[section]

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

برخی از روش های تکراری برای پیدا کردن نقطه ثابت و برای حل مسائل مینیمم سازی محدب محدود شده

استاد راهنما

دکتر عبد الرحمن رازانی

استاد مشاور

دکتر رضا میرزایی

پژوهشگر

مهدیه مرسلی

۱۳۹۱

نام خانوادگی دانشجو: مرسلی نام: مهدیه

عنوان: برخی از روش های تکراری برای پیدا کردن نقطه ثابت و برای حل مسائل مینیمم سازی محدب محدود شده

استاد راهنما: دکتر عبد الرحمن رازانی

استاد مشاور: دکتر رضا میرزایی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۱ تعداد صفحات: ۸۶

واژگان کلیدی:

چکیده

-abstract

سپاس‌گزاری...

از آنجا که برای ایجاد هر مجموعه علمی، بدون همیاری پیشکسوتان آن علم ممکن نخواهد بود وبا تمسک به سنت " من لم یشکر المخلوق فلم یشکر الخالق"

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر رازانی،که با فراغ بال همواره راهنمای بنده بوده صمیمانه تشکر و تقدیر می نمایم وسعادت و سلامتی را از خداوند متعال خواستارم و تشکر از استاد مشاور خود، جناب آقای دکتر میرزایی که در گرداوری این مجموعه این حقیر را یاری نمودند.

که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. و تشکر و قدر دانی از تمام عزیزانی که در گردآوری این مجموعه یاری نموده اند.

فهرست مطالب

چکیده

این پایان نامه در دو قسمت ارائه می شود. در قسمت اول، طرح تکرار صریح و ضمنی برای بدست آوردن نقطه ی ثابت نگاشت های غیر انبساطی که روی زیر مجموعه ی محدب بسته ای از یک فضای هیلبرت حقیقی تعریف شده است معرفی می شود. بعلاوه همگرایی قوی، دنباله های تولید شده به وسیله الگوریتم پیشنهادی را به نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی، مطالعه می کنیم. در حقیقت این نقطه ثابت، جواب یک نامساوی تغییراتی که روی مجموعه نقاط ثابت تعریف شده است، می باشد.
در قسمت دوم، طرح های تکرار صریح وضمنی برای بدست آوردن مینیمم کننده تقریبی یک مسئله مینیمم سازی محدب ارائه می شود. بعلاوه، دنباله تولید شده توسط این الگوریتم همگرای قوی به جواب مسئله مینیمم سازی محدب ساخته شده را نشان می دهد. چنین جوابی، یک جواب از نامساوی تغییراتی که روی مجموعه نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی تعریف شده، می باشد. بعلاوه نتایج ارائه شده دراین پایان نامه، بعضی از نتایج ارائه شده تاکنون را بست و گسترش خواهد داد.

پیشگفتار

در سال ۲۰۰۰ مدافی [۲۴] روش تقریبی چسبنده برای بدست آوردن نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی ارائه نمود. او همچنین همگرای دنباله ارائه شده در این روش را بررسی کرد. بعد از آن در سال ۲۰۰۴ خو [۳۳] همگرایی قوی دنباله تولید شده با روش تقریبی چسبنده را به یک جواب یگانه از مسئله نامساوی تغییراتی خاصی اثبات نمود. در واقع این جواب روی مجموعه ای از نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی قرار می گیرد.می توان به عنوان اهمیت این روش، از کاربرد آن درحل یک مسئله ی مینیمم سازی محدب نام برد.
در سال ۲۰۰۳ خو [۳۰] روش تکرار برای بدست آوردن جواب تقریبی یک مسئله مینیمم سازی درجه دوم ارائه نمود. در واقع این جواب روی مجموعه ای از نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی که روی فضای هیلبرت حقیقی تعریف می شوند،قرار می گیرد.وی ثابت نمود که دنباله تولید شده به وسیله روش پیشنهاد شده، به طور قوی به جواب یگانه مسئله مینیمم سازی درجه دوم همگرا است.
مارینو و خو [۲۳] و با ترکیب طرح تکرار مدافی [۲۴] و خو [۳۳] با ترکیب الگوی تکرار پیشنهاد شده با مدافی [۲۸] و خو [۱۰]، یک روش تکرار کلی تر را ارائه نمودند. بعلاوه ثابت کردند دنباله تولید شده به وسیله این طرح قویا به جواب یگانه مسئله نامساوی تغییراتی خاصی همگرا است. در واقع این نامساوی تغییراتی شرط بهینه برای یک مسئله مینیمم سازی خاصی خواهد شد. لو [۲۱] و کوین [۲۶] کاربردهایی از طرح تکرار معرفی شده به وسیله مارنیو و خو را ارائه نموده اند. یامادا در سال ۲۰۰۴ روشی به نام روش گام به گام هیبرید شیب نزولی برای حل مسئله نامساوی تغییراتی ارائه نمود و همگرایی دنباله تولید شده به وسیله این روش را مطالعه کرد. اخیرا در سال ۲۰۱۰ تیان [۲۹] روش تکرار معرفی شده به وسیله یاداما را با روش دیگری ترکیب نمود، بدین دلیل که الگویی ضمنی وصریح برای ساختن نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی روی فضای هیلبرت بدست آورد. بعلاوه همگرایی قوی در الگو به نقطه ثابت نگاشت تحت شرایط خاصی اثبات گردید. همچنین می توان روش های تکرار دیگری برای حل مسئله نقطه ثابت،نامساوی تغییراتی و مسائل بهینه سازی در مراجع [۵] -[۹] یافت.
از طرف دیگر، روش گرادیان - تصویر برای بدست آوردن جوابهای تقریبی مسئله مینیمم سازی محدب وجود دارد. به عنوان مثال به مرجع [۲۸] مراجع نمایید. همگرایی دنباله تولید شده به وسیله این روش بستگی به رفتار گرادیان تابع در گیر در مسئله دارد. اگر گرادیان قویا یکنوا نباشد آنگاه همگرایی قوی دنباله تولید شده با روش گرادیان - تصویر از کار خواهد افتاد.

اخیرا خو [۳۱] یک عملگر جهت نگهداری به عنوان جایگزینی به روش گرادیان - تصویر در فضای نامتناهی البعد همگرایی قوی نیست. همچنین دو اصلاحیه از الگوریتم گرادیان - تصویر که همگرایی قوی را نشان می دهد را ارائه نموده است [۳۱]. بعدها مسئله مینیمم سازی را جهت بدست آوردن الگوی تکرار که یک دنباله ای تولید شود منظم نمود. در واقع دنباله ی تولید شده همگرایی نرم - به - نرم مینیمم جواب مسئله مینیمم سازی محدب ساخته شده خواهد شد. در این پایان نامه، با توجه به خاصیت تصویر الگوهای

تکرار معرفی شده به وسیله ی تیان [۲۹] را به طور صریح وضمنی تعمیم خواهیم داد.
در ادامه لازم به ذکر است که این پایان نامه براساس سه فصل طراحی شده است. فصل اول به بیان مقدمات مورد نیاز برای مطالعه ی دو فصل دیگر اختصاص یافته است. فصل دوم، همگرایی دنباله به یک نقطه ثابت نگاشت غیر انبساطی در فضای هیلبرت را بررسی می کند. فصل سوم، همگرایی قوی دنباله تولید شده در الگوریتم های صریح و ضمنی به جواب مسئله مینیمم سازی محدب اختصاص یافته است. بعلاوه جواب نامساوی تغییراتی که روی مجموعه نقاط ثابت نگاشت غیر انبساطی تعریف شده است را (توسط الگوریتم معرفی شده) مطالعه می کنیم.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه ای

در فصل اول ابتدا با تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های آتی مورد استفاده قرارمی گیرد، آشنا می شویم.

تعریف ۱.۰.۱. نقطه ثابت تابع f، نقطه ای است که توسط f به خودش تصویر می شود. به این معنی که اگر X یک فضای متریک و $f: X \to X$ یک تابع باشد، آنگاه $f(x) = x$.

از نظر هندسی یک نقطه ثابت به صورت $(x, f(x))$ است که روی نمودار خط $y = x$ واقع است. مجموعه همه نقاط ثابت f را با $Fix(f)$ نشان می دهیم. به عبارت دیگر

$$Fix(f) = \{x \in X, f(x) = x\}.$$

مثال ۲.۰.۱. الف) اگر f روی اعداد حقیقی به صورت $f(x) = x^{۲} - ۳x + ۴$ تعریف شود در این صورت عدد۲ نقطه ثابت تابع f است؛ زیرا تابع $f(۲) = ۲$.

ب) هر تابع پیوسته بر بازه $[o, ۱]$ دارای نقطه ثابت است.

برهان. تابع $f: [o, ۱] \longrightarrow [o, ۱]$ را در نظر بگیرید اگر $f(o) = o$، $f(۱) = ۱$ آنگاه f حداقل یک نقطه ثابت دارد. زیرا $f(o) \geq o$، $f(۱) \leq ۱$ و در این صورت $f(o) - o \geq o$، $f(۱) - ۱ \leq ۱$ خواهد شد. بنابر این تابع $g(x) = f(x) - x$ را که تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی است در نظر می گیریم، در این صورت تابع $g(x)$ برای $x = o$ مقدار مثبت وبرای $x = ۱$ مقدار منفی خواهد شد. در نتیجه بنابر خاصیت مقدار

میانی برای توابع پیوسته x_o ای هست که $g(x_o)=o$ لذا $f(x_o)-x_o=o$ در نتیجه $f(x_o)=x_o$ واز آنجا x_o نقطه ثابت f است. $\square$

لازم به ذکر است که همه توابع نقطه ثابت ندارند بعنوان مثال:

اگر f روی اعداد حقیقی به صورت $f(x)=x+۱$ تعریف شود در این صورت f نقطه ثابت ندارند زیرا به ازای هیچ $x\in \mathbf{R}$، x ای نمی توان یافت به قسمی که تساوی $x=x+۱$ برقرار باشد.

تعریف ۳.۰.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. تابع $d: X\times X\longrightarrow R$ به ازای هر $x,y,z\in X$ درشرایط زیر صدق می کند را متریک می گوییم:

۱. $d(x,y)\geq o$،

۲. $d(x,y)=o \Longleftrightarrow x=y$،

۳. $d(x,y)=d(x,y)$،

۴. $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$.

مثال ۴.۰.۱. ۱. مجموعه اعداد حقیقی R و مجموعه اعداد گویا ی Q با متریک

$$d(x,y)=|x-y|$$

یک فضای متریک است. این متریک را متریک معمولی می نامند.

۲. فرض کنید X یک مجموعه غیر تهی است و d با ضابطه زیر تعریف شده است:

$$d(x,y)=\begin{cases} o & x=y \quad \text{اگر} \\ ۱ & x\neq y \quad \text{اگر} \end{cases}$$

در این صورت، بدیهی است که رابطه های (۳) ,(۲) ,(۱) تعریف (۳.۰.۱) برقرارند. برای تحقیق در برقراری رابطه (۴)، به صورت زیر عمل می کنیم. اگر $x, y, z \in X$ سه حالت اتفاق می افتد: در حالتی که $x = y = z$ است، داریم:

$$d(x, y) = o, d(x, z) + d(z, y) = o,$$

در حالتی که

$x = y, x \neq z, z \neq y$ طرف چپ (۴) صفر وطرف راست آن مثبت است.

بالاخره، درحالتی که $x \neq y \neq z$ ، طرف چپ (۴) یک و طرف راست آن دو است.

این فضا، یا (X, d) را فضای گسسته می نامند.

متریک معمولی روی $R^۲$ با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$d((x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲)) = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}.$$

تعریف ۵.۰.۱. می گوییم دنباله f_n یک دنباله کشی است هرگاه برای هر $\varepsilon > o$ داده شده یک N وجود داشته باشد به گونه ای که برای همه اعداد $n \geq N$ و $m \geq N$ داشته باشیم $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.

هر دنباله همگرا یک دنباله کشی است.

تعریف ۶.۰.۱. فضای متریک کامل: اگر در فضای متریک (X, d)، هر دنباله کشی در آن همگرا باشد در این صورت فضای متریک (X, d) کامل است.

قضیه ۷.۰.۱. *زیر فضای X از فضای متریک کامل (M, d) فقط و فقط وقتی کامل است که بسته باشد.*

برهان. فرض کنید X بسته و x_n دنباله ای کشی در X باشد چون M کامل است پس x_n همگرا به نقطه ای مانند $x \in M$ است. چون X بسته است پس $x \in X$ یعنی X کامل است.

بالعکس، اگر X کامل باشد و اگر x یک نقطه ی انباشتگی X باشد، آن گاه دنباله ای مانند x_n در X وجود دارد که به x همگراست. بنابراین $x \in X$. واین نشان می دهد که X بسته است. $\square$

تعریف ۸.۰.۱. مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان F می نامیم در صورتی که عمل جمع + در V و عمل دیگری به نام ضرب اسکالر اعضای F در اعضای V طوری تعریف شوند که دارای خواص زیر باشند:

۱. خاصیت جمع: $(V, +)$ یک گروه آبلی است.

۲. خواص ضرب اسکالر:

(آ) به ازای هر $x \in V$، $1x = x$.

(ب) به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $x \in V$، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

(ج) به ازای هر $\alpha, \beta \in F$ و هر $x, y \in V$،

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \alpha y.$$

توجه داشته باشید که منظور از اسکالر، میدان F است.

تعریف ۹.۰.۱. ضرب داخلی روی فضای مختلط برداری V، نگاشتی به صورت

$$\langle ., . \rangle = V \times V \longrightarrow C,$$

است؛ به گونه ای که برای هر x, y, z در V و $\lambda \in C$ داریم

۱. به ازای هر $x \in V$,$(x, y) \geq o$.

۲. $(x, x) = o$ اگر وتنها اگر $x = o$.

۳. $(x, y) = \overline{(y, x)}$،

۴. $(\lambda x, y) = \lambda(y, x)$،

۵. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$،

هر فضای برداری را که در آن یک ضرب داخلی تعریف شده باشد یک فضای ضرب داخلی می نامیم.

مثال ۱.۰.۱۰. ۱. در R، ضرب معمولی یک ضرب داخلی است.

۲. در R^n، ضرب داخلی معروفی تعریف می شود که به صورت زیر است:

$$(x,y)=x_۱y_۱+x_۲y_۲+...+x_ny_n.$$

۳. ضرب معرفی شده در تعریف بالا قابل تعمیم به ضرب داخلی در C^n است.

تعریف ۱.۰.۱۱. اگر X فضای برداری مختلط یا حقیقی

$$\|.\|:X\longrightarrow\mathbb{R}$$

تابعی باشد که به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و هر $\nu,\omega\in X$ در شرایط زیر صدق کند،

۱. $\nu=o\Longleftrightarrow\|\nu\|=o$،

۲. $\|\nu\|\geq o$،

۳. $\|\lambda\nu\|=|\lambda|\|\nu\|$،

۴. $\|\nu+\omega\|\leq\|\nu\|+\|\omega\|$.

در این صورت تابع $\|.\|$ را نرم روی فضای برداری نرمدار می گوییم.

ملاحظه ۱.۰.۱۲. *ضرب داخلی دو بردار x و y از فضای R^n را به صورت:*

$$(x,y)=\Sigma_{i=۱}^{n}x_iy_i,$$

و همچنین نرم یا اندازه x را به صورت

$$\|x\|=(x,x)^{۱/۲},$$

تعریف می کنیم.

فضای R^n یک فضای برداری است که یک ضرب داخلی بر آن تعریف شده است. در مثال ها دیدیم که این ضرب داخلی را به صورت

$$(x, y) = x_۱ y_۱ + ... + x_n y_n,$$

تعریف می کنند. از این رو،

$$\|x\| = (\sum x_i^۲)^{۱/۲},$$

یک نرم روی R^n تعریف می کند. R^n با این نرم یک فضای متریک است.

تعریف ۱۳.۰.۱. یک فضای خطی نرم دار، کامل گفته می شود هرگاه هر دنباله ی کشی در این فضا همگرا باشد، یعنی برای هر دنباله ی کشی $\langle f_n \rangle$ در این فضا یک عنصر f متعلق به این فضا وجود داشته باشد به گونه ای که $f_n \longrightarrow f$.

تعریف ۱۴.۰.۱. هر فضای خطی نرم دار کامل فضای باناخ نامیده می شود.

تعریف ۱۵.۰.۱. فضای برداری با ضرب داخلی کامل را یک فضای هیلبرت می نامند.

فضای هیلبرت را معمولا با H نشان می دهیم.

قضیه ۱۶.۰.۱. : *فضاهای L^p فضاهای کامل هستند.*

برهان. برای اثبات به کتاب آنالیز حقیقی رویدن مراجعه کنید. $\square$

مثال ۱۷.۰.۱. R^n، $\ell^۲$، $L^۲([a, b])$ فضای هیلبرت است.

در زیر فضایی را مورد مطالعه قرار می دهیم که مفهوم مجموعه ی باز در آن ها بنیادی است و سایر مفاهیم بر حسب آن تعریف می شوند. این فضاها را فضای توپولوژیک می نامند و بسیار کلی تر از فضاهای متریک هستند. مطالب این قسمت از کتاب آنالیز حقیقی رویدن آورده شده اند.

تعریف ۱۸.۰.۱. هر فضای توپولوژیک (X,τ) عبارت است از یک مجموعه ی ناتهی X از نقاط، توأم با خانواده ی τ از زیرمجموعه های آن (که آنها را باز خواهیم نامید) که دارای خواص زیر هستند:

۱. $\phi \in \tau$ ، $X \in \tau$،

۲. $Q_۱ \in \tau, Q_۲ \in \tau$، ایجاب می کند $Q_۱ \cap Q_۲ \in \tau$،

۳. $Q_\alpha \in \tau$ ایجاب می کند $\cup Q_\alpha \in \tau$،

خانواده τ برای مجموعه X یک توپولوژی نامیده می شود.

خو اصی که در این تعریف گفته شده، در مورد مجموعه های باز یک فضای متریک (X,d) صدق می کنند، از این رو به هر فضای متریک (X,d) می توان یک فضای توپولوژیک، (X,τ) وابسته ساخت،که در آن خانواده ی مجموعه های باز (X,d) است. فضای توپولوژیکی که به این ترتیب به یک فضای متریک وابسته می شود، متریک پذیر نامیده می شود، و d را یک متریک این فضای توپولوژیک می نامند.

خاصیت های توپولوژیک در حالت کلی کاملا با خاصیت های فضای متریک متفاوت و گاهی بهتر است فرض کنیم که فضای توپولوژیک در بعضی شرایط های اضافی که در فضای متریک درستند، صدق می کند.

مجموعه شرط های زیر را روی یک فضای توپولوژیک در نظر می گیریم:

۱. برای دونقطه متمایز داده شده ی x,y یک مجموعه ی باز وجود دارد که y را در بر دارد ولی x را دربر ندارد.

۲. برای دونقطه متمایز داده شده ی x,y یک مجموعه های باز مجزای $O_۱,O_۲$ وجود دارند به گونه ای $x \in O_۱, y \in O_۲$ است.

۳. علاوه بر(۱) برای هر مجموعه بسته F ویک نقطه x که به F متعلق نیست، مجموعه های باز مجزاهای باز مجزای $O_۱,O_۲$ وجود دارند به گونه ای که $x \in O_۱$ ، $F \subset O_۲$.

۴. علاوه بر(۱) برای دو مجموعه ی بسته مجزای $F_۱,F_۲$ ومجموعه های باز مجزای $O_۱,O_۲$ وجود دارند

به گونه ای که $F_1 \subset O_1, F_2 \subset O_2$.

این شرط ها را اصل ها ی جدا سازی می نامند، و همه به وسیله ی یک فضای متریک برآورده میَ شوند. هر فضای توپولوژیک که شرط (۲) را برآورد فضای هاسدروف نامیده می شود.

تعریف ۱.۰.۱۹. فضای توپولوژیک X همبند گفته می شود هرگاه در X دو مجموعه ی باز مجزا و ناتهی O_1, O_2 وجود نداشته باشند، به گونه ای که $X = O_1 \cup O_2$ باشد. هردومجموعه ی باز نظیر آن ها را یک جداسازی X می نامند. چون هر مجموعه مکمل یک مجموعه ی دیگر است، پس این مجموعه ها به همان خوبی که باز هستند، بسته نیز می باشند. هر جفت از مجموعه های بسته و مجزای ناتهی که اجتماع آن ها برابر X است، یک جداسازی X است، زیرا هر یک از این مجموعه ها باید باز نیز باشند. فضای X همبند است اگر و تنها اگر تنها زیر مجموعه های X که هم بازند و هم بسته اند مجموعه های ϕ و X باشند. یک زیر مجموعه ی E از X همبند است هرگاه در توپولوژی موروث از X یک فضای همبند باشد: بنابراین E همبند است هرگاه در X مجموعه های باز O_1, O_2 وجود نداشته باشند به گونه ای که هر دو E را قطع کنند، $E \subset O_1 \cup O_2$ و $E \cap O_1 \cap O_2 = \phi$ باشد. یا می توان گفت زیر مجموعه ی E از فضای متریک M را همبند نامیم در صورتی که هیچ دو مجموعه ی مانند A و B یافت نشود که هر دو ناتهی باشد، $E = A \cup B$، $\overline{A} \cap B = \phi$ و $A \cap \overline{B} = \phi$. ذیلا، زیر مجموعه های همبند $\mathbb{R}$ را مشخص می کنیم:

قضیه ۱.۰.۲۰. *زیر مجموعه ی $E \subseteq \mathbb{R}$ همبند است اگر و فقط اگر E یک بازه باشد. به عبارت دیگر، اگر $x \in E$، $y \in E$ و $x < z < y$، آن گاه $z \in E$.*

گزاره ۱.۰.۲۱. *گیریم f یک نگاشت پیوسته از یک فضای همبند X به روی یک فضای توپولوژیک Y، است. در این صورت Y همبند است.*

برهان

گیریم O_1, O_2 یک جداسازی Y هستند. در این صورت $f^{-1}[O_1]$ و $f^{-1}[O_2]$ زیر مجموعه های باز و مجزا ی X هستند که اجتماع آن ها برابر X است. چون f پوشاست، هیچ یک از دو مجموعه ی $f^{-1}[O_1]$

و $f^{-1}[O_2]$ تهی نیستند، پس این جفت یک جداسازی X است. بنابراین اگر Y همبند نباشد، X نیز همبند نیست و گزاره با برهان خلف ثابت می شود.

گزاره ۲۲.۰.۱. *گیریم f روی یک فضای همبند X یک تابع جقیقی پیوسته است. گیریم x و y، دو نقطه از X و c یک عدد حقیقی است به گونه ای که $f(x) < c < f(y)$ در این صورت یک $z \in X$ وجود دارد به گونه ای که $f(z) = c$ است.*

برهان

اگر f مقدار c را نپذیرد، آنگاه $f^{-1}[(-x,c)]$ و $f^{-1}[(c,x)]$ مجموعه های باز مجزا هستند که اجتماعشان برابر X است. این مجموعه ها تهی نیستند، زیرا x به اولی و y به دومی تعلق دارد. بنابراین X همبند نیست.

گزاره ۲۳.۰.۱. *یک زیرمجموعه ی E از R تنها هنگامی همبند است که یک فاصله یا یک نقطه ی تنها باشد.*

تعریف ۲۴.۰.۱. گوی باز به مرکز x و به شعاع r به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$B(x;r).$$

تعریف ۲۵.۰.۱. فضای متریک (X,d) را محدب متری نامیم، اگر برای هر $x,y,z \in X$ که $x \neq y \neq z$ موجود باشد؛ به طوری که

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y),$$

به عبارت دیگر، X محدب متری است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ وهر $r_1, r_2 \geq o$ رابطه زیر بر قرار باشد

$$B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2) \neq \phi \Longleftrightarrow d(x_1,x_2) \leq r_1 + r_2,$$

به عبارت دیگر، تابع $f : (a,b) \to R$ را محدب گوییم در صورتی که به ازای هر دو عدد $x,y \in (a,b)$ و هر λ که $o \leqslant \lambda \leqslant 1$، داشته باشیم:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-y)f(y).$$

نتیجه ۲۶.۰.۱. *اگر f بر (a,b) محدب باشد آن گاه بر این بازه پیوسته است.*

ملاحظه ۲۷.۰.۱. *اگر f بر (a,b) محدب باشد و a و b اعداد حقیقی باشند آن گاه لازم نیست f در a و b از راست وچپ پیوسته باشد حتی اگر در a و b تعریف شود.*

تعریف ۲۸.۰.۱. اگر در تعریف محدب، تساوی را برداریم آن گاه f را اکیدا محدب می نامیم.

تعریف ۲۹.۰.۱. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را نگاشت L - لیپ شتیز گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\|fx - fy\|_X \leq L\|x - y\|_Y.$$

تعریف ۳۰.۰.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت غیر انبساطی (لیپ شتیز پیوسته با ضریب لیپ شتیز معادل یک) گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

تعریف ۳۱.۰.۱. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت قویا غیر انبساطی گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$. داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\|^۲ \leq \|x - y\|^۲ - \|(I - T)x - (I - T)y\|^۲.$$

لازم به ذکر است که قویا غیر انبساطی، غیر انبساطی را نتیجه می دهد.

تعریف ۳۲.۰.۱. عملگر غیر خطی T که دارای دامنه $D(T) \subseteq H$ و برد $R(T) \subseteq H$ است گفته می شود:

۱. یکنوا اگر: $\forall x, y \in D(T) \qquad \langle x - y, Tx - Ty\rangle \geqslant o,$.

۲. β قویا یکنواست اگر: وجود داشته باشد $\beta > o$ به طوری که

$$\langle x - y, Tx - Ty\rangle \geq \beta\|x - y\|^۲, \forall x, y \in D(T).$$

۳. v معکوس قویا یکنوا گفته می شود(بطور خلاصه $ism - v$) اگر وجود داشته باشد $v > o$ که

$$\langle x - y, Tx - Ty\rangle \geq v\|x - y\|^۲, \forall x, y \in D(T).$$

مثال: اگر T، بنابراین $I-T$ یکنواست.

عملگر معکوس قویا یکنوا استفاده وسیعی برای حل مسئله کاربردی در میدانهای مختلف دارد.

تصویر (نزدیک ترین نقطه) متریک P_c از یک فضای هیلبرت Hبه یک زیر مجموعه بستهء محدب C از H به صورت زیر تعریف می شود، در واقع اگر $x \in H$ آنگاه :

$$\|x - P_c x\| = inf\{\|x-y\| : y \in C\}.$$

$P_c x$ تنها نقطه ای در C با خاصیت فوق است.

برای اثبات لم زیر به کتاب آنالیز تابعی استاندارد مراجعه کنید.

لم ۳۳.۰.۱. *اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $x \in H$ آنگاه:*

۱. $z = P_c x$ *اگر و فقط اگر به ازای هر* $y \in C$

$$\langle x-z, y-z\rangle \le o.$$

۲. $z = P_c x$ *اگر و فقط اگر به ازای هر* $y \in C$

$$\|x-z\|^۲ \le \|x-y\|^۲ - \|y-z\|^۲.$$

۳. *به ازای هر* $x, y \in C$

$$\langle P_c x - P_c y, x-y\rangle \ge \|P_c x - P_c y\|^۲.$$

در نتیجه، P_c غیر انبساطی و یکنوا است وتصویر نگاشت P_c ، $ism - ۱$ است.

در یک فضای هیلبرت H برای همه ی $x, y \in H$ و $\lambda \in [o, ۱]$. داریم:

$$\|\lambda x + (۱-\lambda)y\|^۲ = \lambda\|x\|^۲ + (۱-\lambda)\|y\|^۲ - \lambda(۱-\lambda)\|x-y\|^۲.$$

تعریف ۳۴.۰.۱. یک دنباله $\{x_n\}$ از بردارها در یک فضای ضرب داخلی X همگرای ضعیف به بردار در X نامیده می شود اگر

$$\forall y \in X \qquad \langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle, \text{ وقتی که } \qquad n \longrightarrow \infty,$$