بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده مهندسی مکانیک

تحلیل ارتعاشات آزاد جسم حاصل از دوران بیضی حول محور کوچکش

مسعـود نـــوری

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ مهندسی مکانیک

استاد راهنما:

دکتر شاهرخ حسینی هاشمی

بهمن ماه ۷۷

تقدیم به :

پدر و مادر بزرگوار

و

همسر عزیز و مهربانم

چکیده :

بررسی ارتعاشات کرهٔ فشرده (*Oblate Sphroid*) که مـدل هندسـی مناسـبی برای کرهٔ زمین و نیز برخی مخازن شبه کروی است، صرفنظـر از سـاختار غـیر همگـن زمین، نتایج دقیقتری را جهت بررسی ارتعاشی فراهم می‌کند. در ایــن پـروژه ارتعاشـات یک کرهٔ فشرده (*Oblate Sphroid*) همگن و الاستیک در دو حالت توخـالی و توپـر بررسی میشود و معادلات فرکانسی برای ارتعاشات پیچشی و کلی، نــیز فرکـانس هـای طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات پیچشی در شرایط مختلف بدست می‌آیند. بـرای ایـن کار معادلات حرکت در مختصات کروی فشرده نوشته شده، سـپس حـل می‌گردنـد. بـا اعمال شرایط مرزی معادلهٔ فرکانسی و از آنجا فرکانس های طبیعــی و شـکل مودهـای ارتعاشی حاصل می‌شوند.

تقدیر و تشکّر:

بدینوسیله از زحمات و هدایتهای ارزندۀ استاد گرامی جناب آقای دکتر حسینی هاشمی که در انجام پروژه راهنمای اینجانب بوده و در تهیه و تنظیم این پایان نامه مرا یاری فرموده‌اند، مراتب سپاس و تشکر خود را اعلام می‌دارم. همچنین از اعضای محترم هیأت داوری، آقایان دکتر جعفری و دکتر معدولیت بخاطر حضور در جلسۀ دفاعیه صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

مسعود نوری

بهمن ماه ۷۷

فهرست مطالب

فهرست علائم

تغییر مکان در جهت z, y, x	u, v, w
کرنش در صفحهٔ i و در جهت j	ε_{ij}
تنش در صفحهٔ i و در جهت j	σ_{ij}
ضریب مقیاس در جهت محور i	h_i
ضریب مقیاس در جهت محورهای ψ, θ, η	h_η, h_θ, h_ψ
تغییر مکان در جهت محورهای ψ, θ, η	S_η, S_θ, S_ψ
جرم حجمی	ρ
نیروی خارجی در جهت i	F_i
بردار نیروی خارجی	F
تغییر مکان در جهت i	S_i
بردار تغییر مکان	S
شتاب در جهت i	a_i
انبساط یا تغییر حجم نسبی	e
ثوابت لامه	μ, λ
سرعت امواج انبساطی	C_1
سرعت امواج پیچشی	C_2
فاصلهٔ کانونی بیضی	a
شعاع خارجی کرهٔ فشرده	b

شعاع داخلی کرۀ فشردۀ توخالی	b^*
جوابهای معادلۀ لژاندر از درجۀ **p** و **q**	P_q^p و Q_q^p
فرکانس طبیعی بدون بعد	ω_i^*
فرکانس طبیعی	ω_i

دیباچه :

ارتعاشات کرهٔ توپر از مسایلی است که توسط محققین متعددی مورد بررسی قرار گرفته است [۱]. ارتعاشات کرهٔ زمین به عنوان یک شبه کرهٔ الاستیک ولی غیر همگن، از دیر زمان مورد بررسی و تحقیق قرار داشته است [۲]. از آنجا که زمین کرهٔ کامل نبوده و بصورت کرهٔ فشرده (*Oblate Sphroid*) می‌باشد، برای بررسی دقیق ارتعاشات زمین لازم است که ارتعاشات کرهٔ فشرده بررسی گردد [۳و۲]. صرفنظر از اینکه غیر همگن بودن زمین منشأ وجود اختلاف بین نتایج این بررسی با واقعیت خواهد بود، امّا نسبت به نتایج حاصله از فرض کامل بودن کرهٔ زمین نتایج دقیق‌تری را بدست خواهد داد [۳]. از طرف دیگر با فرض اینکه لایه های شعاعی زمین با یکدیگر متفاوت ولی خود یک لایهٔ همگن است، با اعمال شرایط مرزیِ لایه های شعاعی زمین می‌توان

به نتایج دقیق‌تری رسید. این موضوع می‌تواند به عنـوان یـک بحـث تحقیقـیِ دیگـری مطرح و در فرصتی دیگر به آن پرداخته شود.

همچنین در بررسی مخازن شبه کروی که مقاطع کاملاً دایره ندارنـد، بـا اعمـال شرایط مرزی، می‌توان نتایج تحلیلـی را از معـادلات حاصلـه از مبحـث فـوق اسـتخراج کرده، مبنای تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از روشهای عـددی و اجـزاء محـدود قـرار داد [۵و۴].

در این پروژه ابتدا دسـتگاه مختصـات کـروی فشـرده (***Oblate Sphroidal***) تعریف و بررسی می‌گردد و سپس معادلات حرکـت در ایـن سیسـتم مختصـات بدسـت می‌آید. ارتعاشات به دو دستهٔ ارتعاشات پیچشی و ارتعاشـات کلـی تقسـیم شـده و بـرای هریک معادلهٔ مربوطه نوشته میشود. در ارتعاشات پیچشی، جابجایی شعاعی برابر صفر و در نتیجه تغییر شکل از حالت اولیه در راستای شعاعی حاصل نمی‌شود به عبـارت دیگـر تغییر حجم برابر صفر است. در ایـن پـروژه، ارتعاشـات پیچشـی در شـرایط خـاصی کـه جابجایی در دو راستا صفر و تنها در راستای محیطی غیر صفر است، قابل حل بوده و بـا اعمال شرایط مرزی، خواص ارتعاشی بدست می‌آیند .

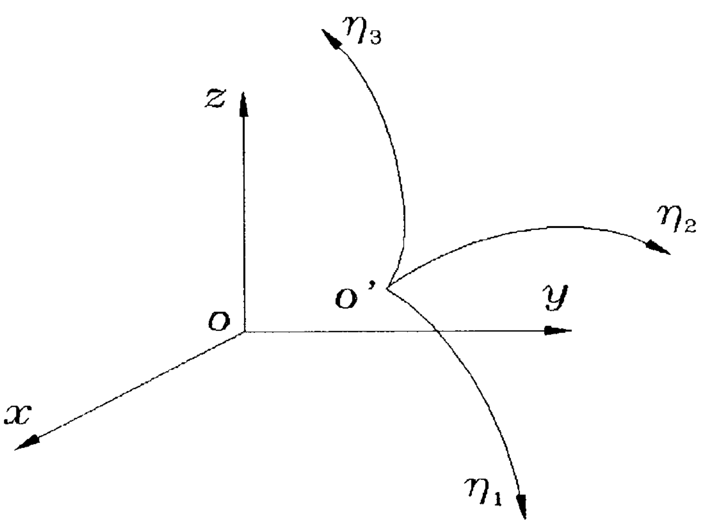
فصـــــل اول

بررسی و شناخت
سیستم مختصات کروی فشرده

۱ – ۱ – دستگاه مختصات منحنی الخط

دستگاه مختصات منحنی الخـط $o'\eta_1\eta_2\eta_3$ را در نظر بگیرید. بیـن دسـتگاه مختصـات منحنی الخط $o'\eta_1\eta_2\eta_3$ با بردارهـای یکـّهٔ $\vec{e}_3,\vec{e}_2,\vec{e}_1$ و دسـتگاه مختصـات دکـارتی $oxyz$ بـا بردارهای یکّهٔ $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ روابط زیر برقرار است :

$$\begin{aligned} x &= f_1(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \\ y &= f_2(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \\ z &= f_3(\eta_1,\eta_2,\eta_3) \end{aligned} \qquad (۱-۱)$$



دیفرانسیل جابجـایی $d\vec{R}$ در مختصـات دکـارتی و منحنـی الخـط بصورتهـای زیـر نوشـته می‌شود :

$$\begin{aligned} d\vec{R} &= (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j} + (dz)\vec{k} \\ d\vec{R} &= (h_1 d\eta_1)\vec{e}_1 + (h_2 d\eta_2)\vec{e}_2 + (h_3 d\eta_3)\vec{e}_3 \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

کـه در آن h_3,h_2,h_1 ضرایـب مقیـاس (***Scale Factors***) در راسـتای محورهـای η_3,η_2,η_1 می‌باشند. ضریب مقیاس، ضریبی است که اختـلاف ابعـادی ناشـی از تغییـر دسـتگاه مختصات را جبران می‌کند.

با استفاده از روابط (۱-۱) و (۲-۱) می‌توان به رابطهٔ زیر رسید:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_2}{\partial \eta_1} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_3}{\partial \eta_1} \\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_2} & \frac{1}{h_2}\frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} & \frac{1}{h_1}\frac{\partial f_3}{\partial \eta_2} \\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial f_1}{\partial \eta_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial f_2}{\partial \eta_3} & \frac{1}{h_3}\frac{\partial f_3}{\partial \eta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \qquad (۱-۳)$$

و یا

$$[\vec{e}_i] = M \times \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$$

ماتریس **M** یک ماتریس متعامد است. یعنی داریم : $M^{-1} = M^T$ و بنابراین خصوصیات زیر را داراست :

$$\sum_{i=1}^{3} m_{ij}^2 = 1 \quad و \quad \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^2 = 1$$

$$\sum_{j \neq k} m_{ij} m_{ik} = 0 \quad و \quad \sum_{i \neq k} m_{ij} m_{kj} = 0 \qquad (۱ - ۴)$$

اگر $\vec{S}$ یک بردار جابجایی باشد، می‌توان نوشت :

$$\vec{s} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = u^*\vec{e}_1 + v^*\vec{e}_2 + w^*\vec{e}_3$$

که w^*, v^*, u^* مقادیر متناظر جابجائی در راستای محورهای η_3, η_2, η_1 را نشان می‌دهند.می‌توان نشان داد که:

$$\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} = M \times \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad (۱-۵) \qquad \text{و یا} \qquad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = M^T \times \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} \qquad (۱-۶)$$

همچنین می‌توان نشان داد که :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} \dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial}{\partial \eta_2} \\ \dfrac{1}{h_3}\dfrac{\partial}{\partial \eta_3} \end{bmatrix}$$

ماتریس متعامد **M** ماتریس تبدیل تانسورها به یکدیگر در دو دستگاه مختصات است و برای تبدیل تنش وکرنش در دو دستگاه مختصات به یکدیگر از همین ماتریس استفاده می‌شود.

۱-۲ – روابط تنش و کرنش با جابجائی در مختصات منحنی الخط

اگر ε_{ij} کرنش درصفحهٔ **i** و جهت **j** از دستگاه مختصات دکارتی و ε^*_{rs} کرنش متناظر با آن در صفحهٔ **r** و جهت **s** از دستگاه مختصات منحنی الخط باشد، بین آنها رابطهٔ زیر برقراراست [۶]:

$$\varepsilon^*_{rs} = m_{ri} m_{sj} \varepsilon_{ij}$$

که درآن m_{ri} و m_{sj}عناصر ماتریس تبدیل دو دستگاه مختصات به یکدیگر(ماتریس**M**) می‌باشند.

بنابراین می‌توان نوشت :