بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۶/۱۲/۲۷

۱۰۲۴۹۷

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

عنوان

دسته‌بندی جبرهای لی پوچتوان بوسیله ضربگر شور

استاد راهنما

جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار

استاد مشاور

جناب آقای دکتر مسعود طوسی

نگارش

روح الله اندیشه

زمستان ۱۳۸۶

تاریخ ....

شماره ....

پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»+

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

باز گشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۰۰/۳۹۲۸/ت/د مورخ ۸۶/۱۱/۸ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **آقای روح الله اندیشه** شماره شناسنامه: ۷۳ صادره از: **سنندج** متولد: ۱۳۶۰ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: ریاضی

با عنوان:

دسته بندی جبرهای لی پوچ توان به وسیله ضربگر شور

به راهنمایی:

آقای دکتر علیرضا سالمکار

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۶/۱۱/۱۵ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۷/۵ (هفده و نیم) درجه بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	
۲-**مشاور:** آقای دکتر مسعود طوسی	دانشیار	شهید بهشتی	
۳- **داور:** آقای دکتر محمد رضا رجب زاده مقدم	استاد	فردوسی مشهد	
۴- **داور:** آقای دکتر محمدمهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	

تقدیم به پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم

سپاسگزاری

در آغاز بر خود واجب می دانم که از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سالمکار که تجربه های گرانبهای خود را که نتیجه سالها مرارت و کوشش است با گشاده‌نظری در اختیار اینجانب قرار دادند و آقای دکتر دکتر طوسی استاد مشاور گرامی‌ام که هموراه مرا از راهنمایی‌های خود بهرمند ساختند تشکر و قدردانی کنم. همچنین ازکلیه دوستان و همکلاسی های عزیزم خصوصاً آقایان بهروز عدالت زاده و هادی بیگدلی که مرا در انجام این پایان نامه یاری دادند قدردانی می کنم.

روح الله اندیشه

بهمن ١٣٨٦

چکیده

ضربگر شور از سال ۱۹۰۴ توسط شور[۱] در مورد گروه ها ارائه شده است، که تاکنون کارهای زیادی روی آن انجام شده است. در این پایان نامه برآنیم که مفهوم ضربگر شور را در جبرهای لی پوچتوان با بعد متناهی مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم. بویژه اگر L یک جبر لی پوچتوان با بعد متناهی n باشد و $t(L) = n(n-۱)/۲ - \dim(\mathcal{M}(L))$ ، ما به مشخص نمودن تمام چنین جبرهایی می‌پردازیم که در آنها $۰ \le t(L) \le ۵$.

۱ I. Schur

فهرست مطالب

مقدمه

پایان‌نامه حاضر به بررسی ساختار جبرهای لی پوچتوان با بُعد متناهی، ضربگر شور آنها و نیز ارتباط بین بُعد ضربگر شور با بُعد جبر لی مربوطه می‌پردازد. این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است:

فصل اول شامل سه بخش است که بخش اول آن مروری بر مفاهیم پایه‌ای جبرهای لی دارد. در بخش دوم به معرفی و بررسی جبرهای لی پوچتوان و حل‌پذیر پرداخته‌ایم. بخش سوم نحوه ساختن ماگما و جبر لی آزاد روی یک مجموعه غیرتهی و خواص آنها را ارائه می‌دهد.

در فصل دوم به مقاله بَتِن [1]، تحت عنوان «دسته‌بندی جبرهای لی پوچتوان بوسیله ضربگر شور آنها» می‌پردازیم. بتن با فرض $\dim(L) = n$ و قرار دادن $t(L) = n(n-۱)/۲ - \dim(\mathcal{M}(L))$ به مشخص نمودن جبرهای لی‌ای می‌پردازد که در آنها $t(L) = ۰, ۱, ۲$ می‌باشد. این فصل نیز شامل سه بخش است. بخش اول آن اختصاص به دو تعریف معادل از ضربگر شور و خواص آن دارد. در بخش دوم خواهیم دید که هر جبر لی متناهی بُعد دارای حداقل یک پوشش می‌باشد. پس از آن کرانی برای ضربگر شور آن بدست می‌آوریم. بخش سوم به دسته بندی جبرهای لی متناهی بعدی که در آنها $t(L) = ۰, ۱, ۲$ اختصاص دارد.

فصل سوم نیز بررسی مقاله هاردی [6]، با نام «دسته‌بندی جبرهای لی پوچتوان بوسیله ضربگر شور آنها با $t(L) = ۳, ۴, ۵, ۶$» می‌باشد. که دو بخش را شامل می‌شود. در بخش اول کرانهایی جدید برای $\dim(L^۲)$ و $\dim(\mathcal{M}(L))$ ارائه می‌دهیم. و در نهایت جبرهای لی متناهی بعدی را که در آنها $t(L) = ۳, ۴, ۵$ دسته‌بندی می‌کنیم.

فصل اول

مفاهیم مقدماتی درباره جبرهای لی

در این فصل، تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصول آتی جمع‌آوری شده است. برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر و یافتن برهان برای قضایای این فصل، می توان به مراجع [4]و [5]مراجعه نمود.

۱-۱ تعاریف و مفاهیم اساسی جبرهای لی

تعریف ۱-۱-۱ فرض‌کنید V فضایی برداری روی میدان k باشد. دراین صورت نگاشت $f : V \times V \longrightarrow V$ را دو خطی[۱] گوییم هرگاه به ازای هر $x, y, z \in V$ و $a, b \in k$،

$$f(ax+by, z) = af(x, z) + bf(y, z),$$
$$f(x, ay+bz) = af(x, y) + bf(x, z).$$

تعریف ۱-۱-۲ فرض‌کنید A یک فضای برداری روی میدان k باشد. در این صورت A را یک جبر می‌نامیم هرگاه نگاشتی دوخطی مانند f روی A تعریف شده باشد. در این حالت $f(a, b)$ را با ab نشان می‌دهیم. A را شرکت‌پذیر نامیم هرگاه به ازای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم $(ab)c = a(bc)$.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنید L یک فضای برداری با نگاشت دوخطی $[\ ,\ ] : L \times L \to L$ باشد. در این صورت L را یک جبر لی[۲] می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in L$،

الف) $[x, y] = -[y, x]$؛

ب) $J(x, y, z) := [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = ۰$ (اتحاد ژاکوبی)

$[x, y]$ را *حاصلضرب لی* y, x می‌گوییم. بوضوح از قسمت (الف)، نتیجه می‌شود که اگر مشخصه میدان k مساوی ۲ نباشد آنگاه به ازای هر $x \in L$، $[x, x] = ۰$. جبر لی L را از **بُعد متناهی** نامیم هرگاه L به عنوان فضای برداری دارای بُعد متناهی باشد.

مثال ۱-۱-۴ فرض کنید A جبر شرکت پذیر دلخواهی باشد. اگر به ازای هر $a, b \in A$ تعریف کنیم

۱ Bilinear

۲ Lie Algebra

$[a,b] = ab - ba$ آنگاه به سادگی تحقیق می‌شود که A همراه با این عمل دارای ساختار جبر لی می‌باشد که آن را با $[A]$ نشان می‌دهیم. آدو[۱] نشان داد که هر جبر لی روی میدانی با مشخصه صفر را می توان به عنوان زیرجبری از چنین جبر لی ای در نظر گرفت. ایوازاوا[۲] همین حکم را در مورد جبرهای لی که روی میدان‌های با مشخصه ناصفر تعریف شده‌اند ثابت نمود.

مثال ۱-۱-۵ فرض‌کنید $M_n(F)$ فضای ماتریسهای $n \times n$ روی میدان F باشد. به ازای هر $A, B \in M_n(F)$ حاصلضرب لی را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$[A,B] = AB - BA.$$

بنابر مثال ۱ـ۱ـ۴، $M_n(F)$ به همراه عمل فوق تشکیل یک جبر لی روی میدان F می‌دهد.

مثال ۱-۱-۶ فضای برداری $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. به سادگی بررسی می‌شود که $\mathbb{R}^3$ همراه با عمل تعریف شده زیر دارای ساختار جبر لی می باشد: برای هر $X = (x_1, x_2, x_3)$ و $Y = (y_1, y_2, y_3)$،

$$[X,Y] = X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

که در آن $X \times Y$ همان ضرب خارجی دو بردار می‌باشد.

تذکر ۱-۱-۷ اگر L یک جبر لی متناهی بعُد روی میدان k با پایه $\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ باشد، آنگاه به ازای هر $1 \le i,j \le n$، اسکالرهایی مانند $a_{ij}^t \in k$ وجود دارند به‌طوری که

$$[x_i, x_j] = \sum_{t=1}^{n} a_{ij}^t x_k$$

---

۱ Ado

۲ Iwasawa

مجموعه اسکالرهای a_{ij}^t را ساختار ثابت [1] برای L نسبت به پایه β می‌گوییم که بوضوح این اسکالرها به پایه β کاملاً بستگی دارند. واضح است که برای مشخص نمودن ضرب لی، کافی است مقادیر a_{ij}^t ها معلوم باشند، اما با توجه به شرایط $[x_i, x_i] = 0$ و $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ در جبرهای لی کافی است، این مقادیر به ازای $1 \leq i < j \leq n$ مشخص شوند.

تعریف ۱-۱-۸ زیرفضای $H \subseteq L$ را **زیرجبر لی** [2] نامیده و با نماد $H \leq L$ نشان می‌دهیم، هرگاه H، تحت عمل القا شده از L دارای ساختار جبر لی باشد. همچنین زیر فضای I از L را ایدآل L نامیده و با نماد $I \trianglelefteq L$ نشان می‌دهیم هرگاه $[x, y] \in I$ (برای هر $x \in I$ و $y \in L$). واضح است که هر ایدآل یک زیر جبر است.

بدیهی است که با استفاده از ایدآل I از L می‌توان **جبر لی خارج قسمت** L/I را تعریف نمود. همچنین جبر لی L را ساده [3] نامند اگر تنها ایده‌آلهای آن $\{0\}$ و L باشند.

اگر I یک ایدآل از جبر لی L باشد آنگاه یک تناظر دوسویی بین ایدآل‌های L/I و ایدآل‌هایی از L که شامل I می‌باشند برقرار است.

لم ۱-۱-۹ فرض کنید X, Y دو زیرجبر لی از جبر لی L باشند. در این صورت مجموعه‌های

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\},$$

$$[X, Y] = \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$$

۱ Structure constant

۲ Subalgebra

۳ Simple

زیرجبرهایی از L می‌باشند که به ترتیب مجموع و جابجاگر X, Y نامیده می‌شوند. حاصلجمع در جبرهای لی را می‌توان به تعداد دلخواهی تعمیم داد.

فرض کنید $x_1, \ldots x_n \in L$، در این صورت

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$$

حاصلضرب لی از وزن n می‌باشد.در حالت خاص $[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{n-\text{بار}}]$ را با نماد $[x,_n y]$نشان می‌دهیم.

اگر $X_1, X_2, \ldots X_n \subseteq L$، آنگاه زیرجبر جابجاگر لی از وزن n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n]$$

در حالت خاص چنانچه $X_1 = X$ و $X_2 = \ldots = X_n = Y$، حاصلضرب لی

$$[X, \underbrace{Y, \ldots, Y}_{n-\text{مرتبه}}]$$

را با نماد$[X,_n Y]$ نشان می‌دهیم.

اگر $X \subseteq L$ آنگاه اشتراک تمام زیرجبرهای L را که شامل X هستند **زیرجبر تولید شده توسط** X نامیده و با نماد $< X >$ نشان می‌دهیم. در واقع $< X >$ کوچکترین زیر جبر L شامل X است. این زیر جبر شامل تمام اعضای L است که با استفاده از دنباله‌ای متناهی از عمل‌های فضای برداری و حاصلضربهای لی روی اعضای X به دست می‌آیند.

$X \subseteq L$ **یک مجموعه مولد** برای L است هرگاه $L =< X >$. جبر لی L را **متناهیا تولید شده**[1] نامند، هرگاه X متناهی باشد.

[1] Finitely generated

لم و قضیه‌های زیر به سادگی از تعاریف نتیجه می‌شوند.

لم ۱-۱-۱۰ فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد، در این صورت

i) فرض کنید I ایدآلی از L باشد. در این صورت L/I آبلی است اگر و تنها اگر $[L, L] \subseteq I$.

ii) اگر $H, K \trianglelefteq L$ آنگاه $H + K \trianglelefteq L$؛

iii) اگر $H, K \trianglelefteq L$ آنگاه $[H, K] \trianglelefteq L$؛

iv) اگر H, K ایدآل‌هایی از جبر لی L باشند آنگاه $H \cap K$ نیز ایدآلی از L است.

حاصلجمع مستقیم جبرهای لی $L_۱, L_۲$ را که با $L_۱ \oplus L_۲$ نمایش می‌دهیم به صورت

$$L_۱ \oplus L_۲ = \{(l_۱, l_۲) \mid l_۱ \in L_۱, l_۲ \in L_۲\}$$

همراه با عمل ضرب زیر تعریف می‌شود

$$[(l_۱, l_۲), (l_۳, l_۴)] = ([l_۱, l_۳], [l_۲, l_۴])$$

قضیه ۱-۱-۱۱ ۱) فرض کنیم $L_۲, L_۱$ دو جبر لی باشند در این‌صورت

$$[L_۱ \oplus L_۲, L_۱ \oplus L_۲] = [L_۱, L_۱] \oplus [L_۲, L_۲]$$

۲) هرگاه A و H به ترتیب ایدآل و زیرجبری از L باشند به طوری که $L = A + H$ و $[A, L] = ۰$، آنگاه $[L, L] = [H, H]$

تعریف ۱-۱-۱۲ اگر $L_۲, L_۱$ دو جبر لی باشند دراین صورت تبدیل خطی $\varphi : L_۱ \to L_۲$ را یک همریختی لی گوییم هرگاه

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad , \quad \forall x, y \in L_۱$$

توجه شود که براکت سمت چپ در تساوی بالا در L_1 و براکت دوم در L_2 در نظر گرفته شده است. همریختی لی φ را **یکریختی** گوییم هرگاه φ دوسویی باشد.

به آسانی دیده می شود که اگر φ یک همریختی لی باشد هسته φ، $\ker\varphi$، یک ایدآل از L_1 و برد φ، $Im\varphi$، یک زیرجبر لی L_2 می‌باشند. برای هر ایدآل I در L، همریختی $\pi : L \to L/I$ با ضابطه $\varphi(l) = l + I$ را **همریختی طبیعی** می‌نامیم.

قضیه ۱-۱-۱۳ (قضایای یکریختی) ۱) هرگاه $\varphi : L_1 \to L_2$ یک همریختی جبرهای لی باشد آنگاه $L_1/\ker\varphi \cong Im\varphi$؛

۲) هرگاه I, J ایدآل‌هایی از جبرلی L باشد آنگاه $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$؛

۳) هرگاه I, J ایدآل‌هایی از جبر لی L باشند به‌طوری که $I \subseteq J$، آنگاه J/I ایدآلی از L/I است و

$$\frac{L/I}{J/I} \cong \frac{L}{J}.$$

تعریف ۱-۱-۱۴ فرض کنیم L یک جبر لی باشد. به ازای هر $x \in L$ تبدیل خطی $ad_x : L \to L$ با ضابطه $\mathrm{ad}_x(l) = [x, l]$، برای هر $l \in L$، را **نگاشت الحاقی**[۱] می‌نامند.

۱-۲ حل‌پذیری و پوچتوانی جبرهای لی

تعریف ۱-۲-۱ جبر لی L را آبلی گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in L$، $[x, y] = ۰$. واضح است که هر فضای برداری مانند V را می‌توان یک جبر لی آبلی در نظر گرفت که در آن ضرب لی به صورت زیر تعریف

۱ Adjoint

شده است:

$$[a,b]=\circ \quad , \quad \forall a,b\in V$$

همچنین ملاحظه می‌شود که اگر A یک جبر شرکت پذیر آبلی باشد آنگاه $[A]$، یک جبر لی آبلی خواهد بود.

تعریف ۱-۲-۲ فرض کنید L یک جبر لی باشد، آنگاه مرکز L را به صورت

$$Z(L)=\{x\in L|\ [x,y]=\circ,\forall y\in L\}$$

و مشتق آن را به صورت $L^{۲}=[L,L]$ تعریف می‌کنیم.

به سادگی دیده می‌شود که $Z(L)$ و $L^{۲}$ ایده‌آلهای L هستند. همچنین $L/L^{۲}$ یک جبر لی آبلی است.

تعریف ۱-۲-۳ فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد.

i) اگر قرار دهیم $L^{۱}=L$ و برای هر $n\geq ۱$، $L^{n+۱}=[L^n,L]$، آنگاه یک زنجیر از ایده‌آلها به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$L^{۱}\supseteq L^{۲}\supseteq\ldots\supseteq L^n\supseteq\ldots$$

که آن را **سری مرکزی پایینی**[۱] L می‌نامیم.

ii) اگر قرار دهیم $L^{(\circ)}=L$ و برای هر $n\geq ۱$، $L^{(n+۱)}=[L^{(n)},L^{(n)}]$، آنگاه سری

$$L^{(\circ)}\supseteq L^{(۱)}\supseteq\ldots\supseteq L^{(n)}\supseteq\ldots$$

از ایدآل‌های L بدست می‌آید که **سری مشتق**[۲] L نامیده می‌شود.

۱ Lower Central Series
۲ Derived Series

iii) اگر قرار دهیم $Z_1(L) = Z(L)$، و $Z_n(L)$ را ایده‌آلی از L در نظر بگیریم که در شرط $Z(L/Z_{n-1}(L)) = Z_n(L)/Z_{n-1}(L)$ صدق کند. آنگاه یک سری از ایدآل‌ها به صورت

$$Z_1(L) \subseteq Z_2(L) \subseteq \cdots \subseteq Z_n(L) \subseteq \cdots$$

حاصل می‌شود که آن را **سری مرکزی بالایی**[1] L می‌نامیم.

iv) سری متناهی از زیرجبرهای L به صورت

$$0 = L_0 \leq L_1 \leq \ldots \leq L_n = L$$

را یک سری مرکزی می نامند هرگاه به ازای $0 \leq i \leq n-1$ $[L_{i+1}, L_i] \subseteq L_i$.

اگر به ازای یک $n \in \mathbb{N}$، $L^{n+1} = 0$ آنگاه L را **پوچتوان**[2] (از رده حداکثر n) و اگر $L^{(n)} = 0$ آنگاه L را **حل پذیر**[3] (از طول مشتق حداکثر n) می‌نامیم.

لم ۱-۲-۴ فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. در این صورت

الف) به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$، $[L^m, L^n] \subseteq L^{m+n}$؛

ب) به ازای هر $n \geq 0$، $L^{(n)} \subseteq L^{2^n}$؛

پ) اگر L پوچتوان از رده c باشد آنگاه L حل‌پذیر از طول مشتق حداکثر n است که $n = [\log_2(c+1)]+1$ ([ ] تابع جزء صحیح است.)

قضیه ۱-۲-۵ فرض کنید L یک جبر لی باشد. در این صورت

[1] Upper Central Series
[2] Nilpotent
[3] Solvable

۱) اگر L پوچتوان باشد آنگاه هر زیرجبر و هر تصویر همریخت از L پوچتوان است.

۲) اگر $L/Z(L)$ پوچتوان باشد آنگاه L پوچتوان است.

قضیه ۱-۲-۶ (انگل) [1] اگر L یک جبر لی از بعد متناهی باشد آنگاه L پوچتوان است اگر و تنها اگر برای هر $x \in L$، ad_x پوچتوان باشد؛ یعنی عدد طبیعی n وجود داشته باشد که برای هر $x \in L$، $\mathrm{ad}_x^n = 0$.

قضیه ۱-۲-۷ فرض کنید L یک جبر لی باشد. در این صورت

۱) اگر L حل‌پذیر باشد آنگاه هر زیرجبر و هر تصویر همریخت از L حل‌پذیر است.

۲) اگر I ایدآلی از L باشد به‌طوری که I و L/I حل‌پذیر باشد آنگاه L حل‌پذیر است.

۳) اگر I, J ایدآل‌هایی حل‌پذیر از L باشند آنگاه ایدآل $I + J$ نیز حل‌پذیر است.

قضیه ۱-۲-۸ (محک کارتان[2] برای حل‌پذیری) اگر L یک جبر لی روی میدان k با مشخصه صفر باشد به طوری که برای هر $x \in L$ و $y \in L^2$، $Tr([\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]) = 0$ آنگاه L حل‌پذیر است که در آن $Tr : M_n(k) \to k$ تابعک خطی رَد [3] می باشد.

تعریف ۱-۲-۹ فرض کنید $X \subseteq L$ باشد. در این صورت **مرکز ساز و ایدآل‌ساز** X در L را به ترتیب با نمادهای $C_L(X)$ و $I_L(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_L(X) = \{y \in L \mid [X, y] = 0\} \quad , \quad I_L(X) = \{y \in L \mid [X, y] \subseteq X\}$$

لم ۱-۲-۱۰ فرض کنید L جبر لی دلخواهی باشد. دراین صورت

---
۱ Engel
۲ Cartan
۳ Trace

الف) اگر $X \subseteq L$ آنگاه $C_L(X) \leq L$؛

ب) اگر $X \trianglelefteq L$ آنگاه $C_L(X) \trianglelefteq L$؛

پ) اگر X زیرفضایی از L باشد آنگاه $C_L(X) \triangleleft I_L(X) \leq L$.

قضیه ۱-۲-۱۱ هر جبر لی پوچتوان متناهیاً تولید شده از بعد متناهی است.

۱-۳ جبر لی آزاد

برای ساختن جبر لی آزاد روی مجموعه مفروض X روشهای متفاوتی وجود دارد، در این‌جا از متداولترین آنها که با استفاده از ماگمای آزاد و سپس جبر شرکت پذیر آزاد روی X انجام می‌شود استفاده می‌کنیم. ابتدا بایستی ماگمای آزاد را تعریف کنیم.

تعریف ۱-۳-۱ مجموعه ناتهی M به همراه یک عمل دوتایی روی آن را یک **ماگما**[1] می‌نامند.

حال ماگمای آزاد به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد و خانواده X_nها، $(n \geq 1)$ به صورت زیر تعریف شوند،

(۱) $X_1 = X$

(۲) $X_n = \dot{\bigcup}_{p+q=n} (X_p \times X_q)$ (اجتماع جدا از هم)

قرار دهید $M_X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و عمل دوتایی "." را روی M_X با استفاده از جزئیت کانونی

$$X_p \times X_q \longrightarrow X_{p+q} \subseteq M_X$$

[1] Magma