بسم الله الرحمن الرحيم

٤٢٤٢٩

۱۳۸۱ /۵/ ۵

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

تشخیص پذیری بعضی از گروههای متناوب
با استفاده از مرتبه عناصر آنها

تحقیق و نگارش:

مهدی ذبیحی

استاد راهنما:

دکتر علی ایرانمنش

۴۲۴۲۹

زمستان ۱۳۸۰

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان نامه خانم/ آقای مهدی ذبیحی‌بیدگلی

تحت عنوان: **تشخیص‌پذیری بعضی از گروههای متناوب بوسیله مرتبه عناصرش**

را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آنرا برای اخذ درجه کارشناسی‌ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبهٔ علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	آقای دکتر علی ایرانمنش	دانشیار	
۲- استاد مشاور	-	-	
۳- استاد ناظر	آقای دکتر سیداحمد موسوی	استادیار	
۴- استاد ناظر	آقای دکتر علیرضا جمالی	استاد	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر سیداحمد موسوی	استادیار	

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرّس، مبیّن بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادّهٔ ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان‌نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

مادّهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ .... است که در سال .... در دانشکدهٔ .... دانشگاه تربیت مدرّس به راهنمایی سرکار خانم/جناب آقای دکتر ....، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر .... و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر .... از آن دفاع شده است.»

مادّهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادّهٔ ۴ در صورت عدم رعایت مادّهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرّس، تأدیه کند.

مادّهٔ ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادّهٔ ۴ را از محلّ توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادّهٔ ۶ اینجانب مهری زمیدی دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام‌خانوادگی: مهری زمیدی

تاریخ و امضا:

تقدیر و تشکر

بدینوسیله از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر علی ایرانمنش که کمک ایشان در انجام پایان نامه برای من راه گشا بوده است، کمال تشکر را دارم و همچنین از جناب آقای دکتر علیرضا جمالی که در جلسهٔ دفاع اینجانب با کمال دقت اشکالات این پایان نامه را متذکر شدند و راهنماییهای مفیدی داشتند تشکر و قدر دانی می کنم.

چکیده

برای گروه متناهی G, $\pi_e(G)$ را مجموعهٔ مرتبهٔ عناصر G قرار می دهیم این مجموعه تحت عمل بخش پذیری بسته میباشد. اگر Γ یک مجموعه اعداد صحیح باشد آنگاه $h(\Gamma)$ را تعداد گروههای غیر ایزومرف G در نظر می گیریم بطوریکه $\pi_e(G)=\Gamma$. گروه G را تشخیص پذیر بوسیلهٔ $\pi_e(G)$ گوییم هرگاه $h(\pi_e(G))=1$ وk-شناسایی پذیر گوییم هر گاه $h(\pi_e(G))=k$ و غیر قابل شناسایی گوییم هر گاه $h(\pi_e(G))=\infty$.در این پایان نامه نشان میدهیم که گروه A_n برای هر عدد اول $3<n$ و گروه $S_8(2)$ تشخیص پذیر می باشند.

واژه های کلیدی: گروههای متناهی ، تشخیص پذیر ، شناسایی پذیر ، غیر قابل شناسایی ، گراف اول ، مرتبه عناصر

فهرست مطالب

فهرست جداول

مقدمه

تشخیص پذیری و رده بندی گروههای متناهی براساس یک خاصیت نظریـــه گروهـــها یکی از مهمترین مسائل نظریه گروهها می‌باشد از آن جمله رده بنـــدی گروهـــهای متنـــاهی ساده را می‌توان نام برد. شناسایی و رده بندی تمام گروههای ساده تا سال ۱۹۸۱ به پایـــان رسید براساس این رده بندی گروههای ساده به یکی از دسته‌های زیر تعلق دارند؛

۱ـ گروههای ساده آبلی Z_p ، p عددی اول

۲ـ گروههای ساده غیر آبی:

الف) گروههای متناوب A_n ، $n \geq ۵$

ب) ۱٦ گروه سادهٔ از نوع لی [1]

ج) ۲٦ گروه سادهٔ پراکنده [2]

---

1 -Lie Groups

2- Sporadic simple groups

گروههای سادهٔ غیر آبلی در جداول ۱و۲ ارائه شده‌اند. پس از آنکه دسته بندی گروههای ساده به پایان رسید بسیاری از حدسها و نظریه‌ها در مورد گروههای متناهی براساس این دسته بندی به وجود آمد. از جمله مفاهیمی که از یک گروه متناهی مورد توجه قرار می‌گیرد مرتبه عناصر یک گروه است و اینکه آیا می‌توان یک گروه متناهی را با استفاده از مرتبه عناصرش شناخت براساس سئوال فوق تعریف زیر را داریم:

گروه M را تشخیص پذیر[1] به وسیله مرتبه عناصرش گوییم هر گاه یک کلاس یکریختی از گروههایی مانند G موجود باشد به طوری که $\pi_e(G)=\pi_e(M)$، که در آن $\pi_e(G)$ مجموعه مرتبه عناصر G می‌باشد. و اگر تعداد کلاسهای یکریختی k ـ تا باشد به گروه M، k ـ شناسایی پذیر[2] و در غیر این صورت شناسایی ناپذیر گوییم. برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ دبلیوـ شی [3] مطالعاتی دربارهٔ گروههای تشخیص پذیر انجام داد و نشان داد که A_5 گروهی تشخیص پذیر می‌باشد [1] از آن به بعد دسته بندی گروههای تشخیص پذیر ادامه پیدا کرد و نتایج به دست آمد:

الف) گروههای تشخیص پذیر:

(۱) A_n که $p+2$ و $p+1$ ، p ، $n=16$ که در آن $5\leq p$ عددی اول است.

(۲) S_n برای ۱٤ و $n=7,11,12,13$

(۳) گروههای ساده پراکنده به جز J_2

(٤) گروههای سادهٔ از نوع لی $L_2(q)$ برای $q\neq2$ ، $L_3(2^m)$ برای $m\geq1$ ، $U_3(2^m)$ برای $m\geq2$، $G_2(q)$ وقتی که $3|q$ ، $^2G_2(q)$ ، $Sz(2^{2m+1})$ برای $m\geq1$ ، $R(3^{2m+1})$ برای $m\geq1$ ،

1- Characterizable

2- K-recognizable

3- W-Shi

$^2F_4(2^{2m+1})$ **وقتی که** $m\geq1$، $L_3(7)$ ، $L_4(3)$ ، [2]$L_5(2)$ ، [3]$L_5(3)$، [2]$L_6(2)$،
[2]$L_7(2)$، $U_3(11)$ ، $U_4(13)$ ، $U_6(2)$، $O_8^-(2)$، $O_{10}^-(2)$ ، $S_4(7)$ ، $^2F_4(2)'$.

ب) گروههای ۲ـ شنایایی پذیر:

(۱) $L_3(5)$; $L_3(5):2$

(۲) $L_3(9)$; $L_3(9):2$ [۲٤]

(۳) $S_6(2)$; $O_8^+(2)$

(٤) $O_7(3)$; $O_8^+(3)$

ج) گروههای غیرقابل شناسایی :

(۱) **گروههای** A_6 ، A_{10} [٤]، A_3 و A_4

(۲) **گروههای** S_8,S_6,S_5,S_4,S_3,S_2 **و گروه** $PGL(p,q)$ **که** $q=r^s$ ، p و r **اعداد اول فرد می‌باشند به طوری که** $p|r-1$ و $p^2\nmid r-1$ و $p\nmid s$

(۳) **گروههای** $S_4(q)$ **که** $3\nmid q$ و $U_3(q)$ **به ازای** $q= 3,5,7$ [٤]، $U_4(2)$ [٤] و $U_5(2)$ [٤]

با توجه به دسته بندی فوق می‌توان مسائل زیر را طرح کرد:

سئوال ۱ـ آیا گروه نامتناهی تشخیص پذیروجود دارد؟

سئوال ۲ـ آیا گروه نامتناهی ۲ـ شناسایی پذیر وجود دارد؟

سئوال ۳ـ آیا گروه متناهی kـ شناسایی پذیر که $k\geq3$ باشد، وجود دارد؟

تاکنون بحث تشخیص پذیری گروهها به وسیله مرتبه عناصر آن در مورد گروههایی صورت گرفته است که تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف اول آنها حداقل ۲ می‌باشد تنها گروهی که گراف اول آن تنها یک مؤلفه همبندی داشته و تشخیص پذیری آن به اثبات

رسیده است گروه A_{16} می‌باشد که توسط وی.زاوارنیتسین[1] مورد بررسی قرار گرفته است پس:

سئوال ٤ـ کدام یک از گروههای متناهی با یک مولفه همبندی گراف اول، تشخیص پذیر می‌باشند؟

در فصل اول پایان نامه مقدماتی از نظریه گروههای متناهی شامل تعاریف وقضایایی از گروههای فرابنیوس، ۲ـ فرابنیوس، حل پذیر و پوچ توان و زیرگروههای فراتینی آمده است و همچنین در بخش دوم این فصل مقدمات و چند قضیه که در اثبات قضیهٔ اصلی پایان نامه کاربرد دارد، از نظریهٔ نمایش گروههای متناهی آورده شده است. در فصل دوم تعریف گراف اول یک گروه متناهی ومولفه‌های همبندی و نتایجی از آن ارائه شده است و بعد از تعریف تشخیص پذیری یک گروه، نشان خواهیم داد که گروه متناوب A_n موقعی که عدد n عددی اول بزرگتر از ۳ است. به وسیله مرتبه عناصرش تشخیص پذیر می‌باشد. مرجع اصلی پایان نامه ، [۱۷] می‌باشد که در فصل دوم بدان پرداخته‌ایم.

یکی از گروههایی که تا کنون راجع به تشخیص پذیری یا شناسایی پذیر بودن آن هیچ کاری صورت نگرفته است گروه $S_8(2)$ می‌باشد در فصل سوم نشان می‌دهیم که گروه $S_8(2)$به وسیله مرتبه عناصرش تشخیص پذیر می‌باشد. که تمامی کارهای مربوطه در این فصل برای اولین بار انجام شده است.

1- V.Zavarnitsin

فصل اول

پیش نیازها

۱ـ۱. بعضی از خواص مهم گروههای متناهی

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنیم G یک گروه و a عضوی از آن باشد . مرتبه عنصر a را با |a| یا 0(a) و مجموعه مرتبه‌های عناصر گروه G را با $\pi_e(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱ـ۱ـ۲. فرض کنیم K و H دو گروه دلخواه باشند. گوییم گروه G توسیع H به وسیله K می‌باشد و با نماد G=H.K نمایش می‌دهیم هر گاه G حاوی زیر گروهی نرمال مانند M باشد به طوری که M≅H و $G/M \cong K$ حال اگر علاوه بر خواص بالا G حاوی زیر گروهی یکریخت با K باشد گوییم G توسیع شکافته شده H به وسیله K است و با نماد G=H:K نمایش می‌دهیم [٦].

تعریف ۱ـ۱ـ۳. گروه G را یک گروه فرابنیوس گوییم هر گاه G توسیع شکافته شده K به وسیله C باشد به طوری که برای هر x∈C داشته باشیم $C_K(x)=1$ که در آن $C_K(x)$ مرکز ساز x در K می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$C_K(x)=\{k\in K|xk=kx\}$

زیر گروه نرمال K از گروه فرابنیوس G را هسته فرابنیوس و زیر گروه C را مکمل فرابنیوس می‌نامیم [۷ و ۸].

تعریف ۱ـ۱ـ٤. یک زنجیر از زیر گروههای G مانند $G = G_n \geq G_{n-1} \geq \ldots \geq G_0 = 1$ سری نرمال (زیر نرمال) از گروه G است اگر برای هر 1≤i≤n-1 ، $G_i \trianglelefteq G$ $(G_i \trianglelefteq G_{i+1})$. دراین صورت گروههای خارج قسمتی G_i/G_{i-1} برای 1≤i≤n-1 را عوامل سری می‌نامیم.

یک سری زیر نرمال سری ترکیبی نامیده می‌شود هر گاه عوامل سری گروههای ساده باشند در این صورت عوامل یک سری ترکیبی را عوامل ترکیبی نامند.

تعریف ۱ـ۱ـ۵. G یک گروه ۲ـ فرابنیوس است اگر G شامل سری نرمال G>K>H>1 باشد به طوری که K فرابنیوس با هسته H و G/H گروه فرابنیوس با هسته K/H باشد.

تعریف ۱ـ۱ـ۶. فرض کنیم π زیر مجموعه‌ای از اعداد اول باشد. گوییم عضو x از گروه G یک π- عضو است اگر $|x|$ فقط توسط اعداد اول در π شمرده شود. به عبارت دیگر $\pi(|x|)\subseteq\pi$ که در آن $\pi(n)$ برای $n\in N$ مجموعه اعداد اولی که n را می‌شمارد می‌باشد. حال فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، مجموعه اعداد اول که $|G|$ را می‌شمارد با $\pi(G)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر $\pi(G)=\pi(|G|)$. G را یک π- گروه نامیم هر گاه $\pi(G)\subseteq\pi$. متمم مجموعه π را با π' نمایش می‌دهیم بنابراین به طور مشابه می‌توان π'- عضو و π'- گروه را تعریف کرد [۷].

تعریف ۱ـ۱ـ۷. فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، گروه G حل پذیر[1] است اگر و تنها اگر G حاوی سری نرمالی باشد که هر عامل سری گروهی آبلی باشد [۶].

پس G گروهی حل پذیر است هر گاه عوامل ترکیبی G از مرتبه عدد اول باشند [۶].

لم ۱ـ۱ـ۸. فرض کنیم N یک زیر گروه نرمال مینیمال گروه G باشد. اگر N متناهی و حل پذیر باشد، آنگاه N یک p- گروه آبلی مقدماتی است یعنی N گروهی آبلی است و همهٔ اعضای آن از مرتبه P می‌باشند [۹؛ لم 6.8B].

قضیه ۱ـ۱ـ۹. (قضیهٔ پ ـ هال)[2] فرض کنیم G یک گروه متناهی و حل پذیر باشد و همچنین π زیر مجموعه $\pi(G)$ باشد دراین صورت G حاوی زیر گروهی است که مرتبه آن فقط توسط اعداد اولی که در π هستند شمرده می‌شود [۹؛ قضیه 9.8C].

لم ۱ـ۱ـ۱۰. اگر G گروهی متناهی و حل پذیر باشد به طوری که مرتبه هر عنصر آن توانی از عدد اول باشد، آنگاه $|\pi(G)|\leq 2$ [۱۰؛ قضیه ۱.]

لم ۱ـ۱ـ۱۱. اگر N زیر گروهی نرمال از گروه G و P زیر گروه مشخصهٔ N باشد. دراین صورت P زیر گروهی نرمال از G است.

1- Solvable Group

2- P.Hall