‌پردازیم. در فصل دوم معادله انتگرال منفرد کوشی با ضرایب ثابت معرفی می‌شوند. در فصل سوم دستگاه معادلات انتگرال کوشی و سیستم اصلاح شده در بحث فوق، معرفی می‌گردد و به بیان و اثبات قضایایی درباره شرط معادل بودن دو دستگاه و همگرایی و پایداری سیستم اصلاح شده می‌پردازیم. در فصل چهارم به جزئیات فرایند حل عددی دستگاه اصلاح شده می‌پردازیم. در نهایت، فصل پنجم شامل آزمایش‌های عددی و نتیجه گیری است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اساسی

۱.۱ مقدمه

در بررسی حل پاره‌ای از معادلات دیفرانسیل، به معادلاتی برخورد می‌کنیم که در آنها تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. اولین کسی که در عمل، نظریه معادلات انتگرال را مطرح کرد، لاپلاس [۱] در سال ۱۷۸۲ بود. وی با معرفی معادله $g(x) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-xs} f(s) ds$ آغازگر نظریه معادلات انتگرال بود. پس از وی، فوریه [۲] در مطالعات خود به نوعی از این معادلات، برخورد کرد. آبل [۳] نیز در مکانیک با این نوع معادلات روبرو شد. در سال ۱۸۲۶ پواسون [۴] در نظریه مغناطیس خود نوعی معادله انتگرال را مطرح کرد. در سال ۱۸۳۲ لیوویل [۵] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال و بعد از وی در سال ۱۸۷۰ نیوتن با تبدیل مسأله دیریکله به یک معادله انتگرال از دیگر کسانی بودند که نقش موثری در تکامل نظریه معادله انتگرال را داشتند. در سال ۱۸۹۶ ولترا [۶] برای اولین بار نظریه عمومی معادله انتگرال را مطرح کرد. صورت کلی معادله وی به فرم

[۱] Laplaca
[۲] Fourier
[۳] Abel
[۴] Poisson
[۵] Liouville
[۶] Volterra

زیر می‌باشد

$$h(x)f(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,y)f(y)dy.$$

در حدود سالهای ۱۹۰۳-۱۹۰۰ ریاضیدان سوئدی بنام فرد هلم[۱] یک دسته بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به صورت

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x,y)f(y)dy$$

را مطرح کرد که حالت خاصی از معادلات ولترا می‌باشد و کار ولترا را کامل نمود. در ادامه هیلبرت[۲] نیز تحقیقاتی در مورد معادلات انتگرال انجام داد و مسائلی در معادلات دیفرانسیل را به صورت یک معادله انتگرال تنظیم نمود .

معادلات انتگرال در علومی چون فیزیک، مکانیک، ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل‌سازی، اشعه لیزر، نیروگاههای هسته‌ای و راکتورها، DDE و PDE کاربردهای زیادی دارد و امروزه با توجه به پیشرفت ابزارهای محاسباتی روش‌های متعددی برای حل آنها پیشنهاد می‌شود که هر یک مزایا و معیاب خاص خود را دارد.

۲.۱ انواع معادلات انتگرال

معادلات انتگرالی بستگی به نوع تابع مجهول از حیث خطی و غیرخطی بودن و همچنین حدود انتگرال‌گیری و اینکه تابع مجهول به غیر از زیر علامت انتگرال جای دیگری ظاهر می‌شود یا نه، انواع مختلفی دارد که با توجه به کاربردهای وسیع و متنوع معادلات انتگرال در صنعت، فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی وغیره با نامهای خاصی ظاهر می‌شوند.

[۱] Fredholm
[۲] Hilbert

یک معادله انتگرال خطی در حالت کلی به صورت زیر است.

$$g(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \quad \alpha(x) \leq t, x \leq \beta(x) \tag{۱.۱}$$

در این معادله $u(x)$ تابع مجهول، توابع $g(x), f(x), k(x,t)$ معلوم و λ ثابت عددی است. $\alpha(x), \beta(x)$ حدود انتگرال‌گیری است. تابع $k(x,t)$ را هسته معادله گویند.

اگر در معادله (۱.۱)، حد بالای انتگرال عدد ثابت b و حد پایین انتگرال عدد ثابت a باشد، این نوع معادلات را فردهلم گویند که خود شامل سه نوع است:

الف- اگر در معادله (۱.۱)، $g(x) = ۰$ باشد این نوع را معادله انتگرال فردهلم نوع اول گویند:

$$۰ = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad a \leq t, x \leq b$$

ب- اگر در معادله (۱.۱)، $g(x) = ۱$ باشد، این نوع را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم گویند:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad a \leq t, x \leq b$$

ج- اگر در معادله (۱.۱)، $g(x) = ۱$ $f(x) = ۰$ باشد، این نوع را معادله انتگرال فردهلم همگن گویند یعنی:

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt \quad a \leq t, x \leq b$$

اگر در معادله (۱.۱)، $\alpha(x) = a, \beta(x) = x$ توابعی برحسب x باشند، آن را معادله انتگرال ولترا گویند و به سه دسته تقسیم می‌شوند:

الف- معادله انتگرال خطی نوع اول ولترا

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad x \geq a$$

ب- معادله انتگرال خطی نوع دوم ولترا

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad x \geq a$$

ج- معادله انتگرال خطی همگن ولترا

$$u(x) = \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad x \geq a$$

اگر در معادله (۱.۱)، تابع $u(t)$ زیر علامت انتگرال، توابع غیرخطی نظیر $e^{y(t)}$ یا $(y(t))^p$ یا $\cos(y(t))$ باشند معادله حاصل شده را معادله انتگرال غیرخطی می‌نامند.

دستگاه معادلات انتگرال منفرد کوشی

معادلات انتگرالی منفرد به معادلاتی گفته می‌شود که حداقل یکی از شرایط زیر را داشته باشد.

۱- یکی یا هر دو حد انتگرال‌گیری بالا یا پایین آن نامتناهی باشد.

۲- هسته‌ی معادله در حداقل یک نقطه از دامنه انتگرال‌گیری، تعریف نشده باشد یا به سمت ∞ میل کند.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{b} k(x,t)u(t)dt \quad -\infty \leq t, x \leq b$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{+\infty} k(x,t)u(t)dt \quad a \leq t, x \leq +\infty$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(x,t)u(t)dt \quad -\infty \leq t, x \leq +\infty$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{u(t)}{(x-t)^P}dt \quad \alpha(x) \leq t, x \leq \beta(x), ۰ < P < ۱$$

بسیاری مسائل در مهندسی و فیزیک منجر به یک معادله انتگرال منفرد کوشی به شکل زیر، روی بازه $(-۱, ۱)$ می شود.

$$a(x)f(x)\nu^{\alpha,\beta}(x) + \frac{b(y)}{\pi}\int_{-۱}^{۱}\frac{f(y)\nu^{\alpha,\beta}(y)dy}{y-x} + \int_{-۱}^{۱}k(x,t)f(y)\nu^{\alpha,\beta}(y)dy = g(x) \qquad (۲.۱)$$

در این رابطه g, b, a توابع مشخص و f تابع مجهول است. تابع k روی $[-۱, ۱]^۲$ و تابع g روی $[-۱, ۱]$ تعریف شده است. در حالتی که b, a مقادیر ثابت باشند، معادله فوق را معادله انتگرال کوشی با ضرایب ثابت می‌نامیم.

در این حالت، b, a به گونه‌ای است که $b \neq ۰$ و $a^۲ + b^۲ = ۱$ است. پس معادله (۲.۱)، به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$af(x)\nu^{\alpha,\beta}(x) + \frac{b}{\pi}\int_{-۱}^{۱}\frac{f(y)\nu^{\alpha,\beta}(y)dy}{y-x} + \int_{-۱}^{۱}k(x,y)f(y)\nu^{\alpha,\beta}(y)dy = g(x) \qquad (۳.۱)$$

در تساوی بالا، $\nu^{\alpha,\beta}(x)$ بیانگر وزن ژاکوبی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\nu(x) = (۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta} \qquad -۱ < \alpha, \beta < ۱$$

رابطه α, β با ضرایب ثابت b, a به صورت زیر است:

$$\alpha = M - \frac{۱}{۲\pi i}\log(\frac{a+ib}{a-ib}), \qquad \beta = N - \frac{۱}{۲\pi i}\log(\frac{a+ib}{a-ib})$$

با تعریف عملگرهای K, D به صورت زیر

$$(Df)(x) = af(x)\nu^{\alpha,\beta}(x) + \frac{b}{\pi}\int_{-۱}^{۱}\frac{f(y)}{y-x}\nu^{\alpha,\beta}(y)dy$$

$$(Kf)(x) = \int_{-۱}^{۱}k(x,y)f(y)\nu^{\alpha,\beta}(y)dy$$

می‌توانیم معادله (۳.۱)، را به اختصار، به شکل $(D+K)f = g$ بنویسیم. در فصل بعد درباره‌ی این نوع معادلات با جزئیات بیشتری صحبت خواهیم کرد.

۳.۱ چندجمله‌ایی‌های ژاکوبی

تعریف ۱.۳.۱. چندجمله‌ایهای $p_m(x)$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ در بازه $[a,b]$ متعامد گفته می‌شود اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b w(x)p_i(x)p_j(x)dx = ۰$$

بعلاوه اگر شرط زیر برقرار باشد، این چندجمله‌ای‌ها، یک مجموعه متعامد یکه تشکیل می‌دهند.

$$\int_a^b w(x)p_i^{۲}(x)dx = ۱ \quad (\text{به ازاء تمام مقادیر } i)$$

چندجمله‌ایی‌های ژاکوبی، $p_m^{\alpha,\beta}(x)$، رده‌ایی از چندجمله‌ایی‌هایی هستند که نسبت به وزن $v(x) = (۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}$ در بازه $[-۱,۱]$ متعامد هستند و $-۱ < \alpha,\beta < ۱$. چندجمله‌ایی‌های لژاندر و چبیشف حالت خاصی از چند جمله‌ایی‌های ژاکوبی هستند. برای چندجمله‌ایی‌های ژاکوبی چندین تعریف معادل دیگر نیز وجود دارد که هر کدام مزیت‌های خاص خود را دارد.

تعریف ۲.۳.۱. چندجمله‌ایی‌های ژاکوبی برای تابع وزن $v(x) = (۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+۱)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+۱)}\sum_{m=۰}^{n}\binom{n}{m}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+۱)}{\Gamma(\alpha+m+۱)}\left(\frac{z-۱}{۲}\right)^m.$$

تعریف دیگر برای چند جمله‌ایی های ژاکوبی فرمول رودریگرز[1] به صورت زیر است:

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-۱)^n}{۲^n n!}(۱-z)^{-\alpha}(۱+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(۱-z)^{\alpha}(۱+z)^{\beta}\left(۱-z^{۲}\right)^n\right\}.$$

[1] Rodrigues

در ادامه، به بیان برخی خواص چند جمله‌ایی‌های ژاکوبی می‌پردازیم.

۱. چندجمله‌ایی‌های ژاکوبی در شرط تعامد صدق می‌کنند، یعنی برای $m \neq n$ داریم

$$\int_{-1}^{1} p_m^{(\alpha,\beta)}(x)p_n^{(\alpha,\beta)}(x)v(x)\ dx = 0$$

اگر $n = m$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} p_m^{(\alpha,\beta)}(x)p_n^{(\alpha,\beta)}(x)v(x)\ dx\\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}, \alpha, \beta > -1\end{aligned}$$

۲. این چندجمله‌ای‌ها در روابط متقارن زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned}p_m^{(\alpha,\beta)}(-z) &= (-1)^m p_m^{(\beta,\alpha)}(z)\\ p_m^{(\alpha,\beta)}(-1) &= (-1)^m \binom{m+\beta}{m}\end{aligned}$$

۳. مشتق k-ام $p_m^{(\alpha,\beta)}(z)$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}p_m^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+m+1+k)}{2^k\Gamma(\alpha+\beta+m+1)}p_{m-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(z)$$

برای اثبات روابط فوق و نیز بحث جامع‌تر در این موضوع می‌توان به [۱] و منابع ذکر شده در آن مراجعه نمود.

۴.۱ قاعده تربیع

قاعده تربیع [1] یک نام کلی برای کلیه روش‌های عددی محاسبه انتگرال‌هایی به صورت زیر است:

$$\mathrm{If} = \int_a^b w(s)f(s)ds$$

[1] quadrature rule

که در آن $w(x)$ تابع وزن است. در این روش‌ها از اطلاعات تابع $f(x)$ و یا برخی مشتقات آن در نقاط مشخص به نام گره‌ها استفاده می‌شود. ما تنها حالتی که از مقدار $f(x)$ در گره‌ها استفاده می‌شود را مورد توجه قرار می‌دهیم. در این حالت برای محاسبه If فرض می‌کنیم

$$\int_a^b w(s)f(s)ds = \sum_{i=۱}^{N} w_i f(t_i) = If - Ef$$

در رابطه فوق وزن‌های w_i و گره‌ها به نحوی تعیین می‌شود که خطای Ef برای چندجمله‌ایی‌های با درجه کمتر مساوی $۲N - ۱$ برابر صفر باشد. اکنون به حالت خاصی از قاعده تربیع می‌پردازیم که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد و به قاعده تربیع گاوس-ژاکوبی معروف است. در این قاعده تابع وزن به صورت $w(x) = (۱ - x)^{\alpha}(۱ + x)^{\beta}$ است و چندجمله‌ای‌های مذکور همان چندجمله‌ایی‌های متعامد ژاکوبی هستند. از این قاعده برای محاسبه انتگرال‌هایی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)w(x)$$

که در آن، f یک تابع هموار روی بازه $[-۱, ۱]$ است و $-۱ < \alpha, \beta < ۱$. بنابراین قاعده تربیع گاوس ژاکوبی بر حسب n گره به صورت زیر است:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)(۱ - x)^{\alpha}(۱ + x)^{\beta}\,\mathrm{d}x \approx \lambda_۱ f(x_۱) + \lambda_۲ f(x_۲) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

که در آن، x_iها ریشه‌های چندجمله‌ایی ژاکوبی از درجه n هستند. رابطه فوق برای تمامی چندجمله‌ایی های از درجه کمتر مساوی $۲n - ۱$ دقیق است. مقادیر λ_i از رابطه زیر بدست می‌آیند و به آنها اعداد کریستوفل می‌گویند:

$$\lambda_i = -\frac{۲n + \alpha + \beta + ۲}{n + \alpha + \beta + ۱} \frac{\Gamma(n + \alpha + ۱)\Gamma(n + \beta + ۱)}{\Gamma(n + \alpha + \beta + ۱)(n + ۱)!} \frac{۲^{\alpha+\beta}}{P_n'(x_i)P_{n+۱}(x_i)},$$

که در آن P_n چندجمله‌ایی ژاکوبی از درجه n است.

۵.۱ فضاهای نرم‌دار

در این بخش نمادگذاری‌های مورد استفاده در این پایان نامه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۵.۱ (فضای L^p). برای $۱ \leq p < \infty$، $L^p(\mathbb{R})$ عبارتست از فضای همه توابع اندازه‌پذیر روی $\mathbb{R}$ بطوریکه

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{۱}{p}} < \infty & ۱ \leq p < \infty \\ \sup_{x\in(a,b)} f(x) < \infty & p = \infty \end{cases}$$

اگر $p = ۲$، آنگاه $L^۲(\mathbb{R})$ با ضرب داخلی زیر یک فضای هیلبرت است

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \\ \|f\|_۲^۲ &= \langle f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^۲ dx \end{aligned}$$

تعریف ۲.۵.۱. در فضای هیلبرت H، یک سیستم متعامد، عبارت است از خانواده‌ایی از اعضای H مانند $\{e_i\}$ به نحوی که برای هر دو عضو دلخواه e_i, e_j از این خانواده $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_i j$ باشد.

برای مثال مجموعه $\{p_m^{\alpha,\beta}(x)\}$ از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی یک سیستم متعامد در فضای $L^۲(\mathbb{R})$ می‌باشند.

گزاره ۳.۵.۱ (نامساوی بسل). فرض کنید $\{e_i\}$ یک سیستم متعامد در فضای هیلبرت H باشد در این صورت برای هر $x \in H$ داریم

$$\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle^۲ \leq \|x\|^۲$$

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید X, Y فضاهای خطی نرم‌دار باشند، عملگر خطی $K : X \to Y$ را هنگامی کراندار گوییم، هرگاه عدد مثبت C وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $\varphi \in X$

$$\|K\varphi\| \leq C\|\varphi\|$$

تعریف ۵.۵.۱ (عملگر پیوسته). فرض کنید X, Y فضاهای خطی نرم‌دار باشند، عملگر $K : X \to Y$ را پیوسته گوییم، هرگاه به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ که به x همگراست داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \|Kx_n - Kx\| = ۰$$

قضیه ۶.۵.۱. هر عملگر خطی پیوسته است اگر و تنها اگر کراندار باشد.

برهان. برای اثبات به [۱] مراجعه نمایید. ■

لم ۷.۵.۱ (نامساوی کوشی-شوارتز). فرض کنید X فضای ضرب داخلی باشد، در این صورت

$$\| \langle x, y\rangle \| \leq \|x\|.\|y\|$$

برهان. برای اثبات به [۱] مراجعه نمایید. ■

تعریف ۸.۵.۱ (عملگر فشرده). عملگر خطی $K : X \to Y$ از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y را فشرده گوییم هرگاه هر مجموعه کراندار در X را به مجموعه‌ای نسبتاً فشرده در Y تصویر کند. (یک زیرمجموعه از فضای نرم‌دار X را مجموعه نسبتاً فشرده گویند هرگاه بستار آن فشرده باشد).

تعریف ۹.۵.۱ (عملگر الحاقی). فرض کنید X, Y فضای ضرب داخلی و $K : X \to Y$ عملگری خطی و کراندار باشد عملگر $K^* : Y \to X$ را عملگر الحاقی گویند هرگاه داشته باشیم:

$$\forall x \in X, y \in Y \quad \langle Kx, y\rangle = \langle x, K^*y\rangle$$

نکته ۱۰.۵.۱. در فضاهای ضرب داخلی برای عملگر خطی K همیشه عملگر الحاقی وجود ندارد اما در صورت وجود عملگر الحاقی، K^* منحصربفرد و خطی است.

تعریف ۱۱.۵.۱ (علمگر فردهلم). عملگر کراندار $F : H \to B$ فردهلم است اگر و تنها اگر $\dim Nul(F) < \infty$، $\dim \text{Coker}(F) < \infty$ و $Ran(F)$ در B بسته باشد ($\text{Coker}(F) \equiv B/Ran(F)$). شاخص عملگر فردهلم F برابر است با

$$index(F) = \dim Nul(F) - \dim Nul(F^*)$$

$$index(F) = \dim Nul(F) - \dim Coker(F)$$

۶.۱ درونیابی لاگرانژ در $L^{۲}_{\nu,s}$

فرض کنیم $y_{n,k}$ برای $k = ۱, ۲, \cdots n$، صفرهای چندجمله‌ایی p_n باشند. چندجمله‌ای‌های اساسی لاگرانژ $\ell_{n,k}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\ell^{\nu}_{n,k}(y) = \frac{P_n(y)}{(y - y_{n,k})P'_n(y_{n,k})}.$$

برای یک تابع دلخواه $u(x)$ تصویرگر درونیاب لاگرانژ L^{ν}_n نسبت به نقاط $y_{n,k}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^{\nu}_n : u \mapsto \sum_{k=۱}^{n} u(y_{n,k})\ell^{\nu}_{n,k} \qquad (۴.۱)$$

علاوه براین فرض کنیم

$$\nu_{n,k} = \frac{۱}{\pi}\int_{-۱}^{۱} \ell^{\nu}_{n,k}(y)\nu(y)dy$$

برای $K = ۱, ۲, \cdots$، اعداد کریستوفل از چندجمله‌ای p_n باشند. با این نمادها، برای توابع کراندار u که روی $[-۱, ۱]$ انتگرال‌پذیر ریمان نسبت به وزن ν باشند، قانون مربعی گاوس زیر برقرار است.

$$\frac{۱}{\pi}\int_{-۱}^{۱} u(y)\nu(y)dy \approx \sum_{k=۱}^{n} u(y_{n,k})\nu_{n,k}$$

فصل ۲

معادله انتگرال کوشی

۱.۲ مقدمه

در این فصل درباره معادله انتگرال منفرد کوشی و شرایط حل پذیری آن بحث می‌کنیم. برای انجام این کار نیاز به معرفی برخی نمادگذاری‌ها داریم.

تعریف ۱.۱.۲. فضای متشکل از همه توابع مختلط روی $[-1, 1]$ که نسبت به وزن $\nu^{\alpha,\beta}$، انتگرال‌پذیر مربعی می‌باشند را با فضای $L^2_{\nu^{\alpha,\beta}}$، نمایش می‌دهیم. ضرب داخلی و نرم این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_{\alpha,\beta} &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\nu^{\alpha,\beta}(x)dx \\ \|f\|_{\nu^{\alpha,\beta},2} &= \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \nu^{\alpha,\beta}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۲. زیرفضایی از $L^2_{\nu^{\alpha,\beta}}$، شامل همه توابعی که سری‌های زیر به ازای $\sigma \geq 0$ در آن همگرا باشند

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1+i)^{2\sigma}|C_i(f)|^2 < \infty$$

را با $L^2_{\nu^{\alpha,\beta},\sigma}$ نمایش می‌دهیم که در آن $C_i(f)$ ضریب فوریه از f نسبت به دستگاه متعامد $\{p_m^{\alpha,\beta}\}$ از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی است. $C_i(f)$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_i(f) = \frac{\langle f(x), p_i^{\alpha,\beta}(x)\rangle}{\langle p_i^{\alpha,\beta}(x), p_i^{\alpha,\beta}(x)\rangle}$$