دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

روش باقیمانده مینیمال برای کلاس خاصی از سیستم های خطی با ماتریس ضرایب نرمال

دانشجو:

رزگار محمودی

استاد راهنما:

دکتر منصور دانا

استاد مشاور:

دکتر مراد احمدنسب

شهریور ۱۳۹۱

دانشگاه کردستان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

رساله پایان‌نامه کارشناسی ارشد(جبر) آقای رزگار محمودی

تحت عنوان:

روش باقیمانده مینیمال برای کلاس خاصی از سیستم های خطی با ماتریس ضرایب نرمال

استاد راهنما:

دکتر منصور دانا امضاء:

استاد مشاور:

دکتر مراد احمدنسب امضاء:

داور داخلی:

دکتر محمد زرین امضاء:

داور خارجی:

دکتر علی محمد نظری امضاء:

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادر عزیز و فداکارم که همیشه یار و یاور من بودند

تعهد: اینجانب رزگار محمودی ، دانشجوی رشته‌ی ریاضی محض دانشگاه کردستان تعهد می‌دهم که تمام حقوق مادی و معنوی مربوط به این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه کردستان می‌باشد.

سپاسگزاری...

الهی در جلال رحمانی و در کمال سبحانی نه محتاج زمانی و نه آرزومند مکانی؛ نه کس به تو ماند و نه تو به کس مانی؛ پیداست که در میان جانی بلکه جان زنده به چیزیست که تو آنی.

در آغاز وظیفه ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر منصور دانا که افتخار شاگردی در محضر علم و اخلاق ایشان را داشته‌ام و قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم. همچنین از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر مراد احمدنسب و اساتید گرانقدر دکتر علی محمد نظری و دکتر محمد زرین که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از پدر دلسوز و مادر مهربانم که سخت‌ترین مسیرهای زندگی را برای من هموار نمودند سپاسگزارم؛ و از خواهران و برادران عزیزم که همواره مرا مورد لطف وعنایت خود قرار داده‌اند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

همچنین از تمامی اساتید دانشکده علوم و به ویژه اساتید گروه ریاضی که چه در دوره‌ی کارشناسی و کارشناسی ارشد در محضر آنها بوده‌ام و منشی دلسوز و زحمتکش گروه ریاضی سرکار خانم زندی‌نژاد کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

در پایان از دوستان عزیزم آقایان وحید قاسمی، امید عبدی، آزاد امین‌پور، عبدالرحمان امینی، فرزاد رسولی، جلال زارهش، بهمن زارهش ،کامران محمودی، ناصر الیاسی، ناصر قمری، هادی معصومی، مهدی نیازی، تورج امیری و تمامی عزیزانی که در این مسیر مرا یاری نمودند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

چکیده

روش باقیمانده مینیمال ($MINRES$) برای کلاس خاصی از سیستم‌های خطی با ماتریس ضرایب نرمال که طیف آنها متعلق به منحنی جبری از درجه‌ی پایین k می‌باشد ساخته شده است. تفاوت این روش با روش شناخته شده‌ی $GMRES$ در زیر فضاهایی است که جواب تقریبی به آن تعلق دارد. در این مقاله حالت $k = ۲,۳$ را بررسی می‌کنیم. نتایج عددی ارائه شده برتری روش $MINRES$ را نسبت به روش $GMRES$ نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: *روش باقیمانده مینیمال، ماتریس نرمال، طیف (مجموعه مقادیر ویژه)، دستگاه معادلات خطی جبری، روش $GMRES$ ، روش $MINRES$.*

فهرست مطالب

مقدمه

روش‌های متعددی برای حل دستگاه‌های

$$Ax = b \tag{۱}$$

وجود دارد که در آن ماتریس ضرایب A ماتریس مربعی می‌باشد. یکی از این روش‌ها $GMRES$ (تعمیم باقیمانده مینیمال) است که یوسف سعد[۱] و مارتین شولتز[۲] [۳] در سال ۱۹۸۶ به معرفی این روش پرداخته‌اند. در این روش از زیر فضای کریلوف یعنی زیر فضای تولید شده توسط دنباله‌ی برداری

$$b, Ab, A^{۲}b, \cdots \tag{۲}$$

برای بدست آوردن جواب استفاده می‌شود. این روش در حقیقت تعمیم روشی به نام $MINRES$ می‌باشد که این روش برای ماتریس‌های متقارن طراحی شده است. در سال ۱۹۹۷ السنر[۳] و ایکراموف[۴] [۴] به معرفی شکل فشرده برای ماتریس‌های نرمال تحت دنباله‌ای متناهی از تشابه‌های یکانی مقدماتی پرداخته‌اند که در این شکل از تعمیم دنباله‌ی (۲) به شکل

$$b, Ab, A^*b, A^{۲}b, AA^*b, A^*Ab, A^{*۲}b, A^{۳}b, \cdots \tag{۳}$$

برای بدست آوردن جواب استفاده می‌شود تا شکل فشرده‌ی یک دنباله‌ی متناهی از تبدیلات هاوس هولدر مورد استفاده قرار گیرد.

حال اگر ماتریس ضرایب A نرمال نیز باشد در این صورت تعداد بردارها در زیر فضای کریلوف تعمیم یافته‌ی (۳) کاهش می‌یابد و لذا تعداد تکرارها در فرآیند رسیدن به جواب کمتر شده و همچنین حجم حافظه‌ی استفاده شده در کامپیوتر نیز به مراتب کمتر می‌باشد و در نتیجه زمان رسیدن به جواب کاهش معناداری می‌یابد؛ لذا در حالت نرمال این روش که $MINRES-N$ نامیده می‌شود نسبت به روش‌های دیگر برتری دارد. حال اگر ماتریس ما در دستگاه (۱) علاوه بر شرط نرمال بودن دارای این ویژگی باشد که طیف (مجموعه مقادیر ویژه‌ی) آن متعلق به یک منحنی از درجه‌ی k یعنی $f(x,y)$ از درجه‌ی k باشد در این صورت از روش

---

[۱] Youcef Saad

[۲] Martin Schultz

[۳] Elsner

[۴] Ikramov

$MINRES-Nk$ استفاده می‌شود که این روش در سال ۲۰۰۵ توسط دکتر دانا[5] و ایکراموف [۱] مورد بررسی قرار گرفته است.

این پایان نامه شامل چهار فصل است که در فصل اول تعاریف و قضایای مرتبط با پایان نامه آورده شده است. در فصل دوم روش$GMRES$ (تعمیم باقیمانده‌ی مینیمال) که تعمیم روش $MINRES$ می‌باشد توضیح داده می‌شود. در فصل سوم فرم فشرده برای ماتریس‌های نرمال تحت دنباله‌ای متناهی از تشابه‌های یکانی مقدماتی بیان می‌گردد. در فصل چهارم روش $MINRES-Nk$ برای حالت‌های $k = ۲,۳$ معرفی و نتایج عددی مربوط به مقایسه‌ی این روش با روش $GMRES$ که برتری روش $MINRES-Nk$ را نشان می‌دهد به تفصیل مورد بحث قرار گرفته شده است.

[5] Dana

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱. فرض کنید F یک میدان (مجموعه اعداد حقیقی یا مختلط) باشد، که عناصرش اسکالر نامیده می‌شوند. یک فضای برداری روی میدان F یک مجموعه‌ی غیرتهی V که عناصرش را بردار نامند با دو عمل دوتایی :

۱. جمع برداری: $V \times V \to V$ با ضابطه‌ی $+(v,\omega) = v + \omega$، که در اینجا v و ω عضو V هستند.

۲. ضرب اسکالری: $F \times V \to V$ با ضابطه‌ی $\times(\alpha, v) = \alpha \times v$، که در اینجا، $v \in V$ و $\alpha \in F$

است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱. (خاصیت شرکت‌پذیری جمع): برای هر v، ω و u عضو V،
$$v + (\omega + u) = (v + \omega) + u$$

۲. (خاصیت جابجایی جمع): برای هر v و u عضو V،
$$v + u = u + v$$

۳. عمل جمع برداری دارای عنصر خنثی صفر است یعنی، به ازای هر $v \in V$،
$$v + ۰ = v$$

۴. عمل جمع برداری دارای عنصر وارون است یعنی، به ازای هر $v \in V$، یک عنصر $u \in V$ وجو دارد به‌طوریکه $v + u = ۰$، $(u = -v)$

۵. (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب اسکالری نسبت به جمع برداری): به ازای هر $\alpha \in F$ و v و u عضو V،
$\alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u$

۶. (خاصیت توزیع‌پذیری جمع اسکالری نسبت به ضرب اسکالری): به ازای هر $v \in V$ و α و β عضو F،
$(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$

۷. (خاصیت توزیع‌پذیری ضرب اسکالری نسبت به ضرب در میدان اسکالرها): به ازای هر $v \in V$ و α و β عضو F،
$\alpha \times (\beta v) = (\alpha\beta)v$

۸. عمل ضرب اسکالری دارای عنصر یکه است یعنی، به ازای هر $v \in V$، یک عنصر $۱ \in F$ وجو دارد به‌طوریکه $۱ \times v = v$

مثال ۱.۱. با توجه به تعریف (۱.۱) مجموعه‌های، R^n و C^n که $R^n = \{(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) | x_i \in R\}$ و $C^n = \{(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) | x_i \in C\}$ تحت اعمال زیر ، به ترتیب فضای برداری روی R و C هستند.

۱. به ازای هر $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \in R^n(C^n)$ و $(y_۱, y_۲, \cdots, y_n) \in R^n(C^n)$ داشته باشیم:
$(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) + (y_۱, y_۲, \cdots, y_n) = (x_۱ + y_۱, x_۲ + y_۲, \cdots, x_n + y_n)$.

۲. به ازای هر $(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) \in R^n(C^n)$ و $\alpha \in R$داشته باشیم:
$\alpha(x_۱, x_۲, \cdots, x_n) = (\alpha x_۱, \alpha x_۲, \cdots, \alpha x_n)$.

تعریف ۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W \subseteq V$ باشد در این‌صورت W را زیر فضای V گویند هر گاه W تحت اعمال دوتایی جمع برداری و ضرب اسکالری خود یک فضا باشد.

تعریف ۳.۱. گوییم بردار $w \in V$ ترکیبی خطی از بردارهای $v_۱$، $v_۲$،$\cdots$ و v_n، که همگی عضو V هستند، است هر گاه ضرایب $\alpha_۱$، $\alpha_۲$،$\cdots$ و α_n عضو F موجود باشند به‌طوریکه:

$$w = \sum_{i=۱}^{n} (\alpha_i v_i).$$

تعریف ۴.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W \subseteq V$ باشد. در این صورت فضای تولید شده توسط مجموعه‌ی W را که با $span\{W\}$ نشان می‌دهند، مجموعه‌ی همه‌ی ترکیبات خطی اعضای W است.

دقت داشته باشید که $span\{V\} = V$ و $span\{\emptyset\} = \emptyset$.

لم ۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W \subseteq V$ باشد. در این‌صورت $span\{W\}$ یک زیر فضای V است.

تعریف ۵.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W = \{w_۱, w_۲, \cdots, w_n\} \subseteq V$ باشد. در این‌صورت W را وابسته‌ی خطی گویند هر گاه اسکالرهای $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\cdots$ و λ_n، که همگی صفر نیستند موجود باشند به‌طوریکه

$$\sum_{i=۱}^{n}(\lambda_i w_i) = ۰,$$

در غیر این‌صورت آن را مستقل خطی گویند، یعنی اگر $\sum_{i=۱}^{n}(\lambda_i w_i) = ۰$، آنگاه

$$\lambda_۱ = \lambda_۲ = \cdots = \lambda_n = ۰$$

تعریف ۶.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\} \subseteq V$ باشد. در اینصورت W را یک پایه برای V گویند هر گاه:

۱. W مجموعه‌ای مستقل خطی باشد.

۲. $span\{W\} = V$

تعریف ۷.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان F و $W = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\} \subseteq V$ باشند. اگر W یک پایه برای فضای برداری V باشد آنگاه، بعد V را که با $dimV$ نشان می‌دهیم برابر تعداد اعضای W است. یعنی:

$$dimV = n$$

در این‌صورت V را یک فضای متناهی بعد گویند.

توجه داشته باشد که اگر پایه‌ای متناهی برای فضای برداری V موجود نباشد آنگاه V نامتناهی بعد است و داریم:

$$dimV = \infty.$$

تعریف ۸.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد، یک نرم تابعی است به‌صورت $\|.\| : V \longrightarrow [۰, \infty)$ به‌طوریکه دارای شرایط زیر باشد:

۱. برای هر $x \in V$، $\|x\| \geqslant ۰$.

۲. $\|x\| = ۰$ اگر و نتها اگر $x = ۰$.

۳. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in F$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۴. برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

توجه ۱.۱. اگر شرط دوم برقرار نباشد به نرم یک شبه نرم می‌گویند.

تعریف ۹.۱. اگر V یک فضای برداری روی میدان F و $\|.\|$ هم یک نرم دلخواه روی V باشد، آنگاه فضای برداری V را یک فضای نرم‌دار گویند و آن‌را با $(V, \|.\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید $V = R^n$ (یا C^n) و $v = (v_۱, v_۲, \cdots, v_n) \in V$ باشند. در اینصورت

۱. نرم-یک روی V به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|v\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |v_i|.$$

۲. نرم-دو (یا نرم اقلیدسی[۱]) روی V به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|v\|_۲ = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} |v_i|^۲}.$$

۳. نرم-بینهایت روی V به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|v\|_\infty = \max_{i=۱}^{n} |v_i|.$$

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار متناهی بعد و $\|.\|_\mu$ و $\|.\|_\eta$ دو نرم روی این فضا باشند. هم چنین فرض کنید α و β اعداد ثابت مثبت باشند. در این‌صورت دو نرم $\|.\|_\mu$ و $\|.\|_\eta$ را هم‌ارز گویند هر گاه

$$\alpha\|v\|_\mu \leq \|v\|_\eta \leq \beta\|v\|_\mu$$

قضیه ۱.۱. فرض کنید $V = R^n$ (یا C^n) و $v \in V$ باشد. در این صورت روابط زیر برقرارند:

---
[۱] Euclidean

۱.

$$\|v\|_۲ \leq \|v\|_۱ \leq \sqrt{n}\|v\|_۲.$$

۲.

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_۲ \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty.$$

۳.

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_۱ \leq n\|v\|_\infty.$$

لذا با توجه به تعریف ۱.۱۱، $\|.\|_۱$، $\|.\|_۲$ و $\|.\|_\infty$ هم‌ارزند.

۲.۱ فضای ضرب داخلی

تعریف ۱.۱۲. فرض V یک فضای برداری روی میدان $F = R$ یا $F = C$ باشد. ضرب داخلی روی V تابع $<,>: V \times V \to F$ است که در خواص زیر صدق می‌کند.

۱. (خاصیت معین مثبت بودن) برای هر $v \in V$ داشته باشیم:

$$< v, v > \geq ۰ \ , \ < v, v >= ۰ \Leftrightarrow v = ۰$$

۲. (خاصیت مزدوج متقارن) برای $F = C$ داشته باشیم:

$$< u, v >= \overline{< v, u >}$$

و (خاصیت متقارن) برای $F = R$ داشته باشیم:

$$< u, v >=< v, u >$$

۳. (خاصیت خطی نسبت به مولفه‌ی اول) برای هر $u, v \in V$ و $r, s \in F$ داشته باشیم:

$$< ru + sv, w >= r < u, w > +s < v, w >$$

فضای برداری حقیقی (یا مختلط) V به همراه ضرب داخلی را فضای ضرب داخلی حقیقی (یا مختلط) گویند.

مثال ۱.۲. ۱) فضای برداری R^n تحت ضرب داخلی استاندارد یا ضرب نقطه‌ای تعریف شده به صورت زیر فضای ضرب داخلی می‌باشد:

$$< (r_۱, r_۲, \cdots r_n), (s_۱, s_۲, \cdots s_n) >= r_۱s_۱ + \cdots + r_ns_n$$

فضای ضرب داخلی R^n را اغلب فضای اقلیدسی n بعدی گویند.

۲) فضای برداری C^n تحت ضرب داخلی استاندارد تعریف شده به صورت زیر فضای ضرب داخلی می‌باشد:

$$< (r_۱, r_۲, \cdots r_n), (s_۱, s_۲, \cdots s_n) >= r_۱\overline{s_۱} + \cdots + r_n\overline{s_n}$$

این فضای ضرب داخلی را اغلب فضای یکانی n بعدی گویند.

۳) فضای برداری $C[a,b]$ از همه‌ی توابع پیوسته‌ی مختلط مقدار روی بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ تحت ضرب داخلی زیر فضای ضرب داخلی مختلط می‌باشد:

$$< f, g >= \int f(x)\overline{g(x)}dx$$

مثال ۳.۱. یکی از مهم‌ترین فضاهای ضرب داخلی فضای برداری $l^۲$ از همه‌ی دنباله‌های حقیقی (یا مختلط) (s_n) با خاصیت

$$\sum |s_n| < \infty$$

تحت ضرب داخلی زیر می‌باشد:

$$< (s_n), (t_n) >= \sum_{n=۰}^{\infty} s_n\overline{t_n}$$

۳.۱ نرم

اگر V فضای ضرب داخلی باشد نرم یا طول $v \in V$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

بردار v یکه است اگر $\|v\| = ۱$. حال برخی خواص نرم را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱. ۱) $\|v\| \geq ۰$ و $\|v\| = ۰$ اگر وتنها اگر $v = ۰$.

۲) برای هر $r \in F$ و $v \in V$:

$$\|rv\| = |r|\|v\|$$

۳) (نامساوی کشی-شوارتز) برای هر $v, u \in V$:

$$| < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$$

و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر u و v مضرب اسکالری از یکدیگر باشند.

۴) (نامساوی مثلثی) برای هر $v, u \in V$:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

و تساوی برقرار است اگر وتنها اگر u و v مضرب اسکالری از یکدیگر باشند.

۵) برای هر $v, u, x \in V$:

$$\|u-v\| \leq \|u-x\| + \|x-v\|$$

۶) برای هر $v, u \in V$:

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u-v\|$$

۷) (قانون متوازی الاضلاع) برای هر $v, u \in V$:

$$\|u+v\|^{۲} + \|u-v\|^{۲} = ۲\|u\|^{۲} + ۲\|v\|^{۲}$$

۴.۱ فضای ماتریس‌ها

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید A یک ماتریس باشد در این‌صورت A را از مرتبه‌ی $m \times n$ گوییم هر گاه A دارای m سطر و n ستون باشد.

تعریف ۱۴.۱. فرض کنید A یک ماتریس باشد در این‌صورت اگر $m = n$ آنگاه A را ماتریس مربعی $n \times n$ گویند.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(R)$. در این صورت ترانهاده‌ی ماتریس A را با A^t نشان می‌دهیم که از تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس A بدست می‌آید. لذا اگر $A \in M_{m\times n}(R)$ آنگاه $A^t \in M_{n\times m}(R)$ خواهد بود. حال اگر $A = [a_{ij}]$ آنگاه $A^t = [a_{ji}]$ خواهد بود.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید $A \in M_{m\times n}(C)$. در این صورت ترانهاده‌ی مزدوج ماتریس A را با A^* نشان می‌دهیم که ابتدا از درایه‌های آن مزدوج گرفته و سپس از تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس مزدوج A بدست می‌آید. لذا اگر $A \in M_{m\times n}(C)$ آنگاه $A^* \in M_{n\times m}(C)$ خواهد بود. حال اگر $A = [a_{ij}]$ آنگاه $A^* = [\bar{a}_{ji}]$ خواهد بود.

توجه ۲.۱. واضح است که اگر $A \in M_{m\times n}(R)$ آنگاه $A^t = A^*$.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید $A \in M_{n\times n}(R(C))$. در این‌صورت اثر A را با $tr(A)$ نمایش می‌دهند و برابر با مجموع درایه‌های روی قطر اصلی تعریف می‌کنند.

انواع ماتریس‌ها

۱. ماتریس صفر ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. معمولا ماتریس صفر از مرتبه‌ی $m \times n$ را با $O_{m\times n}$ نمایش می‌دهند.

۲. ماتریس $A \in M_{n\times n}(R(C))$ ستونی است هر گاه $n = ۱$ و سطری است هرگاه $m = ۱$. ماتریس سطری یا ستونی را به‌ترتیب بردار سطری یا ستونی می‌گویند.

۳. ماتریس مربعی A را وارون پذیر گویند هرگاه ماتریس مربعی مانند B وجود داشته باشد به طوریکه $AB = I$ و $BA = I$. وارون ماتریس A را با نماد $A^{-۱}$ نمایش می‌دهند.

۴. دو ماتریس A وB را متشابه گویند هرگاه ماتریس وارون پذیر مانند P وجود داشته باشد به طوریکه $A = P^{-۱}BP$.

۵. ماتریس مربعی A را پایین مثلثی گویند هر گاه به ازای $i < j$، $a_{ij} = ۰$. ماتریس پایین مثلثی را با L نمایش می‌دهند.

۶. ماتریس مربعی A را بالا مثلثی گویند هر گاه به ازای $i > j$، $a_{ij} = ۰$. ماتریس بالا مثلثی را با U نمایش می‌دهند.

۷. ماتریس مربعی D قطری است هر گاه به ازای $i \neq j$، داشته باشیم $d_{ij} = ۰$. واضح است که ماتریس قطری هم بالا مثلثی و هم پایین مثلثی است.

۸. ماتریس مربعی A را همانی گویند هر گاه به ازای هر i و j داشته باشیم:

$$d_{ij} = \begin{cases} ۰ & if\ i \neq j \\ ۱ & if\ i = j \end{cases}$$

ماتریس همانی را با $I_{n\times n}$ نمایش می‌دهند.

۹. ماتریس مربعی$A \in M_{n\times n}(R(C))$ را بالا هسنبرگ گویند هر گاه به ازای هر i و j که $i > j + ۱$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$

۱۰. ماتریس مربعی$A \in M_{n\times n}(R(C))$ را سه قطری گویند هر گاه به ازای هر i و j که $|i - j| > ۱$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

۱۱. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(R(C))$ را متقارن (هرمیتی) گویند هر گاه $A = A^t$ و پاد متقارن (پاد هرمیتی) گویند هر گاه $A = -A^t$.

۱۲. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(R(C))$ را معین مثبت گویند هر گاه به ازای هر $x \in R^n$ یا $x \in C^n$ داشته باشیم:

$$x^t Ax > ۰$$

و اگر $x^t Ax \geq ۰$ آنگاه A را نیمه معین مثبت گویند.

۱۳. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(R)$ را متعامد گویند هر گاه $AA^t = I$.

۱۴. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(R)$ را نرمال گویند هر گاه $AA^* = A^*A$.

۱۵. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(C)$ را هرمیتی گویند هر گاه $A = A^*$.

۱۶. ماتریس مربعی $A \in M_{n\times n}(C)$ را یکانی گویند هر گاه $AA^* = I$.

۱.۴.۱ رتبه‌ی ماتریس

تعریف ۱.۱۸. ماکزیمم تعداد سطرهای (ستون‌های) مستقل خطی ماتریس $A \in M_{m\times n}(R(C))$ را رتبه‌ی سطری(رتبه‌ی ستونی) ماتریس A گویند.

توجه ۱.۳. رتبه‌ی سطری و ستونی ماتریس A با هم برابر است و آن را با نماد $rk(A)$ نشان می‌دهند. بدیهی است که $rk(A) \leq min\{m, n\}$.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید u یک بردار سطری باشد در این‌صورت ماتریس $u^t u$ دارای رتبه‌ی یک است یعنی:

$$rk(u^t u) = ۱,$$

حال اگر u یک بردار ستونی باشد در این‌صورت ماتریس uu^t دارای رتبه‌ی یک است یعنی:

$$rk(uu^t) = ۱.$$

تعریف ۱.۲۰. ماتریس $A \in M_{m\times n}(R(C))$ را رتبه کامل گویند هر گاه $rk(A) = min\{m, n\}$ باشد . حال اگر $rk(A) < min\{m, n\}$ باشد آنگاه ماتریس A را رتبه ناقص گویند.

قضیه ۱.۳. ماتریس مربعی A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر A رتبه کامل باشد. لذا A رتبه کامل است اگر و تنها اگر $\det A \neq ۰$ باشد.

توجه ۱.۴. رتبه‌ی ماتریس‌های متشابه یکسانند.