دانشگاه خوارزمی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

هم‌ـمحمل و مدول‌های هم‌آرتینی

تدوین

زهرا شفیعی کلایه

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

و

همسر عزیزم

که از هیچ کوششی برای آرامش خاطرم دریغ نکردند.

سپاس‌گذاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از سرکار خانم دکتر جهانگیری و جناب آقای دکتر دیوانی‌آذر که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

زهرا شفیعی کلایه

مهر ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه نشان می‌دهیم که برای یک مدول فشرده‌ی خطی روی یک حلقه‌ی موضعی، مفهوم هم محمل مدول‌ها که توسط ملکرسون تعریف شده، با مفهوم تعریف شده توسط یاسمی هم‌ارز است.

همچنین مفهوم مدول‌های هم‌آرتینی و هم متناهی را معرفی می‌نمائیم و نشان می‌دهیم که $H_d^I(M)$ در حالتی که M یک Rـمدول فشرده‌ی خطی و نیم‌ـگسسته است و $N\dim M = d > 0$، Iـهم آرتینی است. ما در این پایان نامه قضایایی را ثابت می‌کنیم که رابطه‌ی بین مدول‌های هم آرتینی و هم‌متناهی را بیان می‌کند.

واژه‌های کلیدی: هم‌ـموضعی، هم‌ـمحمل، هم آرتینی، هم متناهی.

رده‌بندی موضوعی ریاضی 2010: 13J99، 16E30، 13D45.

مقدمه

۱ـ مقدمه فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و جابه‌جایی با عضو همانی غیر صفر باشد.

فرض کنیم R یک حلقه جابه جایی و نوتری باشد و S یک بسته‌ی ضربی از R باشد. هم‌ـموضعی سازی Rـمدول M توسط S را با ${}_sM$ نشان می‌دهیم و به صورت ${}_sM = \mathrm{Hom}_R(R_s, M)$ تعریف می‌کنیم.

به علاوه، اگر M یک Rـمدول باشد، هم‌ـمحمل از M را ملکرسون و شنزل به صورت مجموعه‌ی زیر تعریف کرده‌اند.

$$Cos_R(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) |_p M \neq 0\}$$

همچنین تعریف یاسمی برای هم‌ـمحمل به صورت زیر است:

$$Co\,\mathrm{supp}(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | 0 :_R T \subseteq \underline{p} \text{ یک مدول خارج قسمتی آرتینی } T \text{ از } M \text{ موجود است که }\}$$

یاسمی در [21] نشان داد در حالتی که M یک Rـمدول آرتینی باشد $Cos_R(M) = Co\,\mathrm{supp}_R(M)$. اگر چه در حالت کلی این مطلب درست نیست. امّا در حالت کلی داریم:

$$.Cos_R(M) \subseteq Co\,\mathrm{supp}_R(M)$$

همچنین در این پایان‌نامه مدول‌های هم‌آرتینی‌و هم‌متناهی را معرفی می‌کنیم. بیان می‌کنیم تحت چه شرایطی با هم رابطه دارند. iـامین همولوژی موضعی M را با $H_i^I(M)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $H_i^I(M) \cong \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}, M)$. در این پایان نامه نشان می‌دهیم $H_d^I(M)$ درحالتی که M یک Rـمدول فشرده‌ی خطی و نیم‌ـگسسته و $N \dim M = d > 0$، Iـهم‌آرتینی‌است.

فصل اوّل این پایان نامه شامل، ۵ بخش است که این بخش‌ها مقدماتی است برای فصل‌های بعدی. در بخش اوّل مفاهیم و قضایای مقدماتی را بیان می‌کنیم. بخش دوم مفاهیمی از همولوژی و بخش سوم و چهارم مقدماتی برای فصل دوم و سوم است و در بخش آخر در مورد I ـادیک توپولوژی و کمال صحبت می‌کنیم.

در فصل دوم این پایان نامه، به معرفی مدول‌های فشرده خطی و خواص آن می‌پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم که مدول‌های آرتینی با توپولوژی گسسته فشرده خطی‌اند و همچنین اگر حلقه کامل باشد، مدول‌های با تولید متناهی فشرده خطی گسسته هستند. علاوه بر این ثابت می‌کنیم اگر حلقه موضعی و نوتری باشد در این صورت iـامین همولوژی موضعی دوگان ماتلیس M با دوگان ماتلیس iـامین هم همولوژی موضعی M هم ارز است، که دوگان ماتلیس M را با $D(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(M) = \operatorname{Hom}_R(M, E(\frac{R}{\underline{m}}))$$

یعنی حکم زیر را ثابت می‌کنیم:

الف- لم. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی نوتری و موضعی و M یک Rـمدول باشد، در این صورت برای هر $i \geq 0$،

$$H_i^I(D(M)) \cong D(H_I^i(M))$$

در فصل سوم، به مطالعه‌ی خواصی از هم‌ـموضعی سازی و هم‌ـمحمل از مدول‌های فشرده‌ی خطی می‌پردازیم و همچنین قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

ب- قضیه. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی نوتری و موضعی و M یک Rـمدول فشرده خطی باشد، در این صورت

$$Cos_R(M) = Co\operatorname{supp}_R(M)$$

این فصل را با یک مشخص سازی در باره‌ی مدول‌های فشرده خطی نیم‌ـگسسته با تولید متناهی به پایان می‌رسانیم یعنی قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

ج-قضیه. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی نوتری و موضعی و M یک Rـمدول فشرده خطی و نیم‌ـگسسته باشد. در این صورت جملات زیر معادلند:

۱) $Co\operatorname{supp}_R(M) = \{m\}$؛

۲) $Coass_R(M)=\{m\}$؛

۳) M یک Rـمدول متناهی است.

و در بخش اوّل از فصل آخر، مدول‌های Iـهم‌آرتینی و Iـهم‌متناهی را تعریف نموده و همچنین در مورد $\dim N$ صحبت می‌کنیم.

فرض کنیم I یک ایده‌الی از حلقه نوتری R و M یک Rـمدول باشد. M را I ـهم‌آرتینی گوئیم اگر

۱) $Co\operatorname{supp}_R(M)\subseteq V(I)$

۲) برای هر $i\geq ۰$، $\operatorname{Tor}_i^R(\frac{R}{I},M)$، آرتینی باشد.

در این بخش ثابت می‌کنیم که اگر حلقه موضعی و مدول با طول متناهی باشد آنگاه، مدول برای هر ایده‌ال I از حلقه، Iـهم‌آرتینی‌است.

همچنین حکم زیر را ثابت می‌کنیم.

چ- قضیه.

۱) اگر $۰\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow ۰$ یک دنباله‌ی دقیق و دو مدول از سه مدول دنباله Iـهم‌آرتینی باشد، آنگاه سومین مدول هم، Iـهم‌آرتینی‌است.

۲) فرض کنیم $f:M\longrightarrow N$ همریختی بین دو مدول Iـهم‌آرتینی‌باشد، اگر یکی از سه مدول $\ker f$، imf و $Cokerf$، Iـهم‌آرتینی‌باشد در این صورت، هر سه مدول، Iـهم‌آرتینی‌هستند.

همچنین مدول Iـهم‌متناهی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم I ایده‌الی از حلقه‌ی نوتری R باشد و M یک Rـمدول، M را Iـهم متناهی گوئیم هرگاه:

۱) $\operatorname{Supp}_R(M)\subseteq V(I)$

۲) برای هر $i\geq ۰$، $\operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I},M)$ با تولید متناهی باشد.

به علاوه قضیه‌های مهم زیر را ثابت می‌کنیم.

ح‌ـقضیه. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی موضعی کامل باشد. در این صورت

۱) M، Iـهم‌متناهی است اگر و تنها اگر $D(M)$، Iـهم‌متناهی باشد.

۲) اگر $D(M)$ یک Rـمدول Iـهم‌آرتینی‌باشد آنگاه M یک Iـهم‌متناهی است.

قضیه. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی موضعی و کامل باشد و M یک Rـمدول باشد در این صورت جملات زیر معادلند:

۱) M متناهی است.

۲) $Co\operatorname{supp}_R(M) = \{m\}$ و $\frac{M}{mM}$ متناهی است.

۳) M، mـهم آرتینی است.

خ‌ـ قضیه. فرض کنیم I یک ایده‌الی از R و M یک Rـمدول، Iـهم‌آرتینی‌باشد در این صورت:

۱) برای هر Rـمدول متناهی N که $I \subseteq \operatorname{Ann}(N)$. برای هر $i > ۰$، $\operatorname{Tor}_i^R(N, M)$ آرتینی است.

۲) برای هر $n \in \mathbb{N}$، I^nـهم‌آرتینی‌است.

۳) برای هر ایده‌ال J از R، اگر $\sqrt{I} = \sqrt{J}$، آنگاه M یک J ـهم‌آرتینی‌است.

همچنین ثابت می‌کنیم اگر حلقه موضعی با ایده‌ال ماکسیمال $\mathfrak{m}$ و مدول، یک مدول فشرده‌ی خطی نیم‌ـگسسته باشد آنگاه، با تولید متناهی بودن و mـهم‌آرتینی‌بودن مدول معادل است و حکم زیر را ثابت می‌کنیم.

د‌ـقضیه. فرض کنیم I یک ایده‌ال از حلقه‌ی موضعی (R, m) و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد در این صورت جملات زیر معادلند:

۱) M، Iـهم‌متناهی است.

۲) $\frac{M}{IM}$، با طول متناهی است.

۳) برای هر $p \in \operatorname{Ass}(M)$، ایده‌ال $p + I$، mـاولیه است.

در بخش دوم این فصل در مورد بعد نوتری یعنی $N \dim$ صحبت می‌کنیم و ثابت می‌کنیم $M \neq 0$ و نوتری است اگر و تنها اگر $N \dim M = 0$. و سرانجام نشان می‌دهیم اگر M یک مدول فشرده‌ی خطی نیم‌ـگسسته روی حلقه‌ی موضعی و نوتری (R, m) با $N \dim = d > 0$ باشد، $H_d^I(M)$ یک Rـمدول Iـهم‌آرتینی است. یعنی حکم زیر را ثابت می‌کنیم.

ذـ قضیه. فرض کنیم (R, m) یک حلقه‌ی نوتری و موضعی با توپولوژی mـادیک و M یک Rـمدول فشرده‌ی خطی نیم‌ـگسسته باشد با $N \dim M = d > 0$ در این صورت $H_d^I(M)$ یک Rـمدول Iـهم‌متناهی است.

و در پایان این نتیجه را برای مدول‌های هم‌ـمتناهی توسعه می‌دهیم. این پایان نامه براساس مقاله‌ی زیر تدوین شده است.

T. T. Nam. Co-support and Coartinian Modules Algebra Colloquium 15: 1(2008) 83-96.

فهرست مطالب

فصل اول

پیش نیازها

در سرتاسر این پایان نامه، R یک حلقه‌ی نوتری و جابه‌جایی با عضو همانی غیر صفر است.

۱.۱ مفاهیم و قضایای مقدماتی

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم E یک زیرمجموعه از حلقه R باشد. در این صورت

$$V(E) := \{P | P \in \mathrm{Spec}(R), E \subseteq P\}$$

را واریته‌ی E می‌نامیم. اگر ایده‌ال I از R به وسیله‌ی زیرمجموعه E از R تولید شود آنگاه $V(E) = V(I)$. به سادگی ثابت می‌شود $V(R) = V(1) = \phi$ و $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$. اگر $\{E_j\}_{j\in J}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های R باشد آنگاه

$$V(\cup_{j\in J} E_j) = V(\sum_{j\in J} E_j) = \cap_{j\in J} V(E_j)$$

همچنین اگر I و J دو ایده‌ال از R باشند آنگاه

$$V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cap V(J)$$

و

$$V(I)=V(r(I))$$

۲.۱.۱ قضیه. [23, 3.61]قضیه اجتناب از ایده‌ال‌های اول: فرض کنید $n\geq ۲$، $p_۱,p_۲,\dots,p_n$ ایده‌ال‌هایی از R باشند که حداکثر دو تا از آنها اوّل نیستند. فرض کنیم S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است. (مثلاً ممکن است ایده‌ال یا زیرحلقه‌ای از R باشد) اگر

$$S\subseteq \cup_{i=۱}^{n}p_i$$

آنگاه jی موجود است که $۱\leq j\leq n$، $S\subseteq p_j$.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول دلخواه باشد. محمل M را با علامت $\mathrm{Supp}_R(M)$ (یا $\mathrm{supp}(M)$) نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{supp}_R(M):=\{p\in R; M_p\neq \circ\}$$

۴.۱.۱ لم. [23, 9.23]فرض کنیم M Rـمدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

$$\mathrm{supp}_R(M):=\{p\in R; p\supseteq(\circ:_R M)\}=V(\mathrm{Ann}(M))$$

اگر M متناهی مولد نباشد، آنگاه $\mathrm{Supp}(M)\subseteq V(\mathrm{Ann}(M))$.

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌الی از آن باشد. تعریف می‌کنیم:

$$r(I):=\{r\in R|r^n\in I \text{ عددی چون } n\in N \text{ موجود است به طوری که }\}$$

$r(I)$ ایده‌الی از حلقه‌ی R است که شامل I می‌باشد. این ایده‌ال را رادیکال ایده‌ال I می‌نامند. به ویژه $r(\circ)$ را رادیکال پوچ نامیده و با علامت n_R نمایش می‌دهند.

۶.۱.۱ لم. [23, 9.23] فرض کنیم M یک Rـمدول با تولید متناهی و I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/IM)} = \sqrt{I + \mathrm{Ann}_R(M)}$$

۷.۱.۱ لم. فرض کنیم M یک Rـمدول با تولید متناهی و I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت

$$\mathrm{supp}_R(M/IM) = V(I + \mathrm{Ann}_R(M)) = \mathrm{supp}_R(M) \cap V(I)$$

برهان. بنابه (۴.۱.۱) و (۶.۱.۱) و تعریف (۱.۱.۱) حکم برقرار است. □

۸.۱.۱ قضیه. [23, 8.20] فرض کنیم I ایده‌الی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت

$$\sqrt{I} = \cap_{p \in \mathrm{Min}(I)} P$$

۹.۱.۱ تعریف. بعد Rـمدول M را با علامت $\dim_R(M)$ نشان می‌دهند و چنین تعریف می‌کنند:

$$\dim(M) := \sup\{n | \text{زنجیری اکید از عناصر محمل } M \text{ مانند } p_0 \subsetneqq p_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq p_n \text{ موجود است}\}$$

اگر $M = 0$ آنگاه بنابر قرارداد می‌نویسیم $\dim_R(M) = -1$.

۱۰.۱.۱ قضیه. [9, 7.36] فرض کنیم M مدولی روی حلقه‌ی جابه‌جایی R باشد. در این صورت M با طول متناهی است اگر و تنها اگر M هم نوتری و هم‌آرتینی‌باشد.

۱۱.۱.۱ قضیه. [23, 7.30]فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی و یکدار و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد به قسمی که $m_1m_2\ldots m_tM=0$ که در آن $m_i\in \mathrm{Max}(R)$ و لزوماً متمایز نیستند. در این صورت نوتری و آرتینی بودن M معادل هستند.

۱۲.۱.۱ قضیه. [23, 8.39]فرض کنیم R حلقه‌ای جابه‌جایی و آرتینی است. در این صورت هر ایده‌ال اوّل R ماکسیمال است.

۱۳.۱.۱ قضیه. [23, 7.19]فرض کنیم $0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$ یک رشته‌ی دقیق از Rـمدول‌ها و R ـهمومورفیسم‌ها باشد در این صورت M نوتری (آرتینی) است اگر و فقط اگر M' و M'' نوتری(آرتینی) باشد.

۱۴.۱.۱ قضیه. [23, 7.22]اگر R یک حلقه نوتری(آرتینی) باشد، آنگاه هر Rـمدول متناهی مولد، نوتری(آرتینی) است.

۱۵.۱.۱ قضیه. [23, 6.19](تغییر حلقه): فرض کنیم M یک Rـمدول و I ایده‌الی از R باشد به طوری که $I\subseteq \mathrm{Ann}(M)$ در این صورت M ساختار $\frac{R}{I}$ـمدولی دارد به علاوه زیرمجموعه‌ای از M مانند N، یک Rـمدول است، اگر و تنها اگر $\frac{R}{I}$ـمدول باشد.

۱۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم M مدولی ناصفر روی حلقه R باشد. Rـمدول N را توسیع اساسی برای M می‌نامند هرگاه M زیرمدول N باشد و برای هر زیرمدول ناصفر از N مانند K ، $K\cap M\neq 0$ (که این معادل است با اینکه برای هر عضو ناصفر n متعلق به N ، rی متعلق به R موجود است به طوری که $rn\neq 0$ و $rn\in N$).

توسیع اساسی انژکتیو از M را یک پوشش انژکتیو برای M نامند و آن را با نماد $E_R(M)$ نشان می‌دهند.

۱۷.۱.۱ قضیه. [10, 10.25]فرض کنیم m یک ایده‌ال ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد در این صورت $E_R(\frac{R}{m})$ یکRـمدول آرتینی است.

۱۸.۱.۱ قضیه. [22, 2.11]فرض کنیم $\varphi : R \longrightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌های جابه‌جایی و یکدار P و N دو Sـمدول و M یک Rـمدول باشد. در این صورت

$$\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, P))$$

۱۹.۱.۱ قضیه. [23, 9.19]اگر $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق از Rـمدول‌ها و Rـهمریختی‌ها باشد. آنگاه

$$\mathrm{supp}_R(N) = \mathrm{supp}_R(L) \cup \mathrm{supp}_R(M).$$

۲.۱ مفاهیمی از همولوژی

۱.۲.۱ تعریف. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(\Omega, \leq)$ را جهت‌دار می‌نامند هرگاه برای هر $\lambda, \Gamma \in \Omega$ عنصری مانند $v \in \Omega$ موجود باشد به طوری که $\lambda \leq v$ و $\Gamma \leq v$.

۲.۲.۱ تعریف. فرض کنیم Ω مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و فرض کنیم برای هر $\lambda \in \Omega$ مجموعه‌ای مانند M_λ و برای هر $\Gamma, \lambda \in \Omega$ که $\lambda \leq \Gamma$ نگاشتی مانند $f_{\Gamma\lambda} : M_\Gamma \longrightarrow M_\lambda$ موجود باشد که:

۱) برای هر $\lambda \in \Omega$، $f_{\lambda\lambda} = Id_M$

۲) اگر $\lambda \leq \Gamma \leq v$ آنگاه $f_{\Gamma\lambda} \circ f_{v\Gamma} = f_{v\lambda}$

در این صورت $\{M_\lambda, f_{\Gamma\lambda}\}_\Omega$ را یک دستگاه معکوس می‌نامیم.

۳.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\{M_\lambda, f_{\Gamma,\lambda}\}_\Omega$ یک دستگاه معکوس باشد. گوئیم M_∞ حد معکوس این دستگاه است هرگاه برای هر $\alpha \in \Omega$، نگاشتی مانند $f_\alpha : M_\infty \longrightarrow M_\alpha$ موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha, \beta \in \Omega$، که $\alpha \leq \beta$، $f_{\beta\alpha} \circ f_\beta = f_\alpha$ و به علاوه برای هر مجموعه Y و هر خانواده از نگاشتها مانند $\{\Psi_\alpha : Y \longrightarrow M_\alpha\}$ که برای هر $\alpha, \beta \in \Omega$ که $\alpha \leq \beta$، در شرط $\Psi_{\beta\alpha} \circ \Psi_\beta = \Psi_\alpha$ صدق کند نگاشتی یکتا مانند $w : Y \longrightarrow M_\infty$ موجود باشد به طوری که برای هر $\alpha \in \Omega$ داشته باشیم $\Psi_\alpha = f_\alpha \circ w$. حد معکوس یک دستگاه معکوس مانند $\{M_\lambda, f_{\Gamma\lambda}\}_\Omega$ از Rـمدول‌ها و Rـهمومورفیسم‌ها موجود و یکتاست. حد معکوس این دستگاه را با نماد $\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ نمایش می‌دهند در واقع

$$\varprojlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{(a_\lambda) \in \Pi M_\lambda | a_\lambda = f_{\Gamma\lambda} a_\Gamma;\ \lambda \in \Gamma\}$$

۴.۲.۱ یادآوری. یک همبافت مانند A، دنباله‌ای از مدول‌ها و همریختی‌ها به شکل

$$A = \ldots \longrightarrow A_{n+۱} \xrightarrow{d_{n+۱}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-۱} \xrightarrow{d_{n-۱}} \ldots$$

است که در آن برای هر $n \in Z$، $d_n \circ d_{n+۱} = ۰$.

همچنین برای همبافت‌های A و A'، خانواده‌ی $(f_n : A_n \longrightarrow A'_n)$ از R ـهمریختی‌ها را نگاشتی زنجیری گوئیم. اگر دیاگرام زیر جابه جایی باشد:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A = & \ldots & \longrightarrow & A_{n+۱} & \xrightarrow{d_{n+۱}} & A_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-۱} & \xrightarrow{d_{n-۱}} & \ldots \\
& & & \downarrow f_{n+۱} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-۱} & & \\
A' = & \ldots & \longrightarrow & A_{n+۱} & \xrightarrow{d'_{n+۱}} & A'_n & \xrightarrow{d'_n} & A'_{n-۱} & \xrightarrow{d'_{n-۱}} & \ldots
\end{array}$$

اگر F فانکتور جمعی باشد، آنگاه

$$FA = \ldots \longrightarrow FA_{n+۱} \xrightarrow{Fd_{n+۱}} FA_n \xrightarrow{Fd_n} FA_{n-۱} \longrightarrow \ldots$$

نیز یک همبافت است. به ویژه اگر A دنباله‌ای دقیق باشد ($Imd_{n+1} = \ker d_n$) آنگاه FA یک همبافت است.

خارج قسمت $\frac{\ker d_n}{Imd_{n+1}}$ را nـامین همولوژی مدول همبافت A نامیم و با $H_n(A)$ نشان می‌دهیم.

حال اثر H_n را بر نگاشت زنجیری $f : A \longrightarrow A'$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_n(f) : H_n(A) \longrightarrow H_n(A')$$

$$Z_n + Imd_{n+1} \mapsto f_n(Z_n) + Imd'_n$$

به راحتی می‌توان نشان داد که H_n یک فانکتور از رسته‌ی همبافت‌ها به رسته‌ی گروه‌های آبلی است.

۵.۲.۱ قضیه. [22, 3.6]فرض کنیم $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \longrightarrow 0$ یک دنباله‌ی دقیق از همبافت‌ها باشد. در این صورت دنباله‌ی دقیق زیر از مدول‌ها وجود دارد:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A') \xrightarrow{i_*} H_n(A) \xrightarrow{p_*} H_n(A'') \xrightarrow{\sigma} H_{n-1}(A') \longrightarrow \ldots$$

۶.۲.۱ یادآوری. فرض کنیم R یک حلقه و M یک Rـمدول باشد. دنباله‌ی دقیق $\ldots \longrightarrow p_1 \longrightarrow p_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که در آن p_iها، Rـمدول‌های تصویری هستند را یک تحلیل تصویری برای M نامیم. اگر p_iها آزاد باشند آنگاه این دنباله‌ی دقیق یک تحلیل آزاد برای M نامیده می‌شود. هر Rـمدول M دارای یک تحلیل آزاد است از طرفی هر R ـمدول آزاد، تصویری است. پس هر Rـمدول M دارای یک تحلیل تصویری است. همچنین دنباله‌ی دقیق $\ldots \longrightarrow E' \longrightarrow E^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ که در آن E^iها Rـمدول‌های انژکتیو هستند را یک تحلیل انژکتیو برای M نامیم و هر Rـمدول هم دارای یک تحلیل انژکتیو است.

۷.۲.۱ یادآوری. براساس قضیه‌های (۹.۲) و (۱۰.۲) از [21] فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}(-, M)$ و فانکتور همورد $\mathrm{Hom}(M, -)$ دقیق چپ هستند. همچنین فانکتورهای $- \otimes M$ و $M \otimes -$ دقیق راست هستند. حال مطابق با نمادگذاری‌های مرجع [21] مفاهیم مربوط به nـامین فانکتور مشتق شده راست و چپ را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنیم N یک Rـمدول راست باشد. برای هر Rـ مدول M، یکی از همبافت‌های تصویری حذفی‌اش مانند

$$\ldots \longrightarrow p_n \xrightarrow{d_n} p_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots p_1 \xrightarrow{d_1} p_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

را در نظر می‌گیریم. با اثر دادن فانکتور $N \otimes -$ بر دنباله‌ی فوق، دنباله‌ی $\ldots \longrightarrow N \otimes p_1 \xrightarrow{N\otimes d_1} N \otimes p_0 \xrightarrow{N\otimes d_0} 0$ را به دست می‌آوریم. اکنون برای هر $n \geq 0$، خارج قسمت $\ker(Id_N \otimes d_n)/Im(Id_N \otimes d_{n+1})$ که در واقع nـامین همولوژی مدول این دنباله است را با $\mathrm{tor}_R^n(N, M)$ نشان می‌دهیم. این مدول مستقل از انتخاب تحلیل تصویری برای M است.

به طور مشابه با در نظر گرفتن یکی از همبافت‌های تصویری حذفی N می‌توان $\mathrm{Tor}_R^n(N, M)$ را تعریف نمود. همچنین برای مدول‌های A و C با در نظر گرفتن یکی از همبافت‌های انژکتیو حذفی مدول A و اثر دادن فانکتور $\mathrm{Hom}(C, -)$ بر روی آن می‌توان $\mathrm{ext}_R^n(C, A)$ را تعریف نمود.

حال اگر یکی از همبافت‌های تصویری حذفی C را در نظر بگیریم و فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}(-, A)$ را بر آن اثر دهیم می‌توان $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ را تعریف نمود. یکریختی‌های

$$\mathrm{Ext}_R^n(C, A) \cong \mathrm{ext}_R^n(C, A), \qquad \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{tor}_R^n(N, M)$$

برقرار است. از این رو دیگر تمایزی بین $\mathrm{Tor}_n^R(N, M)$ و $\mathrm{tor}_n^R(N, M)$ و نیز بین $\mathrm{ext}_R^n(C, A)$ و $\mathrm{Ext}_R^n(C, A)$ قائل نمی‌شویم.

۸.۲.۱ قضیه. [22, 7.6]

$$\mathrm{Tor}_n^R(A, \oplus_{k\in K} B_k) \cong \oplus_{k\in K} \mathrm{Tor}_n^R(A, B_k)$$

۹.۲.۱ قضیه. [22, 9.21]فرض کنیم R یک حلقه‌ی نوتری و Rـمدول‌های M و N متناهی مولد باشند. در این صورت برای هر $n \geq 0$، Rـمدول‌های $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$ و $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ متناهی مولد هستند. (و لذا طبق (۱۴.۱.۱) هر دو نوتری هستند).