وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

خاصیت نقطه ثابت توسط خواص فضای دوگان

اساتید راهنما

دکتر علی پارسیان

دکتر شهرام سعیدی

پژوهشگر

همایون عزتی امینی

مهر ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تفرش
دانشکده ریاضی

رساله کارشناسی ارشد

خاصیت نقطه ثابت توسط خواص فضای دوگان

دانشجو

همایون عزتی امینی

استاد راهنمای اول: دکتر علی پارسیان امضاء:

استاد مشاور: دکتر شهرام سعیدی امضاء:

«به نام یزدان یگانه»

*   *   *

کلیه حق و حقوق مرتبط بر نتایج مطالعات و ارزیابی و تحقیق و بررسی موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه تفرش می باشد.

* * تعهد نامه * *

اینجانب همایون عزتی امینی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه تفرش، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، تعهد می‌نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه مطالعات و تحقیقات خودم بوده و از جایی کپی برداری نشده است و اتمام آن، نتیجه‌ی تلاش‌ها و مطالعات مداوم اینجانب و مشاوره‌ها و راهنمایی‌های مستمر اساتید بزرگوارم بوده است.

با تقدیم و احترام

همایون عزتی امینی

1390/6/31

تقدیم؛

به مادرم که مهرش در دلم گرامی و مقدس است، او که با گفتن قصه‌ها، لذت و شگفتی را به من هدیه داد.

به پدرم که مهرش بنایی شد برای تلاش پرشورم در کسب علم، به او که با سادگی‌اش به هم‌دردی با انسان، فرایم خواند.

به همسرم که با اشتیاق وافر، احساس مسئولیت نسبت به هم‌نوع را در من شعله‌ور می‌سازد.

به خانواده‌ام که برای آسودگی خاطر را برایم به ارمغان آوردند. به آنان‌که به من آموختند و در کشاکش دهرو عرصه پرتکاپوی حیات، بدون ریا و تملق در خدمت تعالی انسان بوده‌اند.

اما فراتر از همه،

شما دلیل بودید برای آنچه که امروز از زندگی دارم و می‌خواهم.

قدردانی

سپاس پروردگاری که بشریت را به چراغ اندیشه و فکر آراست، تا به مدد آن بر ظلمت‌ها و نادانسته‌ها فائق آید. آنچه را که بشر امروزی در همنشینی می‌بینید و به رایگان می‌آموزد، نتیجه تجربه و کوشش‌های گذشتگان در مدت هزاران سال می‌باشد. نتیجه عملکرد اینجانب در این پایان‌نامه نیز حاصل راهنمایی‌های ثمربخش بزرگوارانی در منصب استاد می‌باشد. و با نهایت سپاس از جناب آقای دکتر علی پارسیان که همواره در این مقطع تحصیلی از محضر ایشان کسب علم و تجربه کردم.

و تشکر ویژه از جناب آقای دکتر شهرام سعیدی که علاوه بر مشاوره این پایان‌نامه، با بزرگواری و شکیبایی، چگونگی تجزیه و تحلیل کار را به من آموختند و به من انگیزه مضاعف بخشیدند.

از اساتید ارجمندی که با لطف فراوان، ره‌آورد تلاش اینجانب را در این دوره با بزرگواری مورد مطالعه قرار داده و داوری این پایان نامه را برعهده داشتند سپاسگزارم.

و از همه بزرگوارانی که هر یک به نحوی همگام و همراه من بودند کمال تشکر و سپاس را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه، سعی شده است وجود خاصیت نقطه‌ی ثابت را برای نگاشت‌های غیرانبساطی روی زیر مجموعه‌های ناتهی کراندار از فضاهای هندسی باناخ، که هر یک به گونه ای با هم در ارتباط می باشند را با ویژگی های مشترکی مورد ارزیابی قرار دهیم.

در ادامه خاصیت «کادیک‌کلی» را در توپولوژی‌های مختلف بررسی کرده و فضاهای خاص هندسی را بررسی می‌کنیم.

واژه های کلیدی: «خاصیت نقطه ثابت» - «خاصیت کادیک‌کلی» - «خاصیت کادیک‌کلی یکنواخت» - «کادیک کلی یکنواخت ضعیف» ، «O - محدب» و «E - محدب» .

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در چند دهه ی اخیر نظریه نقطه ثابت نگاشت های غیر انبساطی به یک زمینه ی مهم مطالعاتی در ریاضیات محض و کاربردی تبدیل شده است. در این زمینه برخی خواص هندسی فضاهای باناخ نقش اساسی ایفا می کنند. نگاشت‌های غیر انبساطی به غیر از اینکه تعمیم های بدیهی از نگاشت‌های انقباضی هستند، از اهمیت بالایی برخوردارند ، زیرا یکی از اولین کلاس‌های نگاشت‌های غیر خطی بودند که قضایای نقطه ثابت با استفاده از خواص هندسی جالب را، بجای خواص فشردگی، در فضاهای باناخ بدست آوردند.

تعیین شرایطی روی یک فضای باناخ X، بطوری‌که هر نگاشت غیر انبساطی از یک زیر مجموعه محدب، کراندار، بسته و غیر تهی از X به توی خودش دارای خاصیت نقطه ثابت باشد، سالهای زیادی مورد توجه بوده است.

یک فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف نامیده می‌شود هر گاه کلاس مجموعه های C، از بالا به مجموعه ای از مجموعه های محدب فشرده ضعیف محدود شده باشد.

همچنین یک فضای باناخ X دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره می باشد هر گاه X یک فضای دوگان باشد و کلاس مجموعه‌های C به مجموعه‌ای از مجموعه‌های محدب فشرده ضعیف ستاره محدود شود.

اف.ریس در سالهای 1909 و 1910، فضاهای L^P را برای $1 < P < 2$ و $2 < P < +\infty$ تعریف کرد و نشان داد این فضاها کامل هستند. ریس همچنین فاصله در فضای L^2 را نیز تعریف کرد ولی اثبات کامل بودن L^2 منسوب به فیشر در سال 1907 است. در 1922، باناخ مفهوم فضای خطی نرم دار و فضای باناخ را که او آن را فضای از نوع B می‌نامد، معرفی کرد.

و نیز در همان سال، بطور مستقل فضای خطی نرم دار را تعریف نمود. با این حال چون باناخ پیشبرد این نظریه را رهبری می کرد، این فضاها به نام او نامیده شد.

در ادامه با نگاهی به گذشته می‌بینیم که بحث همگرایی ضعیف در فضاهای باناخ که به تحقیق، یکی از کارهای مهم وی در این زمینه است، پر معماتر می‌باشد. با وجود گسترش دقیق توپولوژی در دهه بیست، و توصیف «فون نویمان» از همسایگی‌های ضعیف در فضاهای هیلبرت و در جبرهای عملگری، باناخ فقط به دنباله ای بطور ضعیف همگرا پرداخته است چون الحاق تمام حدود زیر دنباله‌های بطور ضعیف همگرای یک مجموعه ضرورتا به یک مجموعه به طور ضعیف و بطور دنباله ای بسته منجر نمی‌شود. وی گرفتار نمادهای پیچیده ای مانند ترانسفینی شده است. ولی هرگز از مفهوم بسیار ساده‌تر و متقاعد کننده‌تر توپولوژی ضعیف استفاده نکرده است.

پیش از دهه چهل، توجه متخصصان آنالیز تابعی منحصرا به سوی فضاهای نرم دار بود. نخستین مقاله مهم راجع به نظریه عمومی فضاهای موضعا محدب از آن «ژ.دیودونه» است.

نظریه فضاهای برداری در رابطه‌ی دوالیته دوران شکوه خود را در سالهای 1950-1940 شاهد بوده است. هندسه فضای باناخ از حدود 35 سال پیش به دلیل کارهای بزرگانی چون جیمز[1] ، ورتسکی[2] ، گروتندیک[3] ، لیندن اشتراوس[4] ، پلچنسکی[5] ، آنفلو[6] ، جانسون[7] ، روزنهال[8] ، ل.شوارتس[9] و شاگردانش (پیزیه[10] ، موره[11] ، بوزمی[12] ،...) و غیره شاهد توسعه‌ی چشم گیری بوده است. و در ادامه در طی 30 سال گذشته پیشرفت تاثیر گذاری در کاربردهای مختلفی در نظریه‌ی بازی‌ها، اقتصاد، بهینه یابی محدب، ... داشته و دارد.

1.James 2. Dvoretsky 3. Grothendieck 4. Lindenstrauss 5. Pelczynski 6. Enfl
7. Johnson 8. Rosenthal 9. L.Schwartz 10. Pisier 11. Maurey 12. Bcauzamy

در پایان نامه حاضر دو هدف اصلی مورد بررسی قرار می گیرد. یکی بررسی مباحث پایه‌ایی و در ادامه بررسی خواص و ویژگی‌های نقطه ثابت در فضاهای باناخ با توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره می باشد و دوم بررسی خواصی از نقطه ثابت در فضاهایی با ویژگی‌های هندسی مشخصی مانند فضاهای محدب خاص.

در واقع در هر دو هدف بنای اساسی نظریه‌ی نقطه ثابت است که به اواخر سده‌ی نوزده میلادی باز می‌گردد که برای استفاده از تقریبهای پی‌درپی جهت اثبات وجود منحصر بفرد بودن جواب‌ها، خصوصا در معادلات دیفرانسیل تکیه دارد. این روش با نام ریاضیدانانی همچون کوشی [13] ، لیوویل [14] ، لیپ شوتش [15] و پیکارد [16] گره خورده است. در سال 1922 باناخ [17] نقش اساسی کامل بودن فضاهای متریک را تشخیص داد و دیگران مطالعات زیادی بر روی ویژگیهای نقطه ثابت انجام داده‌اند.

در ادامه بزرگانی چون شاودر [18] ، تیخونوف [19] ، برآوئر [20] نیز قضایایی کاربردی در مورد خواص نقطه ثابت ارائه کرده‌اند. در این راستا ما در این رساله سعی می‌کنیم به مطالعه و تجزیه و تحلیل خواص هندسی فضاهای محدب یکنواخت و فضاهای انعکاسی و سوپرانعکاسی پرداخته و پس از مطالعه‌ی خاصیت کادیک-کلی یکنواخت در فضای توپولوژی ضعیف ستاره پرداخته و رابطه‌ی بین این خاصیت و خاصیت نقطه ثابت را در این فضاها مورد مطالعه قرار داده و ارتباط آنها را در صورت وجود ارزیابی می‌کنیم.

همچنین در ادامه حالت های خاص هندسی از فضاهای محدب را در مورد مطالعه قرار داده و شرایط لازم جهت دارا بودن خاصیت نقطه ثابت، خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره را در این فضاها مورد بررسی قرار می‌دهیم (در صورت وجود دارا بودن این خواص).

13. Cochy 14. Liovil 15. Lipshitiz 16. Picard 17. Banach 18. Schauder 19. Tikhonov 20. Broeir

در واقع یکی از نتایج مهم و در اصلی‌ترین قضیه‌ی این پایان نامه ارتباط بین ساختار هندسی دوال X با ساختار پری دوال آن را بررسی کرده و در ادامه خاصیت نقطه ثابت را با دارا بودن شرایط اولیه‌ایی روی آن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در این مقاله نشان داده می‌شود که کلاس بزرگتری از فضاهای باناخ «E– محدب» دارای خاصیت نقطه ثابت هستند. فضای باناخ E– محدب، کلاسی از فضاهای باناخ است که به طور اکید مابین فضاهای باناخ نامربعی یکنواخت و فضاهای سوپر انعکاسی قرار گرفته است.

دومین خاصیت هندسی فضاهای باناخی که در این رساله مطرح می‌شود خاصیت $W^* - UKK$ در فضاهای باناخ دوگان است. یک فضای دوگان X^* دارای خاصیت $W^* - UKK$ است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ به طوری که (x_n^*) دنباله‌ای در گوی یکه‌ی X^* به طور ضعیف ستاره به x^* همگرا باشد و ضریب انفصال آن $Sep\left((x_n)\right) = \inf\left\{\|x_n - x_m\| ، m \neq n\right\} > \varepsilon$ باشد در اینصورت داشته باشیم $\|x^*\| < 1 - \delta$.

اگر X^* دارای $W^* - UKK$ باشد آنگاه X^* دارای خاصیت نقطه ثابت ضعیف ستاره است.

یک سوال معروف باز در فضاهای باناخ آن است که آیا هر فضای باناخ انعکاسی دارای خاصیت نقطه ثابت برای نگاشت های غیر انبساطی از C به خودش هست یا خیر؟

فصل 1

پیش نیازها و مقدمات آنالیز تابعی

در این فصل به معرفی نمادها، بیان تعاریف ، قضایا و لم های پایه ای مرتبط با مبحث پیش‌رو در فصل‌های بعدی می پردازیم و پیرو هر مبحث سعی می شود مثال‌هایی نیز در راستای موضوع ارائه شود.

قرارداد) در تمامی پایان نامه فرض می‌کنیم که تمامی فضاهای برداری روی میدان اعداد حقیقی تعریف می‌شود. (که این موضوع چیزی از کلیت موضوع نمی‌کاهد)

1.1)فضاهای نرم دار

تعریف 1.1.1) فرض کنید X یک فضای برداری باشد. نگاشت $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه:

الف) $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ $\quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

ب) $\forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ج) (نابرابری مثلثی) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

در اینصورت فضای برداری X را همراه با نرم $\|.\|$ یک فضای نرم دار می گوییم.

نکته 1) از رابطه (الف) نتیجه می گیریم که اگر $\alpha = 0$ باشد نتیجه می‌دهد که $\|0\| = 0$ و از رابطه ی (ج) داریم:

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Longrightarrow \|x\| \geq 0$$

نکته 2) اگر در تعریف فضای نرم دار ، رابطه (ب) برقرار نباشد آن را شبه نرم یا نیم نرم می‌نامیم.

نکته 3) هر فضای نرم دار فضای متریک است ولی عکس آن همواره برقرار نیست.

با متر: $\forall x,y \in X \ : \ \ d(x,y) = \|x-y\|$

مثال) L^{∞} فضای نرم دار است.[22]

تعریف 2.1.1) فضای نرم دار X را فضای باناخ می گوییم هرگاه X نسبت به متر تولید شده به وسیله نرم یعنی $d(x,y) = \|x-y\|$ فضای کامل باشد یعنی هر دنباله کشی در آن ، همگرا باشد.

مثال 3.1.1) فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی و $B(X)$ فضای برداری تمام توابع حقیقی کراندار بر X باشد در اینصورت $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$ که $f \in B(X)$ باشد، یک نرم روی $B(X)$ تعریف می کند که آنرا معمولا نرم $\sup$ می‌نامیم.

مثال 4.1.1) $l_1 = \{x = (x_1, x_2, \ldots): x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i| < \infty\}$ و برای هر $x \in l_1$ تعریف می کنیم $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ در اینصورت $\|.\|_1$ یک نرم روی l_1 است و l_1 با این نرم یک فضای نرم دار می باشد.

مثال 5.1.1) $l_{\infty} = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots): \{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right.$ کراندار باشند $\left.\right\}$ دراین‌صورت فضای l_{∞} با نرم $\|x\|_{\infty} = Sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$ یک فضای نرم دار می‌باشد.

مثال 6.1.1) فضای $X = c_{\circ}$ فضای دنباله ای از دنباله های همگرا به صفر یعنی:

$$c_{\circ} = \left\{x = (x_1, x_2 \ldots) : \ (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{همگرا به صفر باشد}\right\}$$

با نرم $\|.\|_{\infty}$ فضای نرم دار می‌باشند.

تعریف 7.1.1) یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H به هر دو بردار x و y در H عدد مختلط $< x,y >$ را که ضرب داخلی یا ضرب اسکالر نامیده می‌شود نسبت می‌دهد بطوری که برای هر $a,b \in \mathbb{C}$ و $x,y,z \in H$ داریم:

الف) $< ax + by,z >= a < x ,z > +b < y,z >$

ب) $< x,y > = \overline{< y,x >}$ که در اینجا منظور از $\overline{< y,x >}$ مزدوج گیری است

ج) $< x,x > \geq 0$

د) اگر $< x,x >= 0$ در این صورت $x = 0$ است.

توجه) با توجه به تعریف ضرب داخلی، نرم را در فضای H چنین تعریف می‌کنیم: $\|x\| =< x,x >^{\frac{1}{2}}$ یعنی به ازای هر $x \in H$ ریشه دوم نامنفی ضرب داخلی $< x,x >$ برابر با نرم x است.

نتیجه: به ازای هر $x,y,z \in H$ و $\propto \in \mathbb{C}$، از تعریف فضای ضرب داخلی نتایج زیر را می‌توان به دست آورد:

1) $< 0,x > = 0$

2) $< z,\propto x + y > = \overline{\propto} < z,x > + < z,y >$

3) $|< x,y >| \leq \|x\|\|y\|$ که آن را نامساوی کوشی-شوارتس می نامیم.

4) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ که آن‌را اتحاد متوازی الاضلاع می‌نامیم.

تعریف 8.1.1) فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت گوییم هرگاه با متر حاصل از ضرب داخلی، یک فضای متریک کامل باشد (و در ادامه، فضای هیلبرت را با H نمایش می‌دهیم).

مثال 9.1.1) فضای برداری $\mathbb{C}^n$ با ضرب داخلی زیر، یک فضای هیلبرت است.

$$x = (x_1, \dots, x_n) \;\; \& \;\; y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n \quad \& \;\; < x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

تعریف 10.1.1) فرض کنید X یک فضای برداری با دو نرم متفاوت $\|.\|_1 , \|.\|_2$ باشد و X با هر یک از این نرمها یک فضای باناخ باشد. فرض کنیم $c_1 > 0$ موجود باشد که به ازای هر $x \in X : \|x\|_1 \leq c_1 \|x\|_2$ دراین‌صورت $c_2 > 0$ نیز موجود باشد بطوری‌که به ازای هر $x \in X: \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ و این یعنی دو نرم روی یک فضای باناخ با هم معادل (هم‌ارز) می باشند.

2.1) فضای L^p $(1 \leq p \leq \infty)$

تعریف 1.2.1) فضای $l(\mu, X)$ که در صورت مشخص بودن فضای اندازه، آن‌را با l^1 نشان می‌دهیم عبارت است از مجموعه‌ی تمام توابع اندازه پذیر $f: X \to R$ که $\int_x f d\mu < \infty$.

برای هر تابع $f \in l^1$ نرم را به صورت زیر تعریف می کنیم: $\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$. در واقع l^1- نرم، شبه نرم روی فضای توابع مختلط انتگرال‌پذیر است و فضای برداری l^1 با $d(f,g) = \|f - g\|_1$ القا شده از این شبه نرم،کامل است.

حال تعریف می‌کنیم: $\mathcal{N}(\mu, X) = \{f \in l^1 : \|f\|_1 = 0\}$ لذا $\mathcal{N}(\mu, X)$ یک زیرفضای برداری l^1 است و $f \in \mathcal{N}(\mu, X) \Leftrightarrow f = 0$ (تقریبا همه جا)

تعریف 2.2.1) فضای خارج قسمتی $l^1/_{\mathcal{N}}$ را با نماد $L^1(\mu,X)$ نمایش و اگر فضای اندازه ای زمینه از قبل معلوم باشد با L^1 معرفی می کنیم.

نکته: تابع $u \to \|u\|_1$ یک نرم روی فضای L^1 و فضای (L^1,d) با متر $d(u,v) = \|u-v\|_1$ یک فضای کامل است.

قضیه 3.2.1)[2] اگر (u_n) دنباله ای در L^1 باشد که در شرط کوشی صدق کند دراین‌صورت $u \in L^1$ موجود است که $\forall n:\ \|u_n - u\|_1 \to 0$ و می‌نویسیم $u_n \xrightarrow{L^1} u$

تعریف 4.2.1) فضای L^P که $1 < P < +\infty$، مجموعه توابع اندازه پذیر $f: X \to \mathbb{C}$ را که $\int_X |f|^p\, d\mu < +\infty$ با $l^P(\mu, X)$ نمایش و اگر فضای اندازه از قبل معلوم باشد با l^P نمایش می‌دهیم. و برای هر $f \in l^P$، $\|f\|_p = \left(\int_x |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ را l^P - نرم تابع f می‌نامیم.

نکته: l^P فضای برداری مختلط است و $\|.\|_p$ را یک شبه نرم روی آن تعریف می کنیم و فضای l^P همراه با شبه متر $d(f,g) = \|f-g\|_p$ کامل است.

قضیه 5.2.1)[2] اگر $1 < p < +\infty$ و (f_n) دنباله ای در l^P باشد که در شرط کشی صدق کند یعنی $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ آنگاه تابع $f \in l^p$ وجود دارد که:

$\forall n \to \infty:\ \|f_n - f\|_p \to 0$. همچنین اگر تابع $g \in l^p$ وجود داشته باشد که $\forall n \to \infty:\ \|f_n - g\|_p \to 0$ آنگاه $f = g$ تقریبا همه جا.