بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و
نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه
متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

مطالعه معادلات تحولی با مشتقات کسری ریمان لیویل تعمیم یافته

استاد راهنما:

دکتر سیده مرضیه قویدل

نگارش:

زهرا کاوند

آذر ماه ۱۳۹۳

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

نام دانشجو:
زهرا کاوند

تحت عنوان :

مطالعه معادلات تحولی با مشتقات کسری ریمان‌ـ‌لیوویل تعمیم یافته

در تاریخ ۹۳/۹/۲۵ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...... به تصویب نهایی رسید.

استاد راهنمای پایان نامه دکتر سیده مرضیه قویدل با مرتبه علمی استادیار امضاء:

استاد داور داخل گروه دکتر نعمت اله نیامرادی با مرتبه علمی دانشیار امضاء:

استاد داور خارج گروه دکتر شاپور حیدرخانی با مرتبه علمی استادیار امضاء:

خدایا...

اگر اطاعت امر تو نبود هرگز با کوره خاطر خویش بر ساحل دریای یاد تو گذر نمی کردم چرا که می دانم ظرف وجود من شایسته من است، نه بایسته تو و کاسه دل من به اندازه ظرفیت خویش از بحر تو آب ذکر بر می دارد، و نه به وسعت بی کرانگی تو و کجا پای ناتوان مرا قدرت نیل به شناختگاه مقام مقدس توست؟

خدایا!

تو منزه تر از آنی که بر زبان ما به تنزیه بگذری و تسبیح تو برتر از آنست که تا اوج دلهای ما تنزل کند و تقدیس تو فراتر از آن که خود را به بالهای قلب ما بیالاید.

اما خدای من!

ما را به خویش خوان در هویدا و نهان واز روشنای ذکرت بر ما بتابان، در صبح و شامگاهان. و از زلال خاطره ات ما را بنوشان، در آشکار وپنهان. و نسیم یادت را بر دلهای ما بوزان، در بهار وخزان.

خدای من!

میان ما و خویش الفتی نهانی ساز و پیوندی خفیه، و ما را توفیق تلاشی بی شائبه و صادقانه عنایت کن و کوششی که ما را تا بوستان رضایتت برساند و از میوه پاداش تو، به ما بچشاند.

سپاس گزاری...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.

ابتدا از استاد گرانقدرم سرکار خانم دکتر قویدل که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.

سپاس از مهربانترین همراهان زندگیم، از پدر، مادر و همسر عزیزم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

زهرا کاوند

آذر ماه ۱۳۹۳

تقدیم به

پدرم به استواری کوه، مادرم به زلالی چشمه، همسرم به صمیمیت باران و فرزندانم به طراوت شبنم.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا حلال کسری از مرتبه α را معرفی می‌کنیم، سپس مفهوم جدیدی به نام نیم گروه کسری ریمان ـ لیویل از مرتبه α را تعریف کرده و نشان می‌دهیم این دو باهم معادلند. در بخش دیگر این پایان نامه حلال های کسری تعمیم یافته از مرتبه α و نوع β و مولد آن را معرفی می‌کنیم و در ادامه ارتباط بین این حلال ها و مولد آن را بررسی می‌کنیم. همچنین به بحث وجود جوابهای ملایم و قوی معادلات کوشی کسری تعمیم یافته همگن و معادلات کوشی کسری تعمیم یافته ناهمگن می‌پردازیم. در پایان با ذکر یک مثال، کاربردی از نتایج بدست آمده را ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

انتگرال کسری ریمان ـ لیویل، مشتق کسری ریمان‌ـ‌لیوویل، مشتق کسری کاپوتو، مشتق کسری ریمان ـ‌لیویل تعمیم یافته، نیم گروه کسری ریمان ـ‌لیویل، حلال کسری، مسأله کوشی کسری.

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

پیشگفتار

مسأله کوشی با مشتق کسری ریمان ــ لیویل

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t), \\ (g_{1-\alpha} * u)(0) = x \in X. \end{cases}$$

در مدل بندی انتشار غیر عادی کاربردی اساسی دارد. نیگماتولین[1] در [۲۱] با جایگزین کردن مشتق مرتبه اول با مشتق کسری مرتبه α معادله انتشار تعمیم یافته

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2,$$

را بررسی کرد. زاسلاوسکی[2] [۲۵] معادله جنبش کسری

$$\frac{\partial^\beta g(x,t)}{\partial t^\beta} = Lg(x,t) + p_0(x)\frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)},$$

که در آن $0 < \beta < 1$، L مولد یک نیم گروه فلر [3] چون $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ و $p_0 \in C^\infty(R^1)$ شرط اولیه است، را ارائه کرده است. در این جا $\frac{\partial^\beta g(x,t)}{\partial t^\beta}$ معکوس تبدیل لاپلاس $s^\beta \int e^{-st} g(x,t)dt$ است.
هیلفر در [۱۰] براساس مشتقات کسری ریمان ــ لیویل معادله $D_t^\alpha f(r,t) = C_\alpha \triangle f(r,t)$ را بررسی کرد که در آن $0 < \alpha < 1$، $f(r,t)$ میدان مجهول و C_α ثابت انتشار کسری است. شرط اولیه این معادله به فرم $g_{1-\alpha} * f(r,t) \mid_{t\to 0^+}$ داده شده است.
هیلفر[4] در [۹] مشتق کسری ریمان ـ لیویل تعمیم یافته از مرتبه α و نوع β،

$$D_t^{\alpha,\beta} f(t) = J_t^{\beta(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} J_t^{(1-\beta)(m-\alpha)} f(t),$$

که در آن $0 < \alpha < 1$، $0 \leq \beta \leq 1$ و J_t^α انتگرال کسری ریمان ــ لیویل مرتبه α است، را معرفی نمود. در حالتی که $\beta = 0$ مشتق کسری تعمیم یافته، همان مشتق کسری ریمان لیویل از مرتبه α است. در حالتی که $\beta = 1$ مشتق کسری ریمان لیویل تعمیم یافته به عملگر مشتق کسری کاپوتو[5] تبدیل می‌شود.

[1]Nigmatullin [2]Zaslavsky [3]Feller [4]Hilfer [5]Caupto

مسأله کوشی مجرد کسری با مشتق کاپوتو

$$\begin{cases} {}^cD_t^{\alpha}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = x \in X, \end{cases}$$

بطور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. [۲، ۴، ۶، ۱۴، ۱۹] راببینید. مسائل کوشی با مشتق کسری کاپوتو در مدل انتشار غیر عادی در فیزیک کاربرد دارد.

میرسچیرت[1] در [۱۷] جوابهای کلاسیک و نمونه های تصادفی برای مسأله کوشی کسری در دامنه کراندار $D \subset \mathbb{R}^d$ با شرط مرزی دیریکله[2] را تعمیم داد. آنها جواب تصادفی

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial t^{\beta}} = \triangle u(t,x), & x \in D, t > 0, \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial D, t > 0, \\ u(0,x) = f(x), & x \in D, \end{cases}$$

را ساختند، که در آن $0 < \beta < 1$، $\dfrac{\partial^{\beta}}{\partial t^{\beta}}$ عملگر مشتق کسری کاپوتو، D یک دامنه کراندار با $\partial D \in C^{1,\beta}$ و $C^{1,\beta}$ فضای توابعی است که مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته هولدر با نمای β در D است.

ایدلمن[3] و کاچوبی[4] [۶] مسأله کوشی کسری

$${}^cD_t^{\alpha}u(t,x) - Bu(t,x) = f(t,x), \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ و

$$B = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x),$$

را بررسی کردند. در اینجا $a_{i,j}(.)$ ها توابع حقیقی کراندار روی $\mathbb{R}^n$ هستند. ایدلمن و کاچوبی جواب اساسی معادله فوق را براساس H ــ توابع مشخص کردند.

مسأله کوشی مجرد کسری کاپوتو با معادله والترا[5] $u(t) = x + J_t^{\alpha}Au(t)$ معادل است. از میان منابع می‌توان به باجلکوا[6] [۲] اشاره کرد که نظریه مهم عملگر جواب برای معادله فوق را مطرح می‌کند.

جایگاه مشتق کسری ریمان‌ـ لیویل تعمیم یافته از مرتبه $0 < \alpha < 1$ و نوع $0 \leq \beta \leq 1$، جایی بین

---

[1]Meerschaert [2]Dirichlet [3]Eidelman [4]Kochubei [5]Volterra [6]Bajlekova

مشتق ریمان ـ لیویل ($\beta = ۰$) ومشتق کاپوتو ($\beta = ۱$) می‌باشد.
اخیراً مشتق کسری ریمان‌ـ لیویل تعمیم یافته توسط مینردی[۱] و گارنفلو[۲] در [۱۶] مشتق کسری هیلفر نامیده شده است. خواص عملگرهای مشتق کسری تعمیم یافته و معادلات دیفرانسیل معمولی کسری تعمیم یافته توسط هیلفر در [۱۱] بررسی شده است. در حالت خاص معادلات مانایی کسری، سکون کسری و انتشار کسری با مشتقات زمان کسری $D_t^{\alpha,\beta}$ از مرتبه α و نوع β بررسی می‌شوند. برای یک مرتبه ثابت نوع مشتق کسری تعیین کننده شرط اولیه می‌باشد. تفاوت بین انواع مشتقات کسری وقتی مشخص می‌شوند که تبدیل لاپلاس و شرط اولیه آنها بررسی کنیم.
مطالب این پایان نامه با توجه به [۱۸، ۲۰] و در سه فصل بصورت زیر تدوین شده است.
در فصل اول مفاهیم و قضایایی که در فصلهای بعد مورد نیاز می‌باشد بیان شده است.
در فصل دوم ابتدا حلال کسری از مرتبه α و سپس مفهومی به نام نیم گروه کسری ریمان‌ـ لیویل از مرتبه α را تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که مفهوم جدید با تعریف حلال کسری از مرتبه α معادل است. بنابراین برای حلال های کسری از مرتبه α یک مشخصه سازی جدید بدست می‌آوریم.
در فصل سوم ابتدا مفهوم حلال کسری تعمیم یافته از مرتبه α و نوع β و مولد آن را معرفی می‌کنیم. در ادامه ارتباط بین این حلال و مولد آن را بررسی می‌کنیم. سپس به کمک آن وجود جواب های ملایم و قوی مسأله کوشی کسری تعمیم یافته همگن

$$(FAC)\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta}u(t) = Au(t), & t > ۰, \\ \left(g_{(۱-\beta)(۱-\alpha)} * u\right)(۰) = x, \end{cases}$$

ومسأله کوشی کسری تعمیم یافته ناهمگن

$$(IFAC)\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta}u(t) = Au(t) + J_t^{\beta(۱-\alpha)}f(t), & t > ۰, \\ \left(g_{(۱-\beta)(۱-\alpha)} * u\right)(۰) = x, \end{cases}$$

را بررسی می‌کنیم. در پایان با ذکر یک مثال، کاربردی از نتایج بدست آمده آورده شده است.

---
[۱] Mainardi [۲] Gorenflo

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل های بعدی از آن ها استفاده می شود را بیان می کنیم. در سراسر این پایان نامه $\mathbb{R}$ نشانگر اعداد حقیقی و $\mathbb{R}_+$ نشانگر اعداد حقیقی نامنفی است. مطالب این فصل با توجه به [۱، ۵، ۷، ۸، ۱۱، ۱۳، ۲۲] تدوین شده است.

۱ـ۱ فضای نرم دار

تعریف ۱ـ۱ـ۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع حقیقی مقدار $\|.\|$ را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱. به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر وتنها اگر $x = 0$.

۲. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

۳. به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این صورت $(X, \|.\|)$ را یک فضای نرم دار می‌نامیم.

به راحتی دیده می‌شود که هر فضای نرم دار X، با متر القایی از این نرم یعنی $d(x,y) = \|x - y\|$ یک فضای متریک است.

تعریف ۱ـ۱ـ۲. فضای نرم دار X را یک فضای باناخ[1] می‌نامیم هرگاه با متر القایی از نرمش کامل باشد. یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

به عنوان مثال $C([a,b];\mathbb{R})$ یعنی فضای همه توابع پیوسته حقیقی روی $[a,b]$ با نرم سوپریمم یعنی

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|,$$

یک فضای باناخ است.

[1] Banach space

۱ـ۲ فضای ضرب داخلی

فرض کنید H یک فضای برداری مختلط باشد. نگاشت $\langle x,y\rangle \longmapsto (x,y)$ از $H\times H$ به $\mathbb{C}$ یک ضرب داخلی[1] روی H نامیده می‌شود هرگاه

۱. برای هر $x,y,z\in H$ و $a,b\in\mathbb{C}$،

$$\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle.$$

۲. برای هر $x,y\in H$،

$$\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}.$$

۳. برای عضو ناصفر $x\in H$، $\langle x,x\rangle\in(0,\infty)$.

ملاحظه ۱ـ۲ـ۱. *با استفاده ازخاصیت اول تعریف ضرب داخلی به راحتی می‌توان دید که برای هر* $x\in H$، $\langle x,0\rangle = 0$، *بنابراین* $\langle x,x\rangle = 0$ *اگر وتنها اگر* $x=0$.

تعریف ۱ـ۲ـ۲. فرض کنیم H یک فضای برداری مختلط با ضرب داخلی $\langle .,.\rangle$ باشد. H را یک فضای هیلبرت[2] می‌نامیم هرگاه نسبت به نرم حاصل از ضرب داخلی، یعنی

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle},\quad x\in H,$$

کامل باشد.

مثال ۱ـ۲ـ۳. فضای $L^2(0,2\pi)$ با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f\bar{g}dx$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱ـ۲ـ۴. مجموعه $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq H$ یک مجموعه متعامد یکه[3] نامیده می‌شود، هر گاه برای هر $\alpha\in A$ داشته باشیم $\|u_\alpha\|=1$ و اگر $\alpha\neq\beta$ آنگاه $\langle u_\alpha,u_\beta\rangle = 0$.

[1] Inner product
[2] Hilbert space
[3] Orthonormal

قضیه ۱ـ۲ـ۵ (قضیه ۲۷-۵ از [۷]). *اگر $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ یک مجموعه متعامد یکه در H باشد، گزینه های زیر معادلند*

(۱) (*کامل بودن*) *اگر برای هر α، $\langle x, u_\alpha\rangle = ۰$ آنگاه $x = ۰$.*

(۲) (*اتحاد پارسوال*) *برای هر $x \in H$، $\|x\|^۲ = \sum_{\alpha\in A} |\langle x, u_\alpha\rangle|^۲$.*

(۳) *برای هر $x \in H$، $x = \sum_{\alpha\in A}\langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha$، که سری طرف راست فقط تعداد شمارش پذیری جمله غیر صفر دارد و نسبت به نرم H همگراست.*

مجموعه متعامد یکه‌ای که در هر یک از گزاره های بالا صدق کند، یک پایه متعامد یکه برای H نامیده می‌شود.

مثال ۱ـ۲ـ۶ (مثال ۶-۴-۷ از [۱۲]). مجموعه‌ی $\{\sqrt{\frac{۲}{\pi}}\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت $L^۲(۰, \pi)$ است.

۱ـ۳ عملگرهای خطی

تعریف ۱ـ۳ـ۱. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $T : X \to Y$ را یک تبدیل خطی نامیم هرگاه به ازای هر x و y متعلق به X و هر α و β متعلق به $\mathbb{F}$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

در حالت خاص اگر $Y = \mathbb{F}$ باشد، تبدیل خطی T را یک تابعک خطی می نامیم.

حال فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. تبدیل خطی T را کراندار گوییم هرگاه عدد حقیقی و مثبت k موجود باشد بطوریکه برای هر $x \in X$،

$$\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X.$$

ملاحظه ۱ـ۳ـ۲. *فرض کنیم X و Y فضاهای نرم دار باشند. تبدیل خطی $T : X \to Y$ کراندار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد.*

برای تبدیل خطی پیوسته T از X به Y، نرم T را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : \quad \|x\|_X \leq ۱\}. \qquad (۱ــ۱)$$

مجموعه همه تبدیل های خطی پیوسته از X به Y را با $L(X,Y)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $L(X,X)$ را به اختصار با $L(X)$ نشان می دهیم.

به راحتی می توان دید که $L(X,Y)$ با جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری است. همچنین همراه با نرم تعریف شده در (۱ــ۱) به یک فضای نرم دار تبدیل می‌شود. بعلاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد $L(X,Y)$ نیز یک فضای باناخ خواهد بود.

در ادامه این فصل فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ و $D(A)$ یک زیر فضای خطی از X باشد.

تعریف ۱ــ۳ــ۳. نگاشت $T : \mathbb{R}_+ \to L(X,Y)$ را پیوسته قوی[۱] می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in X$، نگاشت $t \longmapsto T(t)x$ روی $\mathbb{R}_+$ پیوسته باشد.

تعریف ۱ــ۳ــ۴. فرض کنید $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر خطی باشد. عملگر A را بسته[۲] گوییم هرگاه برای هر دنباله $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در $D(A)$ که $x_n \to x$ و $Ax_n \to y$، داشته باشیم $x \in D(A)$ و $Ax = y$.

قرار داد. $D(A)$ را دامنه عملگر A می‌نامیم.

تعریف ۱ــ۳ــ۵ (نرم گراف)**.** برای هر عملگر خطی $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$، $D(A)$ با نرم گراف

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$$

یک فضای نرم دار است.

ملاحظه ۱ــ۳ــ۶. *عملگر $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$، نسبت به نرم گراف همواره کراندار است.*

ملاحظه ۱ــ۳ــ۷. *عملگر A بسته است اگر و تنها اگر $D(A)$ با نرم گراف یک فضای باناخ باشد.*

[۱] Strongly continuous

[۲] Closed

تعریف ۱ـ۳ـ۸. فرض کنیم $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر خطی باشد. مجموعه حلال[1] عملگر A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{کراندار باشد } (\lambda I - A)^{-1} \text{ دوسویی و } \lambda I - A\}.$$

در این صورت برای هر $\lambda \in \rho(A)$ قرار می‌دهیم

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

نگاشت $R(., A) : \rho(A) \longrightarrow L(X)$ را حلال عملگر A می‌نامیم.

ملاحظه ۱ـ۳ـ۹ (گزاره ۱ـB از [۱]). *اگر $\rho(A) \neq \varnothing$ آنگاه $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر بسته است.*

ملاحظه ۱ـ۳ـ۱۰ (گزاره ۴ـB از [۱]). *فرض کنیم $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر خطی باشد. اگر $\lambda, \mu \in \rho(A)$، آنگاه*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A). \qquad (۱ـ۲)$$

ملاحظه ۱ـ۳ـ۱۱. *فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $A \in L(X, Y)$. در این صورت با استفاده از قضیه نگاشت باز*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{دوسویی باشد } \lambda I - A\}.$$

ملاحظه ۱ـ۳ـ۱۲ (۲-۱ از [۸]). *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر خطی بسته باشد. در این صورت*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \text{دوسویی باشد } \lambda I - A\}.$$

[1] Resolvent

قضیه ۱ـ۳ـ۱۳ (قضیه ۷ $- B$ از [۱]). *فرض کنید $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ یک عملگر خطی باشد بطوریکه $\rho(A) \neq \varnothing$. همچنین فرض کنید $T \in L(X)$. آنگاه گزینه های زیر معادلند*

۱. *برای هر* $\lambda \in \rho(A)$، $R(\lambda, A)T = TR(\lambda, A)$.

۲. *حداقل یک* $\lambda \in \rho(A)$ *موجود است که* $R(\lambda, A)T = TR(\lambda, A)$.

۳. *برای هر* $x \in D(A)$، $Tx \in D(A)$ *و* $ATx = TAx$.

تعریف ۱ـ۳ـ۱۴. فرض کنیم $A : D(A) \subseteq X \to X$ یک عملگر خطی و کراندار باشد. $\lambda \in \mathbb{R}$ را یک مقدار ویژه[۱] A می‌نامیم هرگاه، $\lambda I - A$ یک به یک نباشد. عضو ناصفر $x \in X$ را یک بردار ویژه[۲] A گوییم هرگاه، $(\lambda I - A)(x) = ۰_X$.

۱ـ۴ انتگرال بوخنر[۳]

فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۱ـ۴ـ۱. فرض کنیم I یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد. تابع $f : I \to X$ را ساده گوییم هرگاه

$$f(t) = \sum_{r=۱}^{n} x_r \chi_{\Omega_r}(t),$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $x_r \in X$، $\Omega_r \subset I$ مجموعه‌ای اندازه پذیر لبگ با اندازه متناهی و

$$\chi_{\Omega_r}(t) = \begin{cases} ۱, & t \in \Omega_r, \\ ۰, & t \notin \Omega_r. \end{cases}$$

تعریف ۱ـ۴ـ۲. تابع $f : I \to X$ را اندازه پذیر می نامیم هرگاه دنباله g_n از توابع ساده موجود باشد بطوریکه برای تقریبا هر $t \in I$ داشته باشیم

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} g_n(t).$$

[۱] Eigenvalue
[۲] Eigenvector
[۳] Bochner integral

مثال ۱ـ۴ـ۳ (نتیجه ۲-۱-۱ از[۱])**.** هر تابع پیوسته، اندازه پذیر است.

تعریف ۱ـ۴ـ۴. فرض کنیم $g: I \to X$ یک تابع ساده بصورت $g = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{\Omega_i}$ باشد. انتگرال g روی I را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_I g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} x_i\, m(\Omega_i),$$

که در آن $m(\Omega)$ اندازه لبگ[1] Ω می باشد.

با تکنیک مشابه انتگرال لبگ می‌توان دید که تعریف فوق مستقل از نمایش تابع ساده g است.

تعریف ۱ـ۴ـ۵. تابع $f: I \to X$ را انتگرال پذیر بوخنر می‌نامیم هرگاه دنبالهg_n از توابع ساده موجود باشد بطوریکه $g_n \longrightarrow f$ تقریباً همه جا روی I و

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|f(t) - g_n(t)\|\,\mathrm{d}t = 0.$$

در این حالت انتگرال بوخنر f روی I را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

تذکر: *توجه می‌کنیم که تعریف انتگرال فوق مستقل ازانتخاب دنباله‌ی $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ است.*

ملاحظه ۱ـ۴ـ۶. *در حالتی که $X = \mathbb{C}$، انتگرال پذیری و انتگرال بوخنر، همان انتگرالپذیری و انتگرال لبگ است.*

تعریف ۱ـ۴ـ۷. فرض کنیم $1 \le p \le \infty$. تعریف می‌کنیم

$$L^p(I;X) = \{g: I \to X:\ \left(\int_I \|g\|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} < \infty \text{ و } g \text{ اندازه پذیر باشد}\}.$$

در این صورت $L^p(I;X)$ با جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری است.

[1] Lebesgue measure