وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

قضایای همگرایی ضعیف برای خانواده‌ی متناهی از نگاشت‌های اکیداً شبه انقباضی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

حمید محمدی

استاد راهنما: **دکتر جمال روئین**

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر بزرگوارم

و

مادر مهربانم

تشکر و قدردانی

تشکر و قدر دانی می‌نمایم از کلیه اساتید گران قدرم، بزرگوارانی که شاگردی ایشان درسهای فراوانی به من آموخت و بزرگترین آنها درس صبر و استقامت است. اتمام این پایان نامه ممکن نبود مگر با راهنمایی‌ها و دلسوزی استاد عزیزم جناب آقای دکتر جمال روئین.

همچنین تشکر می‌کنم از دوستانی که در این دوره‌ی دو ساله با آنها زندگی کردم و محبت و خوش رویی آنها امید به زندگی را در وجودم صد چندان کرد و زیبایی‌های فراوانی را برایم عرضه داشت.

چکیده

مجموعه‌ی توابع اکیداً شبه انقباضی زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی توابع شبه انقباضی هستند که در سال ۱۹۶۷ توسط براودر و پترشاین معرفی شدند. آنها قضایای همگرایی را برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای هیلبرت بررسی کردند که جزئیات کامل این بحث در این پایان نامه آورده شده است. در سال ۲۰۰۱ اوسه‌لایک و یودومن همگرایی ضعیف نگاشتهای اکیداً شبه انقباضی را از فضاهای هیلبرت به فضای باناخ q- یکنواخت هموار و بطور یکنواخت محدّب توسعه دادند

در این پایان نامه همگرایی ضعیف نگاشت‌های اکیداً شبه انقباضی را به یک نقطه‌ی ثابت از نگاشت، در فضاهای باناخ یکنواخت هموار و بطور یکنواخت محدّب را بررسی می کنیم.

مرجع اصلی این پایان نامه [۵] می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: اکیداً محدب، به طور یکنواخت محدّب، به طور یکنواخت هموار، گاتو مشتق پذیر، فرشه مشتق پذیر، اکیداً شبه انقباضی

فهرست

چکیده . . . . پنج

پیش‌گفتار ۱

۱ مفاهیم اولیه **۳**

۱.۱ حد بالایی و پایینی ۳

۲.۱ فضای برداری توپولوژیکی ۴

۳.۱ فضای باناخ ۵

۴.۱ فضای هیلبرت ۸

۵.۱ توپولوژی ضعیف وضعیف- ستاره ۸

۶.۱ فضای انعکاسی ۱۰

۷.۱ توابع محدّب ۱۲

۲ تحدّب، همواری، نگاشت دوگانی **۱۵**

۱.۲ فضای باناخ اکیداً محدّب ۱۵

۲.۲ فضای باناخ به‌طور یکنواخت محدّب ۱۸

۳.۲ مدول تحدّب ۲۱

۴.۲ نگاشت های دوگانی ۲۸
۵.۲ فضای باناخ به‌طور یکنواخت هموار ۳۰
۶.۲ مشتق فرشه ۳۴

۳ برخی نگاشت‌های خاص ۵۵
۱.۳ نگاشت‌های خاص ۵۵
۲.۳ نگاشت های نیم‌بسته ۶۲
۳.۳ همگرایی ضعیف در فضای هیلبرت ۶۶

۴ همگرایی ضعیف در فضای باناخ ۸۲
مراجع ۹۸
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۱
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۴

مقدمه

بررسی مسائل زیادی در فیزیک، شیمی، زیست و اقتصاد منجر به معادلات غیر خطی می‌شوند. به عنوان مثال می توان به رفتار مواد پلاستیکی، امواج سطحی سیّالات، حرکت سیّالات ویسکوز، نواسانات غیرخطی، تابش گرمایی، فرایندهای درون راکتورهای هسته ای و...اشاره کرد. [۲۰] یک ابزار مهم برای حل معادلات غیرخطی، نظریه‌ی نقطه ثابت است که توسط باناخ [۱] پایه گذاری و به وسیله‌ی شاودر، براک، کیرک [۲] و... گسترش یافت. قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ برای اثبات قضیه‌ی پیکارد-لیندلف [۳] در مورد وجود و یگانگی جواب برای معادلات دیفرانسیل و قضیه‌ی نقطه ثابت شاودر برای اثبات قضیه‌ی پیّانو در مورد وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل استفاده شده است.در سال ۱۹۶۷ براودر و پترشاین نگاشت های اکیداً شبه انقباضی را معرفی کردند که مجموعه‌ی این نگاشت‌ها زیر مجموعه‌ای از نگاشت‌های شبه انقباضی را تشکیل می‌دهند. فرض کنید نگاشت T λ -اکیداً شبه انقباضی با دامنه و برد در فضای هیلبرت باشد. فرض کنید $\gamma \in (\lambda, ۱)$ باشد. دنباله‌ی $\{x_n\}$ با گرفتن عضو دلخواه $x_۰$ از دامنه، به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$x_{n+۱} = \gamma x_n + (۱-\gamma)Tx_n. \qquad (۱)$$

براودر و پترشاین ثابت کردند که دنباله‌ی ۱ همگرای ضعیف به یک نقطه‌ی ثابت از نگاشت T می باشد.در این پایان نامه جزئیات کامل این کار آورده شده است. اخیراً مارینو و خو کار براودر و پترشاین

[۱] Banach

[۲] Schauder, Bruk, Kirk

[۳] Picard-Lindelof

را از دنباله‌ی ۱ به دنباله‌ی زیر که به دنباله‌ی تکراری مَن معروف است توسعه دادند.

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n$$

که $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ی حقیقی است که در شرایط خاصی صدق می‌کند. اوسه‌لایک و یودومن، زِنگ و گائو کارهای قبلی را از فضای هیلبرت به فضای باناخ به طور یکنواخت محدّب و q -یکنواخت هموار توسعه دادند. در سال ۲۰۱۰ چیدم و ناصر شهزاد [۵] قضایای همگرایی ضعیف را از فضای باناخ به طور یکنواخت محدّب و بطور یکنواخت هموار که حالت کلی تر از فضای باناخ به طور یکنواخت محدّب و q -یکنواخت هموار است توسعه دادند، که موضوع اصلی این پایان نامه را تشکیل می‌دهد.

این پایان نامه در پنج فصل تنظیم شده است:

در فصل اوّل برخی از مفاهیم اوّلیه آنالیز تابعی را می‌آوریم.

در فصل دوّم برخی خواص هندسی فضاهای باناخ مانند تحدب و همواری را معرفی می‌کنیم. برای این منظور فضای باناخ اکیداً محدّب، فضای باناخ به طور یکنواخت محدّب و فضای باناخ به طور یکنواخت هموار را معرفی می‌کنیم و همچنین قضایایی را که مورد نیاز در فصل ۳ و ۴ و مربوط به این مطالب هستند، بیان و اثبات می‌کنیم. در انتهای فصل در مورد مشتق فرشه و گاتو که در فصل ۴ لازم است بحث خواهیم کرد.

فصل ۳ را با تعریف نگاشت‌های شبه انقباضی شروع کرده و در انتهای فصل در مورد همگرایی ضعیف و قوی چنین نگاشت‌هایی در فضاهای هیلبرت بحث خواهیم کرد.

در فصل ۴ در مورد همگرایی ضعیف نگاشت‌های شبه انقباضی در فضاهای باناخ بحث خواهیم کرد.

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱.۱ حد بالایی و پایینی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[-\infty, \infty]$ باشد. برای هر $k \geq ۱$ قرار می‌دهیم

$$c_k = inf\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, ...\} \qquad b_k = sup\{a_k, a_{k+۱}, a_{k+۲}, ...\}$$

همچنین قرار می‌دهیم

$$.\gamma = sup\{c_۱, c_۲, c_۳, ...\} \qquad \beta = inf\{b_۱, b_۲, b_۳, ...\}$$

β را **حد بالایی** و γ را **حد پایینی** دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\gamma = \liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \beta = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

خواص زیر به آسانی تحقیق می‌شوند:

اولاً $\{b_k\}$ نزولی و $\{c_k\}$ صعودی است و در نتیجه $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ و $\lim_{n\to\infty} c_k = \gamma$.

ثانیاً زیر دنباله‌هایی از $\{a_n\}$ مانند $\{a_{n_i}\}$ و $\{a_{m_i}\}$ موجودند به طوری که $\lim_{n\to\infty} a_{n_i} = \beta$ و $\lim_{n\to\infty} a_{m_i} = \gamma$.

۲.۱ فضای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱.۲.۱. فضای برداری توپولوژیکی X عبارت است از یک فضای برداری حقیقی (یا مختلط) همراه با یک توپولوژی مانند τ که در شرایط زیر صدق کند:

(i) هر مجموعه تک عضوی در X با توپولوژی τ بسته باشد،

(ii) اعمال جمع و ضرب اسکالر با توپولوژی τ پیوسته باشند.

توپولوژی τ بر فضای برداری X را یک **توپولوژی برداری** بر X می‌گوییم. توپولوژی یک فضای برداری توپولوژیکی حافظ انتقال است، یعنی اگر E باز باشد آن‌گاه به ازای هر $a \in X$، $a + E$ نیز باز است. بنابراین تمام مجموعه های باز در این توپولوژی توسط یک پایه موضعی کاملاً مشخص می‌شوند.

تعریف ۲.۲.۱. (انواع فضاهای برداری توپولوژیکی) در این جا X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ است.

(i) X را **موضعاً محدب** گوییم، هرگاه X دارای یک مبنای (پایه) موضعی با عناصر محدب باشد.

(ii) X را **موضعاً محدود**(موضعاً کراندار) گوییم، هرگاه صفر دارای یک همسایگی محدود باشد.

(iii) X را **موضعاً فشرده** گوییم، هرگاه صفر دارای یک همسایگی با بستار فشرده باشد.

(iv) X را **متریک پذیر** گوییم، هرگاه τ با متریکی روی X مانند d سازگار باشد. یعنی τ همان توپولوژی القاء شده توسط d باشد.

(v) X را **نرم پذیر** گوییم، هرگاه نرمی بر X موجود باشد که متریک حاصل از آن با τ سازگار باشد.

(vi) X دارای خاصیت **هاینه-بورل** [۱] است، هرگاه هر مجموعه‌ی بسته وکراندار، فشرده باشد.

۳.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فضای برداری مختلط X را **خطی نرمدار** گوییم، اگر برای هر $x \in X$ یک عدد نامنفی مانند $\|x\|$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر مانند α

(i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

(iii) اگر $\|x\| = ۰$؛ آن‌گاه $x = ۰$.

با قرار دادن $d(x, y) = \|x-y\|$، فضای خطی نرمدار X به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم. خاصیت (i) در تعریف بالا نامساوی مثلثی را نتیجه می‌دهد.

$$\|x+y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \qquad (x, y, z \in X)$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم T نگاشتی خطی از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y باشد. در این صورت $\|T\|$ را به صورت

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| \ : x \in X, \|x\| \leq ۱\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\|T\| < \infty$، آن‌گاه نگاشت خطی T را **کراندار** گوییم.

---

[۱] Heine-Borel

نماد گذاری ۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری نرمدار باشند. مجموعه‌ی همه‌ی نگاشت‌های خطی پیوسته از X به Y را با $B(X,Y)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. (*باناخ-اشتینهاوس*) *فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و $\{T_i\}_{i\in I}$ یک خانواده‌ی(نه الزاماً شمارش پذیر)نگاشت‌های خطی و پیوسته از X به Y. فرض کنیم*

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty \qquad \forall x \in F.$$

در این صورت

$$\sup_{i\in I}\|T_i\| < \infty.$$

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۲.۱ در [۲]. □

قضیه ۱.۳.۴. (*نگاشت باز*) *فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و T یک تبدیل خطی پیوسته و پوشا از X به Y باشد. در این صورت ثابت $c > ۰$ موجود است به طوری که*

$$T(B_X(۰,۱)) \supseteq B_Y(۰,c).$$

که در آن $B_X(x_۰,r) = \{x \in X : \quad \|x - x_۰\| < r\}$.

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۲.۵ در [۲]. □

قضیه ۱.۳.۵. *به ازای هر نگاشت خطی T از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y، هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کنند:*

الف) T کراندار است؛

ب) T پیوسته است؛

ج) T در یک نقطه از X پیوسته است.

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۴.۵ در [۱۶]. □

قضیه ۶.۳.۱. (*هان-باناخ*) *فرض کنیم:*

(a) M *زیر فضایی از فضای برداری حقیقی* X *باشد؛*

(b) *نگاشت* $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *موجود باشد به‌طوری که:*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad (x, y \in X)$$

$$p(tx) = tp(x) \qquad (t \geq 0)$$

(c) $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *یک تابعک خطی باشد. به‌طوری که به ازای هر* $x \in M$، $f(x) \leq p(x)$.

در این صورت تابعک خطی $\Lambda : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *موجود است به‌طوری که* Λ، f *را توسیع می‌دهد، یعنی*

$$\Lambda(x) = f(x) \qquad (x \in M)$$

و

$$-p(-x) \leq \Lambda(x) \leq p(x) \qquad (x \in X).$$

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۲.۳ در [۱۷]. □

نتیجه ۷.۳.۱. *اگر* X *یک فضای نرمدار و* $x_0 \in X$. *آن‌گاه تابعک خطی* Λ *بر* X *هست که:*

$$\Lambda(x_0) = \|x_0\|$$

و

$$|\Lambda x| \leq \|x\| \qquad (x \in X).$$

۴.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۴.۱. H را یک **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام حاصل ضرب داخلی x و y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد

الف) برای هر $x \in X$ $\qquad \langle x, x\rangle \geq ۰$؛

ب) $\langle x, x\rangle = ۰$ اگر وفقط اگر $x = ۰$؛

ج) برای هر $x, y, \in X$ $\qquad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$؛

د) برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\qquad \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$.

با قرار دادن[۱] $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ فضای ضرب داخلی X به یک فضای خطی نرمدار با نرم $\|.\|$ تبدیل می‌شود. این نرم را نرم حاصل از ضرب داخلی می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. هر فضای ضرب داخلی را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرم حاصل از ضرب داخلی تام باشد، **فضای هیلبرت** گوییم.

۵.۱ توپولوژی ضعیف وضعیف- ستاره

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $X^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \text{ خطی و پیوسته } f\}$ دوگان آن باشد. برای هر $f \in X^*$، نگاشت $\varphi_f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم که برای هر $x \in X$، $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle = f(x)$. هرگاه f در X^* تغییر کند خانواده‌ی نگاشت های $\{\varphi_f\}_{f\in X^*}$ را به دست می‌آوریم.

تعریف ۱.۵.۱. **توپولوژی ضعیف** $\sigma(X,X^*)$ روی X کوچکترین توپولوژی روی X است که تمام نگاشت‌های $\{\varphi_f\}_{f\in X^*}$ را پیوسته می‌کند.

اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد، همگرایی $\{x_n\}$ به x در توپولوژی ضعیف را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی $\{x_n\}$ به x را با $x_n \to x$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۲.۵.۱. *فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد. در این صورت:*

الف) $x_n \rightharpoonup x$ اگر و فقط اگر برای هر $f\in X^*$، $\langle f,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle$؛

ب) اگر $x_n \to x$، آن‌گاه $x_n \rightharpoonup x$؛

ج) اگر $x_n \rightharpoonup x$، آن‌گاه $\|x_n\|$ کراندار است و $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|$.

اثبات. رجوع شود به گزاره‌ی ۳.۵ در [۲]. □

قضیه ۳.۵.۱. *فرض کنیم $C\subseteq X$ محدّب باشد. در این صورت C به طور ضعیف بسته است اگر و فقط اگر به طور قوی بسته باشد.*

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۷ در [۲]. □

تعریف ۴.۵.۱. برای هر $x\in X$، نگاشت $\varphi_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می‌کنیم که برای هر $f\in X^*$، $\varphi_x(f)=\langle f,x\rangle$. هرگاه x در X تغییر کند خانواده‌ی نگاشت های $\{\varphi_x\}_{x\in X}$ را به دست می‌آوریم.

تعریف ۵.۵.۱. **توپولوژی ضعیف-ستاره** که با $\sigma(X^*,X)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین توپولوژی روی X^* است که تمام نگاشت‌های $\{\varphi_x\}_{x\in X}$ را پیوسته می‌سازد.

برای دنباله داده شده $\{f_n\}$ در X^*، همگرایی f_n به f برای توپولوژی ضعیف ستاره $\sigma(X^*,X)$ را با $f_n \rightharpoonup^* f$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۶.۵.۱. *فرض کنیم $\{f_n\}$ یک دنباله در X^* باشد. در این صورت :*

الف) $f_n \rightharpoonup^* x$ *اگر و فقط اگر برای هر* $x \in X$، $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$؛

ب) $f_n \to f$ *آن‌گاه* $f_n \rightharpoonup f$ *و اگر* $f_n \rightharpoonup f$ *آن‌گاه* $f_n \rightharpoonup^* f$ ؛

ج) اگر $f_n \rightharpoonup^* f$، *آن‌گاه* $\|f_n\|$ *کراندار است و* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

اثبات. رجوع شود به گزاره‌ی ۳.۱۳ در [۲] □

۶.۱ فضای انعکاسی

نگاشت $J : X \longrightarrow X^{**}$ را برای هر $x \in X$ و $f \in X^*$ به صورت $\langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$ تعریف می‌کنیم. واضح است که J خطی و ایزومتری است یعنی؛ برای هر $x \in X$،

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Jx, f\rangle| = \sup_{\|f\|=1} |\langle f, x\rangle| = \|x\|.$$

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و J نگاشت تعریف شده در بالا باشد. فضای X را **انعکاسی** گوییم هرگاه $J(X) = X^{**}$. وقتی X انعکاسی باشد، X و X^{**} را به طور ضمنی یکی می‌گیریم.

قضیه ۲.۶.۱. *(کاکوتانی[۱]) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت X انعکاسی است اگر و فقط اگر $B_X = \{x \in X \ : \|x\| \leq 1\}$ برای توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ فشرده باشد.*

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۱۷ در [۲] □

---

[۱] Kakutani

لم ۳.۶.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت X انعکاسی است اگر و فقط اگر X^* انعکاسی باشد.*

اثبات. رجوع شود به نتیجه‌ی ۳.۲۱ در [۲]. $\square$

نتیجه ۴.۶.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی و $K \subseteq X$ یک زیر مجموعه‌ی محدّب، بسته و کراندار باشد. در این صورت K برای توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ فشرده است.*

اثبات. رجوع شود به نتیجه‌ی ۳.۲۲ در [۲]. $\square$

قضیه ۵.۶.۱. *فرض کنیم X یک فضای باناخ انعکاسی و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار در X باشد. در این صورت $\{x_n\}$ یک زیر دنباله‌ی مستخرج مانند $\{x_{n_k}\}$ دارد که برای توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ همگرا است.*

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۱۸ در [۲]. $\square$

عکس قضیه بالا نیز برقرار است.

قضیه ۶.۶.۱. *(ابرلین-شمولیان [۱]) فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد به طوری که هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X دارای یک زیر دنباله‌ی مستخرج $\{x_{n_k}\}$ همگرا برای توپولوژی $\sigma(X, X^*)$ باشد، در این صورت X انعکاسی است.*

اثبات. رجوع شود به قضیه‌ی ۳.۱۹ در [۲]. $\square$

[۱] Eberlein-Smulian

۷.۱ توابع محدّب

تعریف ۱.۷.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty] = \tilde{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. در این صورت $D(f) := \{x \in X, \qquad f(x) < +\infty\}$ را دامنهٔ اساسی(موثر) f می‌گوییم.

تعریف ۲.۷.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری و $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ یک تابع باشد. در این صورت

الف) f را **محدّب** گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$

$$f\left(\lambda x + (۱ - \lambda)y\right) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

ب) f را **اکیداً محدّب** گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ ، $f(x) < \infty$ ، $f(y) < \infty$ و به ازای هر $۰ < \lambda < ۱$ داشته باشیم

$$f\left(\lambda x + (۱ - \lambda)y\right) < \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(y).$$

ج) f را **سره** گوییم هرگاه $x \in X$ باشد که $f(x) < \infty$.

تعریف ۳.۷.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ را در نقطه $x_\circ \in X$ **شبه پیوسته پایینی**(نیم پیوسته پایینی)گوییم هرگاه

$$f(x_\circ) \leq \liminf_{x \to x_\circ} f(x) := \sup_{V \in U_{x_\circ}} \inf_{x \in V \setminus \{x_\circ\}} f(x).$$

که در آن $U_{x_\circ}$ گردایهٔ همه همسایگی‌های $x_\circ$ است.

قضیه ۴.۷.۱. *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک و $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ یک تابع باشد. در این صورت احکام زیر معادلند:*

الف) f شبه پیوسته پایینی است؛

ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\{x \in X : \ f(x) \leq \alpha\}$ بسته است.

اثبات. (الف) $\Leftarrow$ (ب): فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد. نشان می‌دهیم $A_\alpha = \{x \in X:\ f(x) > \alpha\}$ باز است. برای این منظور فرض کنید $x_\circ \in A_\alpha$ دلخواه باشد. چون f نیم پیوسته‌ی پایینی است، داریم

$$\alpha < f(x_\circ) \leq \sup_{V \in U_{x_\circ}} \inf_{x \in V \setminus \{x_\circ\}} f(x).$$

بنابراین $V_\circ \in U_{x_\circ}$ هست که $\alpha < \inf_{x \in V_\circ \setminus \{x_\circ\}} f(x)$. بنابراین $V_\circ$ یک همسایگی $x_\circ$ هست که $V_\circ \subseteq A_\alpha$. پس A_α باز است.

(ب) $\Leftarrow$ (الف): فرض کنیم $x_\circ \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ با $\lambda < f(x_\circ)$، دلخواه باشند. مجموعه $A_\lambda = \{x \in X:\ f(x) > \lambda\}$ یک همسایگی $x_\circ$ بوده و لذا $A_\lambda \in U_{x_\circ}$. پس

$$\lambda < \inf_{x \in A_\lambda} f(x_\circ) \leq \sup_{V \in U_{x_\circ}} \inf_{x \in V \setminus \{x_\circ\}} f(x).$$

حال اگر $\lambda \to f(x_\circ)$، خواهیم داشت

$$f(x_\circ) \leq \sup_{V \in U_{x_\circ}} \inf_{x \in V \setminus \{x_\circ\}} f(x).$$

و لذا f در $x_\circ$ شبه نیم پیوسته‌ی پایینی است. $\square$

قضیه ۵.۷.۱. *فرض کنیم X یک فضای نرمدار و $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty] = \tilde{\mathbb{R}}$ تابعی محدّب و بر یک مجموعه‌ی باز و ناتهی U از بالا کراندار باشد آن‌گاه f بر $intD(f)$ پیوسته است.*

اثبات. ابتد نشان می‌دهیم که f روی U پیوسته است. فرض کنیم $x_\circ \in U$ دلخواه باشد. بدون آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود می‌توان فرض کرد که $x_\circ = \circ$ و $f(x_\circ) = \circ$.

توضیح:(بگیرید $f_1(x) = f(x + x_\circ) - f(x_\circ)$. در این صورت f_1 تابعی محدّب بوده و بر $U_1 := U - x_\circ$ از بالا کراندار است. داریم $\circ \in U_1$ و $f_1(\circ) = \circ$. بنابراین f_1 در صفر پیوسته بوده و لذا $\lim_{x \to \circ} f(x + x_\circ) = f(x_\circ)$. یعنی f در $x_\circ$ پیوسته است.)

می‌توان فرض کرد که $U = \{x \in X;\ \|x\| < r\}$. گیریم $\circ < \epsilon < ۱$ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم