دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض-هندسه و توپولوژی

تغییرات تفکیک‌پذیر انتخابی و تأثیر همگرایی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا احمدی‌زند

استاد مشاور: دکتر اکبر دهقان‌نژاد

پژوهش و نگارش:

فاطمه محمدی نصیری

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادر و همسرم

سپاس‌گزاری

به نام آن که دل را مرکز عواطف و قلب را مرکز ایمان و مغز را محل تراوش اندیشه‌ها قرار داد.

اینک که به یاری حضرت حق سبحانه و تعالی توانسته‌ام در منزلی دیگر از منازل تحصیل، خوشه‌چین میوه‌هایی جانبخش از درخت دانش و معرفت باشم بر خویش وظیفه می‌دانم به پاس تلاش و لطف همیشگی استادان گرانقدر، از آنان قدردانی کنم.

از جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی‌زند، استاد راهنمای بزرگوارم به پاس تمامی زحمات بی‌دریغ و راهنمایی‌های دلسوزانه‌اشان کمال تشکر و سپاس را دارم، همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر اکبر دهقان‌نژاد که استاد مشاور این‌جانب بودند، تشکر می‌کنم. خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدری فداکار، مادری دل‌سوز و همسری مهربان نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم . پدر و مادری که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که وجودشان پس از پروردگار مایه هستی من بوده، دستم را گرفته و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموخته‌اند. از همسر عزیزم که همواره حامی و پشتیبان من بوده بسیار ممنون و سپاسگزارم و از خداوند منان برای آن‌ها طول عمر، سلامتی و سعادت را خواستارم.

چکیده

تفکیک‌پذیر گزینشی و تغییراتش نسبت به تفکیک‌پذیری بسیار قوی‌تر هستند، اما با وجود ویژگی‌های همگرای معین معادل هستند. برای نمونه، نشان می‌دهیم که هر فضای شعاعی تفکیک‌پذیر و هاسدورف R-تفکیک‌پذیر است و یادآور می‌شویم که نه فضای دنباله‌ای تفکیک‌پذیر و نه فضای وایبرن تفکیک‌پذیر لزوماً تفکیک‌پذیر گزینشی نمی‌باشند.

روی تفکیک‌پذیر گزینشی و تغییراتش نشان می‌دهیم که:

(۱) تفکیک‌پذیر گزینشی، R-تفکیک‌پذیری و GN-تفکیک‌پذیری تحت اجتماع متناهی پایدار هستند؛

(۲) با فرض CH، فضای R-تفکیک‌پذیر، ماکسیمال، منظم و شمارای X وجود دارد طوری‌که $X^۲$ تفکیک‌پذیر گزینشی نیست.

هرچند دو ویژگی D-تفکیک‌پذیری و d-تفکیک‌پذیری تفاوت‌هایی دارند اما، در برخی موارد با یکدیگر معادل هستند؛ برای نمونه، اگر فضا، d-تفکیک‌پذیر و مرتب خطی یا فضا، طبقه‌بندی‌شده باشد. هم‌چنین، نشان می‌دهیم که برای هر X، یک فضای Y وجود دارد به‌طوری‌که $X \times Y$، D-تفکیک‌پذیر باشد. درنهایت، در مورد تفکیک‌پذیر گزینشی و D-تفکیک‌پذیری با وجود فضای ماکسیمال بحث می‌کنیم.

فهرست مطالب

۱.۰ تاریخچه و مقدمه

بخش معروف به فرض‌های گزینشی در ریاضیات مربوط به انتخاب تغییرات مفاهیم توپولوژیک کلاسیک نظیر فشردگی یا تفکیک‌پذیری است که توسط تسابان[۱] در [۲۸] و اسکیپرز[۲] در [۲۵] مورد بررسی قرار گرفت. در این پایان‌نامه ما بیشتر با مفهوم تفکیک‌پذیر گزینشی و تغییراتش سر و کار داریم. این مفهوم اخیراً به‌طور گسترده مورد توجه بوده است که از این میان می‌شود به مقاله‌های [۲۴ ,۲۳ ,۲۱ ,۱۸ ,۷ ,۶ ,۴ ,۲] اشاره کرد. این مفهوم برای اولین بار توسط اسکیپرز [۲۴] در سال ۱۹۹۹ معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت و سپس در سال‌های بعد توسط دی‌مایو و مکاریلو[۳][۲۱] ، گرونهگ و ساکای[۴][۱۸]، بابین کاستو[۵][۲] و بیلا و بنانزینگ [۶][۸ ,۷ ,۶]، ریپاوس و دامسکی[۷][۲۳] و بارمن[۸][۴] مورد بررسی قرار گرفت.

اگر برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X، بتوان مجموعه‌های متناهی $F_n \subset D_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که $\bigcup\{F_n : n \in \omega\}$ در X چگال باشد، آن‌گاه فضای X تفکیک‌پذیر گزینشی نامیده می‌شود. اگر برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X، بتوان نقاط $p_n \in D_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که $\{p_n : n \in \omega\}$ در X چگال باشد، آن‌گاه فضای X، R-تفکیک‌پذیر نامیده می‌شود. اگر برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X، بتوان مجموعه‌های متناهی $F_n \subset D_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که هر مجموعه باز ناتهی در X همه F_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند، آن‌گاه فضای X، H-تفکیک‌پذیر نامیده می‌شود. اگر فضای X درخودچگال باشد و برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X، بتوان نقاط $p_n \in D_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که $\{p_n : n \in \omega\}$ گروه‌پذیر باشد؛ یعنی، بتوان مجموعه‌های متناهی و دوبه‌دو مجزای ناتهی A_m برای $m < \omega$ یافت به‌طوری‌که

---

[۱] Tsaban

[۲] Scheepers

[۳] Di Maio,Meccariello

[۴] Gruenhage, Sakai

[۵] Babinkostova

[۶] Bella, Bonanzinga

[۷] Repovs, Zdomskkyy

[۸] Barman

$\{p_n : n \in \omega\} = \bigcup\{A_m : m \in \omega\}$ و هر مجموعه باز ناتهی در X همه A_mها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند، آن‌گاه فضای X، GN-تفکیک‌پذیر نامیده می‌شود.

بارمن و داو کشف کردند که هر فضای فرشه تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر گزینشی است.

گرونهگ و ساکای متذکر شدند که فضاهای فرشه تفکیک‌پذیر حتی R-تفکیک‌پذیر هستند و اگر هیچ نقطه منفردی وجود نداشت، GN-تفکیک‌پذیر است.

فصل اول به مقدماتی از نظریه‌ی مجموعه‌ها، مفاهیم پرکاربرد توپولوژی و خواص توپولوژیکی اختصاص یافته است. در این فصل برخی از اصطلاحات و نتایجی که در فصل‌های بعد به‌کار خواهند رفت، آمده است، نظیر: عدد اصلی منظم، پایه‌ها، سفتی شمارا و فضاهای فرشه و دنباله‌ای و غیره.

در فصل دوم در مورد تفکیک‌پذیر گزینشی و تغییراتش مانند: R-تفکیک‌پذیری، H-تفکیک‌پذیری و GN-تفکیک‌پذیری بحث می‌کنیم. در این فصل نشان می‌دهیم که M-تفکیک‌پذیری، R-تفکیک‌پذیری و GN-تفکیک‌پذیری تحت اجتماع متناهی پایدار هستند، اما این مطلب در مورد H-تفکیک‌پذیری به‌صورت یک پرسش باز باقی‌مانده است.

در فصل سوم نخست ثابت می‌کنیم که هر فضای فرشه تفکیک‌پذیر، R-تفکیک‌پذیر است و سپس در مورد امکان توسعه این نتیجه به فضاهایی که در شرط نوع همگرایی ضعیف‌تری نسبت به فرشه صدق می‌کنند، بحث می‌کنیم. نشان می‌دهیم که هر فضای شعاعی و تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر گزینشی است در حالی که فضاهای دنباله‌ای تفکیک‌پذیر یا فضاهای وایبرن تفکیک‌پذیر لزوماً تفکیک‌پذیر گزینشی نمی‌باشند. هم‌چنین، حالت خاص فضاهای به‌طور شمارا فشرده را در نظر می‌گیریم.

در فصل چهارم فرم ضعیف‌تر تفکیک‌پذیر گزینشی را در نظر می‌گیریم که این ویژگی را D-تفکیک‌پذیری می‌نامیم. در این فصل ثابت می‌کنیم که D-تفکیک‌پذیری تحت اجتماع متناهی پایدار است و هم‌چنین، نشان می‌دهیم که در برخی موارد D-تفکیک‌پذیری و d-تفکیک‌پذیری معادل هستند. در این فصل در مورد تفکیک‌پذیر گزینشی و D-تفکیک‌پذیری روی فضاهای ماکسیمال بحث می‌کنیم. برای نمونه، نشان می‌دهیم که با فرض $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$، فضای تفکیک‌پذیر گزینشی ماکسیمال و شمارا وجود دارد.

در فصل پنجم تفکیک‌پذیر گزینشی روی G_δ-مجموعه‌ها و F_σ-مجموعه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ویژگی‌هایی به‌دست می‌آیند که به مراتب نسبت به تفکیک‌پذیر گزینشی قوی‌تر هستند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل برخی از اصطلاحات و نتایجی که در فصل‌های بعد به‌کار خواهند رفت، آمده است. اکثر مطالب از کتاب [۱۴] برگرفته شده است؛ برخی از تعاریف مانند تعاریف بخش ۵.۱ از مقاله [۷] و مطالب ارائه شده در بخش ۱۰.۱ از کتاب [۵] استفاده شده است.

۱.۱ عدد اصلی منظم

فرض کنیم X یک مجموعه باشد عدد اصلی X را به وسیله $|X|$ نشان می‌دهیم.

عدد ترتیبی λ یک عدد ترتیبی حدی است هرگاه، λ دارای سابق بلافصل نباشد؛ یعنی، برای هر $\xi < \lambda$ یک عدد ترتیبی α وجود داشته باشد طوری‌که $\xi < \alpha < \lambda$.

فرض کنیم λ یک عدد ترتیبی حدی است. اگر مجموعه همه اعداد ترتیبی کوچک‌تر از λ، شامل زیرمجموعه A از نوع ترتیب α باشد طوری‌که برای هر $\xi < \lambda$ یک $\xi' \in A$ وجود داشته باشد که در نامساوی $\xi < \xi' < \lambda$ صدق کند، آن‌گاه عدد ترتیبی α با λ هم‌پایان نامیده می‌شود.

عدد ترتیبی نامتناهی λ یک عدد ترتیبی آغازی است هرگاه، λ در میان همه اعداد ترتیبی α که در رابطه $|\alpha| = |\lambda|$ صدق می‌کنند کوچک‌ترین باشد.

عدد ترتیبی آغازی λ منظم است هرگاه، هیچ $\alpha < \lambda$ وجود نداشته باشد که با λ هم‌پایان باشد.

عدد اصلی m منظم است هرگاه، عدد ترتیبی آغازی λ که در رابطه $m = |\lambda|$ صدق می‌کند، منظم باشد.

مجموعه همه اعداد صحیح نامنفی را با ω نشان می‌دهیم. ω یک عدد ترتیبی حدی است و به‌علاوه یک عدد اصلی است. [۱]

۲.۱ مجموعه مشتق و مجموعه چگال

نقطه x در فضای توپولوژیک X یک نقطه انباشتگی مجموعه $A \subset X$ نامیده می‌شود هرگاه، $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$؛ مجموعه همه نقاط انباشتگی A مجموعه مشتق A نامیده می‌شود و به وسیله D نشان داده می‌شود. نقاط $A \setminus D$ نقاط منفرد مجموعه A نامیده می‌شود و هرگاه نقطه‌ای منفرد نباشد آن را نقطه نامنفرد A می‌نامیم. نقطه x یک نقطه منفرد فضای X است اگر و تنها اگر مجموعه تک‌نقطه‌ای

[۱] در مورد اعداد ترتیبی می‌توانید به کتاب نظریه طبیعی مجموعه‌ها اثر پ. ر. هالموس مراجعه کنید.

$\{x\}$ باز باشد.

زیرمجموعه A از X چگال در X نامیده می‌شود هرگاه، $\overline{A} = X$.

زیرمجموعه A از X هم‌چگال در X نامیده می‌شود هرگاه، $X \setminus A$ چگال باشد.

زیرمجموعه A از X هیچ‌جا چگال در X نامیده می‌شود هرگاه، $\overline{A}$ هم‌چگال باشد.

زیرمجموعه A از X درخودچگال نامیده می‌شود هرگاه، $A \subset D$؛ یعنی هیچ نقطه منفردی نداشته باشد.

گزاره ۱.۲.۱. مجموعه A در X چگال است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه باز ناتهی X شامل نقاط A باشد.

مجموعه A در X هیچ‌جا چگال است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه باز ناتهی X شامل مجموعه باز ناتهی مجزا از A باشد. [۱۴]

گزاره ۲.۲.۱. برای هر $A \subset X$، نقطه x متعلق به $\overline{A}$ است اگر و تنها اگر برای هر همسایگی U از x داشته باشیم $U \cap A \neq \emptyset$. [۱۴]

قضیه ۳.۲.۱. اگر A در X چگال باشد، آن‌گاه برای هر مجموعه باز $U \subset X$ داریم $\overline{U \cap A} = \overline{U}$. [۱۴]

فضای X را تفکیک‌پذیر گوئیم در صورتی که X زیرمجموعه‌ای شمارا و چگال داشته باشد.

چگالی فضای X را به‌صورت کوچک‌ترین عدد اصلی زیرمجموعه‌های چگال X تعریف می‌کنیم و آن را با $d(X)$ نشان می‌دهیم. سوپریمم مجموعه $\{d(D)$: در X چگال است $D\}$ را با $\delta(X)$ نمایش می‌دهیم.

اجتماع شمارا از مجموعه‌های بسته، F_σ-مجموعه و اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز، G_δ-مجموعه نامیده می‌شود.

اجتماع دو G_δ-مجموعه مجدداً یک G_δ-مجموعه است و اشتراک شمارا از G_δ-مجموعه‌ها مجدداً یک G_δ-مجموعه است. هم‌چنین، اشتراک دو F_σ-مجموعه مجدداً یک F_σ-مجموعه است و اجتماع شمارا از F_σ-مجموعه‌ها مجدداً یک F_σ-مجموعه است.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنیم M یک زیرفضای X است. زیرمجموعه A از M یک F_σ-مجموعه (G_δ-مجموعه) در M است اگر و تنها اگر $A = M \cap B$، که B یک F_σ-مجموعه(G_δ-مجموعه) در X است. [۱۴]

خاصیت توپولوژیک P را باز موروثی می‌نامیم هرگاه، برای هر فضای X که دارای خاصیت P است، هر زیرفضای باز X نیز دارای خاصیت P باشد.

گردایه دوبه‌دو مجزا از مجموعه‌های باز ناتهی در X، خانواده سلولی نامیده می‌شود.

دو مجموعه به‌طور شمارا نامتناهی تقریباً مجزا نامیده می‌شود هرگاه، اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

۳.۱ پایه‌ها

خانواده $\mathcal{B}$ را یک پایه برای فضای توپولوژیک X می‌نامیم هرگاه، هر زیرمجموعه باز ناتهی در X را بتوان به صورت اجتماع یک زیرخانواده از $\mathcal{B}$ بیان کرد. به‌علاوه، خانواده $\mathcal{B}$ یک پایه برای فضای توپولوژیک X است اگر و تنها اگر برای هر نقطه $x \in X$ و هر همسایگی V از x یک $U \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد طوری‌که $x \in U \subset V$.

کوچک‌ترین عضو مجموعه $\{|\mathcal{B}|$: $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای X است$\}$، را وزن فضای X می‌نامیم و با نماد $w(X)$ نمایش می‌دهیم.

خانواده $\mathcal{B}(x)$ از همسایگی‌های x را یک پایه برای فضای X در نقطه‌ی x می‌نامیم هرگاه، برای هر همسایگی V از x یک $U \in \mathcal{B}(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \in U \subset V$. اگر برای هر $x \in X$ پایه $\mathcal{B}(x)$ برای X در نقطه x داده شده باشد، آن‌گاه اجتماع $\mathcal{B} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$ یک پایه برای فضای X است.

مشخصه نقطه $x \in X$ در فضای توپولوژیک X را به‌صورت کوچک‌ترین عضو مجموعه

$$\{|\mathcal{B}(x)| : \text{است } x \text{ یک پایه درنقطه } \mathcal{B}(x)\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\chi(x, X)$ نمایش می‌دهیم.

مشخصه مجموعه $A \subset X$ در فضای توپولوژیک X را به‌صورت کوچک‌ترین عضو مجموعه

$$\{|\mathcal{B}(A)| : \text{است } A \text{ در مجموعه } X \text{ یک پایه برای } \mathcal{B}(A)\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\chi(A, X)$ نمایش می‌دهیم.

خانواده $\mathcal{P}$ از مجموعه‌های باز در X را یک π-پایه برای X می‌نامیم هرگاه، هر مجموعه باز ناتهی در X

شامل عضوی ناتهی از $\mathcal{P}$ باشد. واضح است که هر پایه یک π-پایه است. کوچک‌ترین عدد اصلی π-پایه‌های X را π-وزن X می‌نامیم و با نماد $\pi w(X)$ نشان می‌دهیم.

خانواده $\mathcal{P}(x)$ از همسایگی‌های x یک π-پایه در نقطه x نامیده می‌شود هرگاه، هر همسایگی از x شامل عضوی ناتهی از $\mathcal{P}(x)$ باشد.

π-مشخصه نقطه $x \in X$ در فضای X به‌صورت کوچک‌ترین عضو مجموعه

$$\{|\mathcal{P}(x)| : \text{است } x \text{ یک } \pi\text{-پایه در نقطه } \mathcal{P}(x)\}$$

تعریف می‌شود و با نماد $\pi_\chi(x, X)$ نمایش داده می‌شود. سوپریمم همه اعداد $\pi_\chi(x, X)$ برای $x \in X$، π-مشخصه X نامیده می‌شود و با نماد $\pi_\chi(X)$ نمایش داده می‌شود.

برای هر فضای X تساوی $\pi w(X) = d(X) \cdot \pi_\chi(X)$ برقرار است. هم‌چنین، اگر Y زیرمجموعه چگال X باشد، آن‌گاه $\pi w(Y) \leq \pi w(X)$.[۱۶]

فضای X شمارای نوع اول نامیده می‌شود هرگاه، در هر نقطه $x \in X$ پایه‌ای شمارا وجود داشته باشد؛ یعنی، $\chi(x, X) \leq \omega$.

فضای X شمارای نوع دوم نامیده می‌شود هرگاه، X پایه‌ای شمارا داشته باشد؛ یعنی، $w(X) \leq \omega$.

فرض کنیم X یک فضا است و فرض کنیم برای هر $x \in X$ پایه $\mathcal{B}(x)$ برای X در نقطه x داده شده باشد. گردایه $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ دستگاه همسایگی برای فضای X نامیده می‌شود هرگاه، ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. برای هر $x \in X$، $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ و هر U در $\mathcal{B}(x)$ شامل x است.

۲. اگر $x \in U \in \mathcal{B}(y)$ آن‌گاه $V \in \mathcal{B}(x)$ای وجود دارد طوری‌که $V \subset U$.

۳. برای هر $U_۱, U_۲ \in \mathcal{B}(x)$، $U \in \mathcal{B}(x)$ای وجود دارد طوری‌که $U \subset U_۱ \cap U_۲$.

۴. برای هر جفت نقاط $x, y \in X$، که $x \neq y$، مجموعه‌های باز $U \in \mathcal{B}(x)$ و $V \in \mathcal{B}(y)$ وجود دارند طوری‌که $U \cap V = \emptyset$.

فرض کنیم $\{X_s\}_{s \in S}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک است و فرض کنیم X حاصل‌ضرب دکارتی $\prod_{s \in S} X_s$ است. خانواده همه مجموعه‌های $\prod_{s \in S} W_s$ که W_s یک زیرمجموعه باز X_s است و

$W_s \neq X_s$ تنها برای تعداد متناهی $s \in S$، یک پایه برای X است. این پایه، پایه کانونی[۲] X نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\{X_s\}_{s\in S}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک دوبه‌دو مجزاست. مجموعه $X = \bigcup_{s\in S} X_s$ و خانواده $\mathcal{O}$ از مجموعه‌های باز $U \subset X$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که برای هر $s \in S$، $U \cap X_s$ در X_s باز باشد. خانواده $\mathcal{O}$ با این ویژگی یک توپولوژی روی فضای X است. فضای X با این توپولوژی، مجموع فضاهای $\{X_s\}_{s\in S}$ نامیده می‌شود و با $\bigoplus_{s\in S} X_s$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنیم $\mathcal{N}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های فضای X است. اگر برای هر نقطه $x \in X$ و هر همسایگی U از x یک $M \in \mathcal{N}$ وجود داشته باشد طوری‌که $x \in M \subset U$، آن‌گاه خانواده $\mathcal{N}$ شبکه‌ای برای فضای X است. واضح است که، هر پایه برای فضای X یک شبکه برای X است. خانواده همه زیرمجموعه‌های تک‌نقطه‌ای یک شبکه برای آن فضاست.

۴.۱ اصول جداسازی

فضای X، T_1-فضا نامیده می‌شود هرگاه، برای هر جفت نقاط متمایز $x_1, x_2 \in X$ مجموعه باز $U \subset X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_1 \in U$ و $x_2 \notin U$.

فضای X یک T_2-فضا یا فضای هاسدورف نامیده می‌شود هرگاه، برای هر جفت نقاط متمایز $x_1, x_2 \in X$ مجموعه‌های باز U_1 و U_2 وجود داشته باشند به‌طوری‌که $x_1 \in U_1$، $x_2 \in U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

فضای X را T_3-فضا یا فضای منظم می‌نامیم هرگاه، X، T_1-فضا باشد و برای هر $x \in X$ و برای هر مجموعه بسته $F \subset X$ طوری‌که $x \notin F$، مجموعه‌های باز U_1 و U_2 وجود داشته باشند به‌طوری‌که $x \in U_1$ و $F \subset U_2$ و $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

فضای X در همه نقاط زیرفضای Y منظم است اگر و تنها اگر برای هر $y \in Y$ و هر همسایگی U از y، یک همسایگی V از y وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\overline{V} \subset U$.

فضای X را $T_{3\frac{1}{2}}$ یا فضای تیخونوف می‌نامیم هرگاه، X، T_1-فضا باشد و برای هر $x \in X$ و هر مجموعه بسته $F \subset X$ طوری‌که $x \notin F$، تابع پیوسته $f : X \longrightarrow I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x) = 0$

[۲] Canonical base

و $f(y)=1$ برای هر $y\in F$.

اگر فضای X، T_1-فضا و ناتهی باشد و پایه‌ای متشکل از مجموعه‌های باز و بسته داشته باشد، آن‌گاه X فضای صفر-بعدی نامیده می‌شود. واضح است که، هر فضای صفر-بعدی فضایی تیخونوف است.

در سرتاسر متن فضای X را $T_{3\frac{1}{2}}$ در نظر می‌گیریم. البته ممکن است در جایی اصل جداسازی ضعیف‌تری مورد نیاز باشد.

۵.۱ سفتی شمارا و فرشه ضعیف

کوچک‌ترین عدد اصلی $\kappa\geq\omega$ با این ویژگی که اگر $Y\subseteq X$ و $x\in\overline{Y}$، آن‌گاه یک $A\subseteq Y$ با عدد اصلی $|A|\leq\kappa$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x\in\overline{A}$، سفتی نقطه x در فضای X نامیده می‌شود و با نماد $t(x,X)$ نمایش داده می‌شود. سوپریمم همه اعداد $t(x,X)$ برای $x\in X$، سفتی فضای X نامیده می‌شود و با نماد $t(X)$ نمایش داده می‌شود.

فرض کنیم f تابعی است که به هر فضای X عدد اصلی $f(X)$ را اختصاص می‌دهد. سوپریمم همه اعداد $f(Y)$، که $Y\subset X$، را با $hf(X)$ نمایش می‌دهیم. برای هر فضای فشرده X تساوی $h\pi_\chi(X)=t(X)$ برقرار است. [۱۶]

قضیه ۱.۵.۱. برای هر فضای فشرده X تساوی $h\pi w(X)=hd(X)$ برقرار است.

برهان. برای هر فضای X تساوی $\pi w(Y)=\pi_\chi(Y)\cdot d(Y)$ را داریم. بنابراین

$$h\pi w(X)=h\pi_\chi(X)\cdot hd(X)=t(X)\cdot hd(X)=hd(X).$$

پس حکم نتیجه می‌شود. $\square$

فضای X دارای سفتی شماراست هرگاه، برای $A\subset X$ و $x\in\overline{A}$، مجموعه شمارای $B\subset A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x\in\overline{B}$.

فضای X دارای سفتی چتری شماراست هرگاه، برای هر دنباله $(A_n : n\in\omega)$ از زیرمجموعه‌های X که $x\in\bigcap\{\overline{A}_n : n\in\omega\}$، بتوان مجموعه‌های متناهی $F_n\subset A_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که $x\in\overline{\bigcup\{F_n : n\in\omega\}}$. طبیعی است که بگوئیم X دارای سفتی چتری شمارا برحسب زیرفضاهای

چگال است هرگاه، این مطلب برای A_nهای چگال در X درست باشد؛ یعنی، برای هر $x \in X$ و هر دنباله $(A_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X زیرمجموعه متناهی F_n از A_n برای هر $n \in \omega$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \in \overline{\bigcup \{F_n : n \in \omega\}}$.

فضای X دارای سفتی چتری قوی شماراست هرگاه، برای هر دنباله $(A_n : n \in \omega)$ از زیرمجموعه‌های X که $x \in \bigcap\{\overline{A}_n : n \in \omega\}$، بتوان نقاط $x_n \in A_n$ را انتخاب کرد به‌طوری‌که $x \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$. طبیعی است که بگوئیم X دارای سفتی چتری قوی شمارا برحسب زیرفضاهای چگال است اگر برای هر $x \in X$ و هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X بتوان نقاط $x_n \in D_n$ را گزینش کرد به‌طوری‌که $x \in \overline{\{x_n : n \in \omega\}}$.

فضای X دارای ویژگی رزنیچنکو[۳]است هرگاه، برای $A \subset X$ و $x \in \overline{A} \setminus A$، زیرمجموعه‌های متناهی و دوبه‌دو مجزای F_n از A وجود داشته باشند به‌طوری‌که هر همسایگی x همه F_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند. ساکای ویژگی رزنیخنکو را فرشه ضعیف نامید. طبیعی است که بگوئیم فضای X فرشه ضعیف برحسب زیرفضاهای چگال است هرگاه، برای هر مجموعه چگال D در X و هر $x \in X \setminus D$، مجموعه‌های متناهی، ناتهی و دوبه‌دو مجزای $F_n \subset D$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که هر همسایگی x همه F_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند.

فضای X را فرشه ضعیف درجهت اکید می‌نامیم هرگاه، برای هر دنباله $(A_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای X که $x \in \bigcap\{\overline{A}_n : n \in \omega\}$، مجموعه‌های متناهی $F_n \subset A_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که هر همسایگی x همه F_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند. طبیعی است که بگوئیم X فرشه ضعیف درجهت اکید برحسب زیرفضاهای چگال است هرگاه، برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از زیرفضاهای چگال X و برای هر $x \in X$، مجموعه‌های متناهی $F_n \subset D_n$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که هر همسایگی x همه F_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند.

اگر فضای X شامل دو زیرفضای چگال مجزا باشد، آن‌گاه فضای X حل‌پذیر نامیده می‌شود.

اگر X شامل خانواده شمارای نامتناهی از زیرفضاهای چگال دوبه‌دو مجزا باشد، آن‌گاه فضای X، ω-

---
[۳] Reznichenko

حل‌پذیر[۴] نامیده می‌شود.

قضیه ۲.۵.۱. هر فضای درخود چگال با سفتی چتری شمارا، ω-حل‌پذیر است. [۹]

۶.۱ همگرایی در فضای توپولوژیک: تورها، فضاهای شعاعی، دنباله‌ای و فرشه

فرض کنیم X یک مجموعه و $\leq$ رابطه‌ای روی X باشد. می‌گوئیم X توسط $\leq$ جهت‌دار شده است، اگر $\leq$ ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

۱. برای هر $x \in X$، $x \leq x$.

۲. اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $x \leq z$.

۳. برای هر $x, y \in X$ وجود داشته باشد $z \in X$ طوری‌که $x \leq z$ و $y \leq z$.

یک تور در فضای توپولوژیک X تابعی دل‌خواه از مجموعه جهت‌دار ناتهی $\sum$ به فضای X است؛ این تور توسط نماد $S = \{x_\sigma : \sigma \in \sum\}$ نشان داده خواهد شد، که x_σ نقطه X است که به هر عضو σ از مجموعه جهت‌دار $\sum$ اختصاص داده شده است. جهت رابطه $\sum$ به‌وسیله $\leq$ نشان داده خواهد شد و برای $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum$ اغلب $\sigma_2 \geq \sigma_1$ را به جای $\sigma_1 \leq \sigma_2$ می‌نویسیم.

نقطه x را حد تور $S = \{x_\sigma : \sigma \in \sum\}$ می‌نامیم هرگاه برای هر همسایگی U از x یک $\sigma_0 \in \sum$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_\sigma \in U$ برای هر $\sigma \geq \sigma_0$؛ در این صورت می‌گوئیم تور S همگرا به x است.

گزاره ۱.۶.۱. نقطه x متعلق به بستار $\overline{A}$ است اگر و تنها اگر توری متشکل از عضوهای A همگرا به x وجود داشته باشد. [۱۴]

گزاره ۲.۶.۱. نقطه x نقطه نامنفرد A است اگر و تنها اگر تور $S = \{x_\sigma : \sigma \in \sum\}$ همگرا به x وجود داشته باشد طوری‌که $x_\sigma \in A$ و $x_\sigma \neq x$ برای هر $\sigma \in \sum$.[۱۴]

[۴] ω-resolvable

رابطه $\prec$ در مجموعه X زمانی یک رابطه ترتیبی خطی یا ترتیب خطی نامیده می‌شود که واجد شرایط زیر باشد:

۱. هیچ عضو x از X در رابطه $x \prec x$ صدق نمی‌کند.

۲. اگر $x \prec y$ و $y \prec z$ آن‌گاه $x \prec z$.

۳. به ازای هر $x, y \in X$ به‌طوری‌که $x \neq y$، آن‌گاه یا $x \prec y$ یا $y \prec x$.

مجموعه X همراه با ترتیب خطی تعریف شده روی آن، مجموعه مرتب خطی نامیده می‌شود.

مجموعه X با رابطه ترتیبی $\prec$، خوش‌ترتیب نامیده می‌شود در صورتی که هر زیرمجموعه ناتهی X دارای کوچک‌ترین عضو باشد.

توری که مجموعه جهت‌دار آن خوش‌ترتیب باشد، تور خوش‌ترتیب نامیده می‌شود.

فضای X شعاعی[۵] است هرگاه، برای هر $A \subset X$ و هر $p \in \overline{A}$، تور خوش‌ترتیب $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\} \subset A$ همگرا به p وجود داشته باشد.

فضای X فرشه است هرگاه، برای هر مجموعه نابسته $A \subset X$ و هر $p \in \overline{A} \setminus A$، دنباله‌ای از A همگرا به p وجود داشته باشد.

فضای X دنباله‌ای[۶] است هرگاه، برای مجموعه نابسته $A \subset X$، یک $p \in \overline{A} \setminus A$ و یک دنباله از A همگرا به p وجود داشته باشد.

قضیه ۳.۶.۱. هر فضای شمارای اول یک فضای فرشه است و هر فضای فرشه یک فضای دنباله‌ای است.

برهان. اگر فضای X پایه شمارای $\{U_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در نقطه x داشته باشد و $x \in \overline{A}$، آن‌گاه با گرفتن

$$x_i \in A \cap U_۱ \cap U_۲ \cap \ldots \cap U_i$$

برای $i = ۱, ۲, \ldots$، دنباله $\{x_i\}$ از نقاط A همگرا به x تعریف می‌کنیم. بنابراین هر فضای شمارای اول یک فضای فرشه است. قسمت دوم قضیه واضح است. $\square$

[۵] Radial

[۶] Sequential

فضای X را تماماً نرمال می‌نامیم اگر X یک فضای نرمال باشد و هر زیرمجموعه بسته X، G_δ-مجموعه باشد.

مثال ۴.۶.۱. یک فضای دنباله‌ای تعریف می‌کنیم که فرشه نیست. فرض کنیم $X = \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ که

$$X_i = \{\tfrac{1}{i}\} \cup \{\tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{i^2}, \tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{(i^2+1)}, \ldots\};$$

به آسانی مشاهده می‌شود که $X_i \cap X_k = \emptyset$ برای $i \neq k$. توپولوژی روی X را توسط یک دستگاه همسایگی به‌صورت زیر مشخص می‌کنیم. همه نقاط به فرم $\frac{1}{j} + \frac{1}{i}$ نقاط منفرد X خواهند بود، یعنی $\mathcal{B}(x) = \{\{x\}\}$ برای هر x از این فرم. برای xای به فرم $\frac{1}{i}$، $\mathcal{B}(x)$ را خانواده همه مجموعه‌های

$$\{\tfrac{1}{i}\} \cup \{\tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{i} + \tfrac{1}{(k+1)}, \ldots\}$$

برای $k = i^2, i^2 + 1, \ldots$ در نظر می‌گیریم، درنهایت، عضوهای $\mathcal{B}(0)$ را همه مجموعه‌های به‌دست آمده از X به‌وسیله حذف تعداد متناهی X_i و تعداد متناهی نقاط به فرم $\frac{1}{j} + \frac{1}{i}$ در همه X_iهای باقی‌مانده می‌گیریم. واضح است که گردایه $\{\mathcal{B}(x)\}_{x\in X}$ ویژگی‌های دستگاه همسایگی را دارد. بنابراین X یک فضای هاسدورف است. چون همه عضوهای پایه $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}(x)$ باز و بسته در X هستند فضای X منظم است و طبق قضیه(هر فضای منظم و شمارا، نرمال است.) X کاملاً نرمال است.
ملاحظه می‌کنیم که نقطه 0 متعلق به بستار مجموعه $X \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots\}$ است اما هیچ دنباله‌ای در آن مجموعه وجود ندارد که همگرا به 0 باشد، بنابراین X فرشه نیست. یادآوری می‌کنیم که X یک فضای شماراست که شمارای اول نیست.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که X یک فضای دنباله‌ای است. فرض کنیم $x \in \overline{A}$. اگر $x \neq 0$، آن‌گاه $\mathcal{B}(x)$ پایه شمارا در x است و A شامل دنباله همگرا به x است. اکنون، حالتی را که $x = 0$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x \in \overline{A} \setminus A$. زیردنباله $x_1, x_2, \ldots$ از دنباله $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ وجود دارد طوری‌که هر همسایگی از هر x_i، مجموعه A را قطع کند؛ زیرا برهان خلف یک همسایگی از 0 مجزا از A به‌دست خواهد آورد. در این صورت A شامل همه حدهای دنباله $x_1, x_2, \ldots$ می‌شود و در صورتی که دنباله همگرا به 0 باشد داریم $0 \in A$ که با فرض در تناقض است.

فرض کنیم $M \subset X$.

$$seqcl(M) = \{x \in X : \text{دنباله‌ای از } M \text{ همگرا به } x \text{ وجود داشته باشد}\}$$

و $seqcl_\alpha(M)$ به ازای عدد ترتیبی α به‌طور استقراء توسط تساوی

$$seqcl_\alpha(M) = seqcl\left(\bigcup_{\beta<\alpha} seqcl_\beta(M)\right)$$

تعریف می‌شود. اگر فضای X دنباله‌ای باشد، آن‌گاه عدد ترتیبی α^*، ترتیب دنباله‌ای X نامیده می‌شود به شرطی که برای هر $M \subset X$، $seqcl_{\alpha^*}(M) = \overline{M}$. ترتیب دنباله‌ای هر فضای دنباله‌ای نابیش‌تر از ω_1 است.

۷.۱ فرض‌های گزینشی

فرض کنیم X یک فضا و D زیرفضای شمارا و چگال X است. اگر D بتواند به‌صورت $\bigcup\{A_n : n \in \omega\}$، که هر A_n ناتهی و متناهی است، افراز شود به‌طوری‌که هر مجموعه باز ناتهی در X همه A_nها مگر تعداد متناهی از آن‌ها را قطع کند، آن‌گاه زیرفضای D گروه‌پذیر نامیده می‌شود.

فرض کنیم $\mathcal{D}$ خانواده همه زیرفضاهای چگال فضای توپولوژیک X باشد و فرض کنیم $\mathcal{D}^{gp}$ خانواده عضوهای گروه‌پذیر $\mathcal{D}$ را نشان دهد. در این قسمت نماد گذاری‌های زیر را داریم که فرض‌های گزینشی نامیده می‌شوند:

$S_{fin}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$: برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از عضوهای $\mathcal{D}$ بتوانیم مجموعه‌های متناهی $F_n \subset D_n$ را طوری انتخاب کنیم که $\bigcup\{F_n : n \in \omega\} \in \mathcal{D}$.

$S_1(\mathcal{D}, \mathcal{D})$: برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از عضوهای $\mathcal{D}$ بتوانیم نقاط $p_n \in D_n$ را طوری انتخاب کنیم که $\{p_n : n \in \omega\} \in \mathcal{D}$.

$S_1(\mathcal{D}, \mathcal{D}^{gp})$: برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از عضوهای $\mathcal{D}$ نقاط $d_n \in D_n$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{d_n : n \in \omega\} \in \mathcal{D}^{gp}$.

فرض کنیم $\mathcal{D}_G$ خانواده همه زیرفضاهای چگال و G_δ در X را نشان دهد.

$S_{fin}(\mathcal{D}_G, \mathcal{D}_G)$: برای هر دنباله $(D_n : n \in \omega)$ از عضوهای $\mathcal{D}_G$ بتوانیم مجموعه‌های متناهی $F_n \subset D_n$ را طوری انتخاب کنیم که $\bigcup\{F_n : n \in \omega\} \in \mathcal{D}_G$.