بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم
گروه ریاضی

محاسبه Exp (A) بوسیله تبدیل لاپلاس و روش‌های فضای کریلف

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مولف:

محمد مولائی ناولیقی

استاد راهنما:

دکتر محمدیعقوب رحیمی اردبیلی (دانشگاه تبریز)

مهر ۱۳۸۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

باسمه تعالی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: محاسبه exp(A) بوسیله تبدیل لاپلاس و روش های فضای کریلف

که توسط محمد مولائی ناولیقی **تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأئید می باشد.**

تاریخ دفاع: ۸۵/۰۷/۲۶ **نمره:** ۱۹ نوزده **درجه ارزشیابی:** عالی

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر محمدیعقوب رحیمی اردبیلی	استاد راهنما	استاد	
۲- ـــ	استاد راهنمای همکار یا مشاور	--	
۳- دکتر میرکمال میرنیا	استاد ممتحن	دانشیار	
۴- دکتر مهدی صحت خواه	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

(نمونه تصویب نامه پایان نامه)

ساختمان مرکزی تهران ... صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۴۶۹۷ ...
پست الکترونیک: Info@pnu.ac.ir، نشانی الکترونیک: Http://www.pnu.ac.ir

تقدیم به :

پدر عزیز و مادر مهربانم

تقدیر و تشکر:

حمد و سپاس خداوند را که مرا در مسیر کسب علم و دانش و در تمام مراحل زندگی مورد لطف و عنایت خود قرار داده است. با عنایت به حدیث شریفه« من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» لازم می دانم از زحـمات کسانـی که مـرا درمـسیر زندگـی و کسب علـم و دانش یـاری داده اند تشکر کنم. از پدربزرگوارم و مادرمهربانم که درتمام مراحل زندگی یار و یاور من بوده اند کمال تشکر را دارم. از برادر عزیز و خواهران عزیزم و خانواده هایشان سپاسگزاری می کنم. همچنین از دائی عزیزم جناب آقای حـسین قاسمی که در تمام مراحل تحـصیل یـاور و راهنـمای مـن بوده اند قدردانی می کنم. لازم می دانم از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی تشکر کنم که هم در دوره کارشناسی ارشد و هم در تهیه این پایان نامه زحمات زیادی را متحمل شده اند.

از جناب آقای دکتر میر کمال میرنیا که هم در دوره کارشناسی ارشد زحمات زیادی را متحمل شده و همچنین زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

در پایان بر خود لازم می دانم از زحمات اساتیدگرانقدر آقایان دکتر جدیری، دکتر ایواز و دکتر صحت خواه مدیر محترم گروه ریاضی دانشگاه پیام نور و خانم سیار مسئول تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تشکر و قدردانی کنم .

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست اشکال

شکل **صفحه**

دانشگاه پیام نور

نام خانوادگی دانشجو : مولائی ناولیقی **نام :** محمد

عنوان پایان نامه : محاسبه $Exp(A)$ بوسیله تبدیل لاپلاس و روشهای فضای کریلف

استاد راهنما : دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته :** ریاضی کاربردی (گرایش آنالیز عددی)

دانشگاه : پیام نور مرکز تبریز **دانشکده:** علوم ریاضی

واژه های کلیدی : ماتریس ،نمایی ، تبدیل لاپلاس ، فضای کریلف ، فضای حالت

چکیده پایان نامه : در این پایان نامه معادلات دیفرانسیل خطی را مورد مطالعه و بررسی قرار داده ـ ایم و برای حل این معادلات نیاز به محاسبه e^A پیدا می کنیم که انواع روشهای محاسبه e^A را جمع آوری کرده و در این پایان نامه آورده ایم و چگونگی به کارگیری آنها را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مورد بررسی قرار داده ایم و روش تبدیل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n را به دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی شرح داده ایم. این پایان نامه مفاهیم جبر خطی را در معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n ام ، با تاکید خاصی بر معادلات با ضرایب ثابت به مورد اجرا می گذارد. برای بحث در مورد دستگاههای معادلات دیفرانسیل از حسابان ماتریسی استفاده می شود. این پایان نامه برماتریس نمایی که خواص آن بوسیله عمل و عکس العمل متقابل بین جبر خطی و حسابان ماتریسی حاصل می شود تاکید می کند .

مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیکی ، اقتصادی ، بیولوژیکی منجر به حل معادله دیفرانسیل به فرم $x'(t) = Ax(t)$ می شود که جواب این معادله دیفرانسیل به فرم $x(t) = e^{At}x(0)$ می باشدکه درآن A یک ماتریس $n\times n$ است. مساله اصلی در این جا منجر به محاسبه e^{At} می شود . در این پایان نامه ما انواع روشهای محاسبه e^{At} را بررسی می کنیم. در فصل دوم این پایان نامه روشهای سری توانی و روش پاتزر را برای محاسبه e^{At} مورد بررسی قرار داده ایم. برای این کار از حسابان توابع ماتریسی بهره جسته ایم. در فصل سوم با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه روش محاسبه e^{At} را مورد بررسی قرار داده ایم. چگونگی بکار گیری آن زمانی که مقدار های ویژه تکراری باشند را شرح داده ایم و خواص ماتریس اساسی جوابها را مورد مطالعه قرار داده ایم و حل معادله دیفرانسیل غیر همگن را توضیح داده ایم .

در فصل چهارم کاربردهایی ازآن در مهندسی کنترل را توضیح داده ایم ، روش تبدیل لاپلاس را برای محاسبه e^{At} بررسی کرده ایم. سیستم های حالت را تعریف کرده ، مدل سازی در فضای حالت و خواص ماتریس گذر حالت را شرح داده ایم. در ادامه روش درون یابی سیلوستر برای محاسبه e^{At} را آورده ایم . چون در اغلب موارد برای محاسبه e^{A} نیاز به مقادیر ویژه A داریم روش بدست آوردن مقادیر ویژه ماتریس A رابه روش کریلف و لوریير توضیح داده ایم در این پایان نامه استفاده از قضیه وجود – یکتایی در مطالعه معادلات دیفرانسیل خطی به تصویر کشیده شده است . این پایان نامه ماتریس های نمایی را در جبر خطی توسعه می بخشد و از آنها برای مطالعه دستگاههای معادلات دیفرانسیل خطی استفاده می کند . در فصل پنجم چگونگی تبدیل معادله دیفرانسیل مرتبه n را به دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی شرح داده ایم و چند مثال کاربردی از سیستم های حالت را مورد بررسی قرار داده ایم و در نهایت روشهای عددی را برای محاسبه e^{A} وتحلیل پایداری آن آورده ایم ودر ضمیمه نیز استفاده از نرم افزار متمتیکا برای محاسبه e^{A} را آورده ایم .

این پایان نامه برگرفته از مجله SIAM تحت عنوان

Cleve Moler and Charles Van Loan , Siam Review , Nineteen Dubious ways to compute the Exponential of a Matrix , Twenty – Five Years Later, Volume 45, Number 1 , March 2003

که عنوان اصلی پایان نامه عبارتست از

Computation of Exponential of a Matrix by Laplace transformation and Krylov Space methods .

فصل اول:

مفاهیم مقدماتی و پیشینه پژوهش

۱-۱ تعاریف اساسی مربوط به ماتریسها :

تعریف ماتریس : ماتریس $m\times n$ مانند A را به صورت مجموعهٔ مرتبی از mn عدد حقیقی (یا مختلط) a_{ij} که به صورت

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

نوشته می شود تعریف می کنیم که در آن a_{ij} را درایه های ماتریس گویند ودرایه a_{ij} در سطر iاُم وستون jاُم ماتریس A قرار دارد . وماتریس A را به ابعاد $m\times n$ گویند .گاهی اوقات برای راحتی ماتریس A را به صورت $A=(a_{ij})_{m\times n}$ نشان می دهند . اگر m=n در این صورت ماتریس A را ماتریس مربعی با بُعد n گوییم .

در ماتریس مربعی A درایه های $a_{11}, a_{22},\dots, a_{nn}$ را درایه های قطری گویند.

یک بردار ستونی عبارتست از ماتریسی که فقط شامل یک ستون باشد مثلاً ماتریس $x=[x_1, x_2,\dots, x_m]^T$ که با بعد m×۱ است معمولاً چنین برداری رابا x نشان می دهند.

یک بردار سطری عبارتست از ماتریسی که فقط یک سطر دارد که با بعد n × ۱ است . مانند $y=[y_1,\dots,y_n]$

مجموعهٔ تمامی بردارهای ستونی n بعدی را یک فضای n بعدی گویند .

ماتریس صفر : ماتریس m ×n را که تمام درایه های آن صفر باشند ماتریس صفر گویند و آن را با $O_{m\times n}$ یا O نشان می دهند .

تساوی دو ماتریس : دو ماتریس را مساوی گویند .هرگاه ابعاد آنها مساوی بوده و درایه های نظیر به نظیر آنها مساوی باشند.

ماتریس همانی : ماتریس $I=(\delta_{ij})_{n\times n}$ را که در آن $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ را ماتریس همانی گویند. ماتریس همانی I عضو خنثی عمل ضرب ماتریس ها است . یعنی $AI=IA=A$

مجموعهٔ تمام ماتریسهای حقیقی (یا مختلط) n ×m یک فضای برداری تشکیل می دهند که آن را با $R^{n\times m}$ یا $C^{n\times m}$ نشان می دهیم .

ترانهاده ماتریس : ترانهادهٔ ماتریس A را با A^T نشان می دهیم . هرگاه $A=(a_{ij})_{m\times n}$ آنگاه $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$.
تعریف : ماتریس A را متقارن گویند هر گاه $A^T = A$

تعریف ماتریس ترا نهاده مزدوج: اگر A ماتریسی با درایه های مختلط باشد آنگاه ماتریس ترانهاده مزدوج A را با A^* نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند.

$$A^* = \overline{A}'$$

که در آن $\overline{A}$ ماتریسی است که درایه های آن مزدوج مختلط درایه های ماتریس A هستند.
تعریف ماتریس هرمیتی: ماتریس مربعی A را هر میتی گویند هر گاه $A = A^*$

تعریف : ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ را بالا مثلثی (اکید) گویند هرگاه برای $i \geq j$ $(i > j)$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ و پایین مثلثی (اکید) گویند هرگاه برای $i \leq j$ $(i < j)$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$.

تعریف : ماتریس مربعی Aرا قطری گویند هرگاه برای هر $i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ وآن را با نماد $A = dig(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ نشان می دهند.

مجموع درایه های روی قطر اصلی ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را با $trac(A)$ نشان می دهند، یعنی

$$trac(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

وارون ماتریس : برای ماتریس مربعی A اگر ماتریسی مربعی مانند B چنان موجود باشد که $AB = BA = I$ آنگاه A را وارون پذیر گویند و B را وارون A گویند. وارون A را با A^{-1} نشان می دهند.
اگر A وارون پذیر باشدآن را غیرتکین (نامنفرد) می گویند. درغیراینصورت آن را منفردگویند. اگر Aغیرتکین (نامنفرد)باشد آنگاه A^{-1} منحصر به فرد است.

اگر A ، B غیر تکین (نامنفرد) باشند ، آنگاه AB و λA $(\lambda \neq 0)$ و A^T نیز نامنفردند وداریم :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$$
$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

۱-۲فضای برداری

در مطالعهٔ سیستمهای خطی ، فضاهای برداری را به روی یک میدان تعریف می کنیم .
تعریف : میدان از مجموعه ای از عناصر به نام اسکالرها همراه با دو عمل جمع وضرب تشکیل شده که شرایط زیر را برآورده سازد .

۱-برای هر دو اسکالر α وβ در F یک عنصر $\alpha+\beta$ در F وجود داشته که مجموع α وβ نامیده شده وهمچنین یک عنصر $\alpha\beta$ که حاصلضرب α وβ نامیده می شود وجود دارد .
۲- برای هر سه اسکالر α، β، γ در F داریم

i) قوانین جابجایی $\alpha\beta = \beta\alpha$ و $\alpha+\beta = \beta+\alpha$

ii) قوانین شرکت پذیری $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$ و $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

iii) قوانین توزیع پذیری $\alpha(\beta+\gamma)=(\alpha\beta)+(\alpha\gamma)$.

F-۳ یک عنصر نشان داده شده با ۰ ویک عنصر نشان داده شده با ۱ دارد به گونه ای که به ازای هر اسکالر α در F ، $\alpha+0=\alpha$ وهمچنین $\alpha\times1=\alpha$.

۴-برای هر عنصر α در F یک عنصر مانند β وجود دارد که $\alpha+\beta=0$.

۵- برای هر عنصر α در F (که عنصر ۰نمی باشد .) یک عنصر γ وجود دارد که $\alpha\gamma=1$.

تعریف : فضای برداری V به روی میدان F مجموعه ای از بردارهاست که می توانند با هم جمع شده ودر اسکالرهای عضو میدان F ضرب گردند به گونه ای که حاصل جمع بردارها وحاصلضرب بردار در اسکالر نیز عضو V بوده و شرایط زیر را بر آورده سازند.

(۱) برای عناصر w,u,v عضو V داریم $(u+v)+w=u+(v+w)$

(۲) یک عنصر v نشان داده شده با ۰ وجود دارد که برای هر عنصر u عضو V ، داریم

$$0+u=u+0=u$$

(۳) برای یک عنصر داده شدهٔ u در V ، یک عنصر $-u$ در V به گونه ای وجود دارد که

$$u+(-u)=0$$

(۴) برای کلیهٔ عناصر u,v عضو V داریم

$$u+v=v+u$$

(۵) برای هر α,β در میدان F و هر بردار v در V داریم

$$(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v),\quad (\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$$

(۶) برای هر α در میدان F وبردارهای u,v در V داریم

$$\alpha(u+v)=\alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$$

(۷) برای هر u در V داریم

$$1.u=u$$ (که در آن ۱ عنصر واحد در F است .)

تعریف : فضای برداری V به روی میدان F را در نظر بگیرید . اگر M زیر مجموعه ای از V باشد آنگاه M را یک زیر فضا از V به روی میدان F گویند اگر M تحت عملیات V یک فضا به روی میدان F تشکیل دهد .

تعریف: به هر بردار X در فضای برداری R^n می توان یک عدد حقیقی نسبت داد که این عدد را با $\|X\|$نشان داده و آن را نرم X می نامند. اگر در شرایط زیر صدق کند.

الف) $\|X\|\geq 0$ و $\|X\|=0$اگر و فقط اگر $X=0$

ب) برای هر عدد حقیقی αو هر بردار X، $\|\alpha X\|=|\alpha|\|X\|$

ج) برای هر دو بردار دلخواه X و Y $\|X+Y\|\leq\|X\|+\|Y\|$

در واقع نرم برداری نگاشتی از فضای nبعدی به اعداد حقیقی است به طوریکه در شرایط بالا صدق کند.

تعریف نرم ـ p یک بردار : نرم ـ p یک بردار عبارت است از:

$$\|X\|_P=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

همچنین نرم بی نهایت به صورت زیر تعریف می شود.

$$\|X\|_{\infty} = \max|x_i| \qquad i = 1,2,\dots,n$$

تعریف : فرض کنید Aماتریسی n×n باشد، M_{ij} را ماتریسی (n-۱)×(n-۱) حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس می گیریم و آن را ijامین کهاد ماتریس A می نامیم.

تعریف: همسازه (همعامل) ijام یک ماتریس $A_{n\times n}$ که با A_{ij} نشان داده می شود عبارت است از:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

تعریف: فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ باشد. الحاقی A به نمایش $adjA$ یک ماتریس $n \times n$ با تعریف زیر است

$$(adjA)_{ij} = cofA_{ji}$$

که در آن $cofA_{ji}$ همعامل A_{ji} در $|A|$ است.

قضیهٔ ۱-۲-۱ اگر $M_1, M_2, \dots M_n$ زیر فضاهای فضای برداری V باشند آنگاه $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n$ (اشتراک کلیهٔ زیر فضاها) نیز یک زیر فضا ار V خواهد بود. [۲]

۱-۳ترکیبهای خطی وپایه ها

تعریف : اگر $v_1, v_2, \dots, v_n$ بردارهای متعلق به فضاهای برداری V و اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ متعلق به میدان F باشند . آنگاه بردار u در V را که به صورت زیر

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

تعریف می شود ترکیب خطی از $v_1, v_2, \dots, v_n$ می نامند.

تعریف : فضاهای برداری V به روی میدان F را در نظر بگیرید . گوییم که این فضا توسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ تنیده شده است اگر کلیه این بردارها متعلق به V بوده وبتوان هر بردار $u \in V$ را به صورت ترکیب خطی از این بردارها نوشت . همچنین فضای تنیده شده توسط بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را به صورت $SP\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ نمایش می دهند.

تعریف : بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ متعلق به فضای برداری V را وابستهٔ خطی گویند اگر اسکالرهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ در میدان F چنان وجود داشته باشند که تمامی آنها ۰ نبوده ورابطهٔ زیر برقرار باشد .

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

در غیر اینصورت آنها را مستقل خطی می نامند. بنابراین بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را مستقل خطی گویند. اگر وفقط اگر در تساوی (۱-۳-۲) نتیجه شود $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

۱-۴ دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

که در آن a_{ij}ها و y_i ها عناصر میدان F فرض شده اند. x_i های نامعلوم نیز در همان میدان F قرار دارند . می توان این معادلات را به صورت ماتریسی زیر نوشت .

$$Ax = y \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & \dots & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix}$$

A یک ماتریس $m \times n$ و x بردار $n\times1$ و y بردار $m\times1$ است .عدد صحیح m می تواند بزرگتر یا مساوی یا کوچکتر از عدد صحیح n باشد . در رابطه با دستگاه معادلات خطی بالا دو سئوال مطرح است .نخست وجـود پاسـخ و سـپس تعـداد پاسـخهای دستگاه. به عبارت دیگر برای A و y داده شده آیا برداری مانند x وجود دارد که رابطـهٔ (۱-۴-۲) را برقـرار سـازد. واگـر چنـان برداری وجوددارد . تعداد بردارهای مستقل خطی که این رابطه را برقرار می سازند چه مقداری است .

۱-۵ حاصلضرب نقطه ای

حاصلضرب نقطه ای یا حاصلضرب اسکالری دو بردار در فضای n بعدی به صورت زیر معرفی می گردد .

تعریف : اگر $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ دو بردار در R^n باشند آنگاه حاصلضرب نقطه ای آنها که با علامت A.B مشخص می گردد بوسیلهٔ تساوی

$$A.B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

تعریف می گردد .

تعریف : دو بردار A,B در R^n برابر خوانده می شوند اگر مؤلفه های مشابه آنها یکسان باشند. به عبارتی ، $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ تساوی برداری $A = B$ ، دقیقاً با تساویهای اسکالری زیر یکسان است .

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

جمع A+B که به صورت بردار تعریف می گردد از حاصل جمع مؤلفه های نظیر به نظیر حاصل می شود .

$$A+B=(a_۱+b_۱,a_۲+b_۲,...,a_n+b_n)$$

اگر c اسکالر باشد cA و Ac بصورت برداری تعریف می شود که از ضرب A با c بدست می آید .

$$Ac=cA=(ca_۱,ca_۲,...,ca_n)$$

تعریف حاصلضرب ماتریسها : فرض کنید A ماتریس m×p و B ماتریس p×n

$A=(a_{ij}) \qquad i=۱,...,m$ و $j=۱,...,p$

و

$B=(b_{ij}) \qquad i=۱,...,p$ و $j=۱,...,n$

باشد پس حاصلضرب AB (به ترتیب ذکر شده) بصورت ماتریس m×n ، $C=(c_{ij})$ تعریف می گردد که درایهٔ ij آن بصورت حاصلجمع

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{p}a_{ik}b_{kj} \qquad (۱-۵-۱)$$

است .

توجه : حاصلضرب AB قابل تعریف نیست ، مگر آنکه تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای B باشد.

قضیهٔ ۱-۵-۱ قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری برای ضرب ماتریسها : بازای ماتریسهای A,B,C

(آ) اگر حاصلضربهای(BC) A و C(AB) معنی دار باشند آنگاه

قانون شرکت پذیری $\qquad A(BC)=(AB)C$

(ب)فرض کنید AوB مساوی هستند . اگر AC و BC معنی دار باشند آنگاه

قانون توزیعی راست $\qquad (A+B)C=AC+BC$

در صورتی که CA,CB معنی دار باشند ،آنگاه

قانون توزیعی چپ $\qquad C(A+B)=CA+CB \qquad$ [۵]

تعریف توانهای ماتریسی : اگر Aماتریس مربعی باشدتوانهای صحیح به طریق استقرایی به شرح زیرتعریف می گردد

برای $n\geq ۱$ $\qquad A^{\circ}=I \quad , A^n=A\ A^{n-۱}$

توانهای صحیح A با یکدیگر جابه جا می شوند . یعنی $A^nA^m=A^mA^n$ و $A^nA^m=A^{n+m}$ در حالت کلی چند جمله ای ماتریسی از ماتریس مربعی به این صورت نوشته می شود .

$$f(A)=\alpha_{\circ}I+\alpha_۱A+\alpha_۲A^۲+...+\alpha_nA^n$$

که در آن α_iها عدد هستند. به سادگی می توان نشان داد که چند جمله ای ماتریس مربع A تعویض پذیر می باشند . [۲]

یعنی آنکه $\qquad f(A)g(A)=g(A)f(A)$

همچنین دو چند جمله ای از ماتریسهای مربعی A,B تعویض پذیرند اگر A با B تعویض پذیر باشد . [۲]
چند جمله ای ماتریسی f(A) را می توان همانند چند جمله ایهای اسکالر به عوامل مختلف تجزیه کرد . برای مثال چند جمله ای ماتریسی $f(A)=A^{۲}+۴A+۳I$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$f(A)=(A+۳I)\ \ (A+I)$$

همانند حالت اسکالر که سری بی نهایت در متغیر اسکالر x به صورت زیر تعریف می گردد :

$$f(x)=\alpha_{۰}+\alpha_{۱}x+\alpha_{۲}x^{۲}+\ldots=\sum_{i=۰}^{\infty}\alpha_i x^i$$

سری بی نهایت برحسب متغیر ماتریس A نیز بدین صورت تعریف می شود

$$f(A)=\alpha_{۰}I+\alpha_{۱}A+\alpha_{۲}A^{۲}+\ldots=\sum_{i=۰}^{\infty}\alpha_i A^i$$

۱-۶ معکوس ماتریس های مربعی

تعریف ماتریس غیر تکین (معکوس پذیر): فرض کنید $A=(a_{ij})$ ماتریس n×n است . اگر ماتریس n×n ، B موجود باشد به طوری $BA=I$ که I ماتریس همانی n×n است آنگاه A غیر تکین (معکوس پذیر) نامیده می شود و B معکوس چپ A نامیده می شود.

قضیهٔ ۱-۶-۱

(آ) اگر ماتریس n×n ، A دارای معکوس چپ B باشد آنگاه B معکوس راست نیز است . AB=I و تنها یک معکوس چپ وجود دارد .

(ب) اگر ماترس n×n ، A دارای معکوس راست B باشد آنگاه B معکوس چپ نیز است . لذا A معکوس پذیر است .

تعریف دترمینان یک ماتریس : دترمینان اسکالر a به عنوان یک ماتریس ۱×۱ را خود اسکالر a تعریف می کنیم وبرای ماتریس $A_{n\times n}$ دترمینان A را چنین تعریف می کنیم :

$$\det A=\sum_{j=۱}^{n}(-۱)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) \qquad [۲] \qquad (۱-۶-۱)$$

که در آن A_{ij} ماتریس از مرتبهٔ $(n-۱)\times(n-۱)$ام است که از حذف سطر i اُم وستون j اُم ماتریس A حاصل می شود .

قضیه ۱-۶-۲ شرط لازم وکافی برای آنکه ماتریس مربعی A معکوس پذیر باشد این است که $\det A\neq ۰$ [۵]

قضیهٔ ۱-۶-۳ اگر A,B ماتریسهای مربعی هم بعد باشند آنگاه $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ [۵]

۱-۷ دترمینان ماتریس بلوک قطری

تعریف : ماتریس مربعی C به صورت

$$C=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}$$

که در آن A,B ماتریسهای مربعی و 0 نمایشگر ماتریس صفر است را ماتریس بلوکی – قطری می نامند.

قضیهٔ ۱-۷-۱ برای هر دو ماتریس مربعی A,B نتیجهٔ زیر حاصل می شود . [۲]

$$\det\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=(\det A)(\det B) \qquad (۱-۷-۱)$$

قضیهٔ ۱-۷-۲ یک ماتریس وترانهادهٔ آن دارای دترمینانهای برابر هستند. [۵]

۱-۸ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ یک ماتریس

اسکالر λ را مقدار ویژهٔ ماتریس مربعی A گویند .هرگاه بردار غیر صفر $u \in C$ موجود باشد که $Au = \lambda u$ وبردار u را بردار ویژهٔ ماتریس A وابسته به مقدار ویژهٔ λ گویند.

λ مقدار ویژهٔ ماتریس $A_{n\times n}$ است اگر وتنها اگر

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = ۰ \qquad (۱-۸-۱)$$

که $P_A(\lambda)$ یک چند جمله ای از درجهٔ n برحسب λ است که به چند جمله ای مشخصهٔ ماتریس A معروف است ودر حالت کلی

$$(-۱)^n \det(A - \lambda I) = \lambda^n - (tracA)\lambda^{n-۱} + ... + (-۱)^n \det A = ۰ \qquad (۲-۸-۱)$$

می باشد . لذا اگر $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژهٔ A باشند .

$$tracA = \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i \qquad (۳-۸-۱)$$

$$\det A = \prod_{i=۱}^{n} \lambda_i \qquad (۴-۸-۱)$$

واضح است که ماتریس $A_{n\times n}$ حداکثر n بردار ویژهٔ دارد .

مجموعهٔ همهٔ بردارهای ویژهٔ A را طیف ماتریس A گویند و با نماد $\sigma(A)$ نشان می دهند . بدیهی است که یک ماتریس معکوس پذیر نیست اگر وتنها اگر مقدار ویژهٔ صفر داشته باشد .

اگر $\lambda_۱, \lambda_۲, ..., \lambda_n$ مقادیر ویژهٔ دو به دو متمایز ماتریس A باشند و $v_۱, v_۲, ..., v_n$ بردارهای ویژهٔ متناظر λ_i ها باشند . آنگاه $\{v_i\}_{i=۱}^{n}$ مستقل خطی خواهند بود . [۱]

شعاع طیفی : بزرگترین مقدار ویژهٔ ماتریس A را از نظر قدر مطلق شعاع طیفی A گویند وآن را با نماد $\rho(A)$ نشان می دهند. یعنی

$$\rho(A) = \max|\lambda_i| \quad , \quad i = ۱,۲,...,n \qquad (۵-۸-۱)$$

تعریف :دو ماتریس $n\times n$، A,B متشابه نامیده می شوند اگر ماتریس معکوس پذیر C وجود داشته باشد به طوری که

$$B = C^{-۱}AC \qquad (۶-۸-۱)$$

قضیهٔ ۱-۸-۱ ماتریسهای متشابه دارای چند جمله ای مشخصه یکسانی هستند بنابراین دارای مقادیر ویژهٔ یکسان هستند

اثبات : اگر A,B متشابه باشند آنگاه ماتریس معکوس پذیر C موجود است به طوری که $B = C^{-۱}AC$ بنابراین

$$\lambda I - B = \lambda I - C^{-۱}AC = \lambda C^{-۱}IC - C^{-۱}AC = C^{-۱}(\lambda I - A)C$$

رابطهٔ فوق نشان می دهد که $\lambda I - B, \lambda I - A$ متشابه هستند . لذا دارای دترمینان یکسان هستند. [۵]

$$\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$$

تعریف : گوئیم مقدار ویژهٔ λ دارای تکرار جبری μ است هرگاه ریشهٔ μاُم معادله مشخصه باشد.

تعریف : ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را هسنبرگ بالایی گویند هرگاه به ازای هر i,j که $i > j+۱$ داشته باشیم . $a_{ij} = ۰$ وآن را هسنبرگ پایینی گویند هرگاه به ازای هر i,j که $j > i+۱$ داشته باشیم $a_{ij} = ۰$.

تعریف پایه : فرض کنید V فضای برداری روی میدان F باشد. اگر $G = \{a_i\}$ مستقل خطی باشند. آنگاه G را پایه ای برای $span\{G\}$ گویند . به عبارت دیگر پایه مجموعهٔ مستقل خطی از بردارهای vاست که فضای V را تولید کند.

تعریف بعد : تعداد بردارهای یک پایه را بُعد فضای برداری گویند.